UDK: 519.233.2:519.248(047)=861
COSATI: 12-01, 14-04

Ocena parametra oblika dvoparametarske Vejbulove funkcije pouzdanosti preko srednje vrednosti stepene funkcije vremena rada do otkaza

Dr Slavko Tomović,dipl.inž.[1]

Data je metoda za određivanje parametra oblika dvoparametarske Vejbulove funkcije pouzdanosti pod pretpostavkom da možemo Vejbulovu funkciju zameniti s eksponencijalnom zamenom stepene vremenske promenljive linearnom funkcijom i tako dobiti eksponencijalni oblik. Primenjena je iterativna metoda za izračunavanje ocene parametra oblika Vejbulove funkcije a zatim i parametra razmere. U izračunavanjima je primenjena aproksimativna metoda izračunavanja vrednosti gama funkcije. Metoda je ilustrovana praktičnim primerom. Na kraju je Monte Karlo simulacija primenjena za analizu efikasnosti metode.

Ključne reči: **Vejbulova raspodela, srednja vrednost, standardna devijacija, koeficijent varijacije, gama funkcija, parametri funkcije raspodele, pseudoslučajni brojevi, modelovanje metodom Monte Karlo.**

Uvod

U statističkim analizama, posebno u analizama pouzdanosti tehničkih proizvoda, važnu ulogu igra zakon raspodele slučajne veličine koja se statistički posmatra. U opštem slučaju ovaj se zakon ne poznaje, pa se mora proceniti na osnovu statističkih podataka iz prethodnih ispitivanja.

Postoje i takvi zakoni raspodele koji pokrivaju šire područje raznih raspodela, naime koji se u nekom području preklapaju s drugim raspodelama. Takav je npr. Vejbulov zakon raspodele. Posmatrajući slučaj dvoparametarske Vejbulove raspodele, npr. vremena rada do otkaza nekog proizvoda za koji funkcija pouzdanosti (verovatnoća da će proizvod pod određenim uslovima bez otkaza obavljati predviđenu funkciju duže od vremena *t*) ima oblik:

$$R(t)=\exp(-\gamma t^{\beta}) \tag{1}$$

gde su: β- parametar oblika i γ- parametar razmere. Za razne vrednosti parametra β, vremenski oblik funkcije $R(t)=f(t)$ može da poprimi oblike gama raspodele, normalne raspodele, mešovite Vejbulove – eksponencijalne rapodele [1], a za $\gamma = 1$ svodi se na eksponencijalnu raspodelu. Zbog ovako "elastičnog" ponašanja Vejbulov zakon raspodele je izuzetno pogodan u mnogim praktičnim slučajevima, da zameni nepoznat stvarni zakon raspodele. Ova raspodela dobro pristaje posebno u proizvodima koji relativno brzo stare ili se intenzivno habaju. Ona je jednostavna i laka za uklapanje u primenjene softvere.

Pokazatelji koji karakterišu neku slučajnu veličinu t su srednja vrednost T_{sr}, standardna devijacija σ_t i koeficijent varijacije slučajne v_t veličine t. Oni su definisani izrazima:

$$T_{sr}=\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i \tag{2}$$

$$\sigma_t=\sqrt{\frac{1}{N-1}\sum_{i=1}^{N}(t_i-T_{sr})^2} \tag{3}$$

$$v=\frac{T_{sr}}{\sigma} \tag{4}$$

gde je t_i vreme rada do otkaza proizvoda.

T_{sr} i σ_t imaju dimenziju slučajne veličine t_i a v_i je bezdimenzionalna veličina. Njena vrednost se kreće od 0 do 1 i karakteristična je za razne raspodele. Tako, se radi orijentacije, može smatrati da je za vrednosti koeficijenta varijacije do 0,33 obično u pitanju normalna raspodela, od 0,4 do 1 Vejbulova a za $v = 1$ eksponencijalna raspodela (2). Kada je u pitanju neprekidna slučajna veličina (kao što je vreme t_i), koeficijent varijacije za slučaj dvoparametarske Vejbulove raspodele ima oblik:

$$v=\sqrt{\frac{\Gamma\left(1+\frac{2}{\beta}\right)}{\left[\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)\right]^2}-1} \tag{5}$$

gde je sa Γ predstavljen indeks gama funkcije.

Iz izraza (5) može se indirektno, poznavanjem vrednosti koeficijenta varijacije, izračunati i vrednost parametra oblika Vejbulove raspodele pošto se iz datog izraza vidi da taj parametar može da se posmatra kao inverzna funkcija koeficijenta varijacije $\beta = f(v)$. Metoda za ocenjivanje parametra oblika dvoparametarske Vejbulove raspodele preko koeficijenta varijacije opisana je u [2].

[1] Mirka Tomića 3/3, 11000 Beograd.

Određivanje parametra oblika dvoparametarske Vejbulove raspodele metodom srednje vrednosti stepene slučajne veličine

Za uspešnu statističku analizu neophodno je poznavati

Izraz (10) se predlaže kao matematički model za određivanje vrednosti parametara β i γ. Postupak se svodi na niz izračunavanja vrednosti levih i desnih strana relacije (10) za razne vrednosti parametra β, sve dok njihova razlika ne promeni znak. Vrednost parametra β se svaki naredni put

Tabela 1. Neke vrednosti gama funkcije

R..br.	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
p	1.1	1.2	1.3	1.4	1.5	1.6	1.7	1.8	1.9	2.0
$\Gamma(p)$	0.05135	0.91817	0.89747	0.88726	0.88623	0.89352	0.90864	0.93138	0.96177	1.00000

U praktičnim izračunavanjima je potrebno da se za dati skup slučajno promenljive veličine x_i pretpostavi donja početna vrednost parametra β_0 a zatim se sukcesivno postupak ponavlja s vrednošću parametra oblika $\beta_i = \beta_{i-1}+\Delta\beta$. Pri tome će u početku vrednost desne strane relacije (10) biti veća od vrednosti leve strane, ali se ova razlika u daljim koracima smanjuje i postupak se prekida čim se uspostavi relacija:

$$\left[\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^{\beta}\right]^{\frac{1}{h}} \geq \frac{T_{sr}}{\Gamma\left(1+\frac{1}{\beta}\right)} \tag{17}$$

Najmanja vrednost parametra β pri kojoj važi (17), smatra se konačnom ocenom stvarnog parametra.

U momentu kada se postigne ovo stanje, izračunava se i vrednost ocene parametra razmere γ iz izraza:

$$\gamma = \left(\frac{1}{N}\sum_{i=1}^{N} t_i^{\beta}\right)^{-1} \tag{18}$$

Praktičan primer

Primenu metode ilustrovaćemo na primeru određivanja ocene parametara dvoparametarske Vejbulove funkcije pouzdanosti, pri čemo će slučajnu veličinu predstavljati vreme rada u časovima do otkaza posmatranog proizvoda.

Iz teorije pouzdanosti tehničkih sistema poznato je da se ova funkcija izražava u obliku:

$$R(t) = \exp\,(-\gamma t^{\beta})$$

U tabeli 2 je prikazan statistički niz od $N = 25$ vrednosti vremena u časovima rada do otkaza nekog proizvoda, sređenih u rastućem poretku. Na osnovu podataka iz tabele izračuna se srednje vreme rada do otkaza i za dati skup ono iznosi:

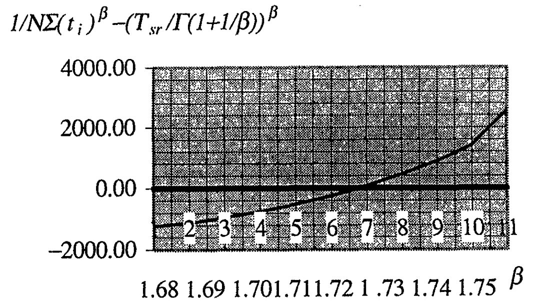
$$T_{sr} = \frac{1}{25}\sum_{i=1}^{25} t_i = 838.61\text{h}$$

Tabela 2. Vremena rada do otkaza proizvoda

Red.br. i	Vreme do otkaza (h)	Red.br. i	Vreme do otkaza (h)	Red.br. i	Vreme do otkaza (h)	Red.br. i	Vreme do otkaza (h)
1	322,44	8	567,22	15	700,25	22	1361,06
2	498,61	9	575,32	16	739,57	23	1418,42
3	523,72	10	580,09	17	767,33	24	1627,64
4	524,41	11	580,52	18	882,57	25	2837,00
5	530,52	12	581,95	19	913,09		
6	531,64	13	584,86	20	1032,93		
7	552,54	14	696,17	21	1035,21		

Izračunavanja se mogu vršiti pomoću raznih računarskih programa. Ovde ćemo napomenuti mogućnost koje ima program *Microsoft Excel* iz programskog paketa *MS Office*, široko dostupnog korisnicima računara. Program *Excel* je namenjen za tabelarne proračune i omogućava izračunavanja bilo kojih matematičkih funkcija, uključujući i statističke kao što je ovde slučaj.

Ne upuštajući se u rad s programom *Excel*, dat je samo izvod iz proračunske tabele, onaj deo iz kojeg se vidi konačna procena parametra oblika iz našeg primera. U tabeli 3 je u susednim kolonama dat uporedno i prikaz vrednosti leve i desne strane relacije (17). Prethodno se grubo ispita razlika leve i desne strane izraza (17) za neke donje i gornje vrednosti parametra β i na taj način se suzi opseg u kojem se nalazi parametar oblika. U našem primeru to je učinjeno grafički prema sl.1 pomoću programa *Excel*, a zatim su u tako suženom opsegu, s manjim priraštajem $\Delta\beta$, izvršena konačna izračunavanja čiji rezultati se vide u tabeli 3.



Slika 1. Grafičko određivanje užeg opsega za izračunavanje parametra β

Tabela 3. Izvod iz tabelarnog izračunavanja prema relaciji (17)

T_{SR}=838.60				
$\Sigma\tau^{\beta}/25$	$(T_{\sigma\rho}/\Gamma(1+1/\beta))^{\beta}$	$\Sigma\tau_i^{\beta}/25-(T_{\sigma\rho}/\Gamma(1+1/\beta))^{\beta}$	β	$\Gamma(1+1/\beta)$
59269.3	60765.27533	-1495.976342	1.61	0.89607
63625.16	65125.70667	-1500.550339	1.62	0.89558
68303.66	69797.29201	-1493.632087	1.63	0.89511
73328.89	74803.42658	-1474.531713	1.64	0.89465
78726.76	80166.52129	-1439.763411	1.65	0.89421
84525.09	85911.8161	-1386.721531	1.66	0.89379
90753.85	92068.03699	-1314.189783	1.67	0.89338
97445.21	98662.6248	-1217.411093	1.68	0.89299
104633.8	105748.5418	-1114.722929	1.69	0.89251
112356.9	113299.2942	-942.3956751	1.7	0.89224
120654.5	121408.5654	-754.0673972	1.71	0.89189
129569.7	130094.2843	-524.5986918	1.72	0.89156
139148.8	139402.4552	-253.672617	1.73	0.89123
149441.6	149371.9271	69.68298147	1.74	0.89092

Na sl.1 vidimo da je za β =1.73 razlika negativna, a za β = =1.74 pozitivna što znači da se između tih vrednosti nalazi stvarna vrednost parametra oblika.

Za većinu praktičnih primena dovoljne su brojčane vrednosti zaokružene na dva decimalna mesta. U našem primeru, dobili bi za vrednost ocene parametra oblika β =1.74 jer bi priraštajem $\Delta\beta$ = 0.01 razlika postala pozitivna za vrednost β = 1.74.

Postoje i drugi jednostavni a efikasni programi za ovakva izračunavanja, kao što je npr. program *Turbo basic*, kojim mogu brzo da se generišu vrednosti gama funkcije i vrše sve ostale operacije pri statističkim izračunavanjima. On zahteva minimalnu memoriju i može se lako pozvati i sa obične diskete bilo iz *DOS*-a bilo iz *Windowsa.*

U tabeli 3 nisu prikazani svi redovi i kolone radne tabele u *Excelu,* koja sadrži vrednosti statističkog skupa vremena rada do otkaza i svih međuvrednosti, već je prikazan samo insert koji je najbitniji za konačnu ocenu i za sužen opseg vrednosti parametra β.

Kada se u našem primeru sprovedu sva rutinska izračunavanja prema relacijama (10–18), dobija se za parametar oblika β vrednost:

$$\beta = 1.739$$

Parametar razmere γ se izračunava iz izraza (9) kao:

$$\gamma = \left(\frac{1}{25} \sum_{i=1}^{25} t_i^{\beta} \right)^{-1} = 6.74 \cdot 10^{-6}$$

Verifikacija metode simulacijom Monte Karlo

Da bi izvršili analizu efikasnosti predložene metode za ocenu parametara dvoparametarske Vejbulove funkcije raspodele, pretpostavićemo da su nam parametri β i γ poznati, na osnovu njih modelovati za Vejbulov zakon raspodele slučajni skup po metodi Monte Karlo i tako dobijenim slučajnim skupom ponoviti izračunavanja kao da parametri nisu poznati. Valjanost metode će se oceniti preko tačnosti s kojom se ocenjeni parametri podudaraju sa stvarnim (poznatim) parametrima što je danas opšte primenjen pristup.

vrednosti ovi h vremena izračunatih prema relaciji:

$$x_i = \{ln[1-F(x_i)])/\gamma\}^{1/\beta} \qquad (19)$$

rametara. Može se uzeti da se tačnost povećava s kvadratnim korenom povećanja veličine ispitnog skupa, tj. ako se npr. veličina skupa poveća 100 puta tačnost će se povećati 10 puta. Korišćenjem računara ne postoji problem veličine skupa, zbog čega se metoda Monte Karlo, koju je inače odavno predložio Nojman, intenzivnije afirmisala tek s primenom savremenih računara.

U našem primeru generisaćemo prema formuli (20) 500 pseudoslučajnih brojeva za koje smatramo da reprezentuju vredenosti funkcije raspodele, tj.da je $F(x_i) = \rho_i$ i izračunaćemo njima odgovarajuće vrednosti:

$$1 - F(x_i) = \rho_i \qquad (21)$$

Sada ćemo modelovati primerke skupa slučajne veličine x_i preko izraza (19), uzimajući za stvarne vrednosti parametara β i γ vrednosti izračunate u prethodnom primeru.

Po izrazima (10–18) a za prirast parametra β, $\Delta\beta$ = =0.00005 izračunaćemo ocene ovih parametara. Primenom predložene metode na modelu uzorka generisanom metodom Monte Karlo dobijamo ocenjene vrednosti β^*= =1.74145 i γ^* = 7.15$\cdot 10^{-6}$. Ove su vrednosti bliske stvarnim vrednostima za β i γ sa greškom :

$$\Delta\beta / \beta = (\beta - \beta^*)/\beta = 0.00245 \text{ ili } 0.245\ \%$$

i

$$\Delta\gamma / \gamma = (\gamma - \gamma^*)/\gamma = 0.0336 \text{ ili } 3.36\ \%$$

gde su β i γ stvarne vrednosti parametara a β^* i γ^* vrednosti procenjene korišćenjem slučajnog skupa modelovanog

Zaključak

S obzirom na značaj određivanja zakona raspodele slu-

Two-parameter Weibull function parameter estimation by time to failure power function mean value

This document presents a metod for estimating the parameters of the 2-parameter Weibull reliability function on the assumption that we can express Weibull function as the exponential function by the change of the true power random variable whith the linear variable getting so exponential case. The itterative method is used for the estimation of the shape parameter of the Weibull function and then its scale parameter. In the method is used an aproximation for the values calculation of the gamma function. The methodology is illustrated by a practical example. On addition Monte Carlo simulation is used for the analysis of the method efficience.

Key words: **Weibull distribution, mean value, gamma function, parameters of the reliability function, random numbers, Monte Carlo simulation.**

Estimation des paramètres de la fonction de fiabilité de Weibull à deux paramètres en utilisant la valeur moyenne d'une fonction puissance de la durée avant défaillance

On donne une méthode pour déterminer les paramètres de la fonction de fiabilité de Weibull à deux paramètres en supposant que la fonction de Weibull peut être remplacée par la fonction exponentielle d'une manière suivante: la variable aléatoire de puissance est remplacée par la fonction linéaire. La méthode itéractive est appliquée pour calculer l'estimation du paramètre de forme de la fonction de Weibull et puis du paramètre d'échelle. La méthode d'approximation pour la calculation de la fonction gamma est utilisée aussi bien que la simulation de Monté-Carlo pour l'analyse de l'efficacité de la méthode.

Mots-clés: **distribution de Weibull, valeur moyenne, déviation standard, coefficient de la variation, fonction gamma, paramètres de la fonction de distribution, nombres pseudo-aléatoires, modélisation par la méthode de Monté-Carlo.**