UDK: 514.763.5:531.01(047)=861
COSATI: 12-01, 20-15

O dvojnom karakteru vektora položaja

Dr Zoran Drašković, dipl.meh.[1)]

Još uvek prisutna dilema – da li je vektor položaja zaista vektor – prevaziđena je ukazivanjem na činjenicu da se, u suštini, radi o jednom primeru *dvostrukog* tenzorskog polja.

Ključne reči: **vektor položaja, dvostruka tenzorska polja.**

Uvod

OPŠTE je poznata definicija da vektor položaja predstavlja " ... *vektor čiji se početak nalazi u polu, a kraj u posmatranoj tački.*" ([1], str. 3). Ipak, kada naiđe na potpuno oprečne stavove dvojice istaknutih pripadnika beogradske škole mehanike – " ... *vektor položaja jeste vektor i u «tenzorskom smislu».*" ([2], str. 865) i " ... *vektor položaja ne predstavlja vektorsko polje* ... " ([3], str. 3) – čak i bolje upućen čitalac može biti zbunjen takvim nesaglasjem, koje i danas zna da zaiskri u raspravama posle nekih saopštenja u usko naučnim krugovima.

Nesklon apriornom opredeljivanju za neko od tih mišljenja, potpisnik ovih redova se – i kad se upoznao sa, reklo bi se valjanim, potkrepljenjima autorâ – pre više od petnaest godina (a u vezi s izvesnim razmatranjima teorije ljusaka) ipak zapitao: postoji li neki srednji (da li i "carski"?) put između ovih, naizgled nepomirljivih, stavova?

U nastojanju da se da celovit (da li i konačan?) odgovor na to pitanje, trebalo se vratiti u sad već daleke šezdesete godine prošlog veka kada je mehanika kontinuuma doživljavala pravi uspon u radovima Truzdela (C. Truesdell), Tupina (R.A. Toupin), Eriksena (J.L. Ericksen), ... (ali i naših autora – pre svega R. Stojanovića) i kada je jedno od osnovnih poglavlja u tadašnjim kursevima iz mehanike neprekidnih sredina bilo i poglavlje o dvostrukim tenzorskim poljima.

O dvostrukim tenzorskim poljima

Teorija dvostrukih tenzorskih polja je relativno mlada – –može se smatrati da je ona strogo zasnovana i sistematski izložena u radu [4] objavljenom 1960. godine. Da bismo istakli o kakvom se uopštenju tenzorskog računa radi, najpre ćemo uporedo navesti definicije matematičkih objekata izvesnom prostoru*), a koji se pri koordinatnoj transformaciji**)

$$\overline{x}^i = \overline{x}^i(x^j) \quad (i,j = 1,\dots,n) \tag{1}$$

transformiše prema zakonu***)

$$\overline{T}^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{k_1 \dots k_p}_{\ell_1 \dots \ell_q} \frac{\partial \overline{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \overline{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial \overline{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\ell_q}}{\partial \overline{x}^{j_q}} \tag{2}$$

kaže se da određuje *tenzor (p+q)-tog reda, p puta kontravarijantan i q puta kovarijantan* ([5], str. 49). Ako su, pri tome, ove veličine zavisne od tačke prostora x^i u kojoj se posmatraju, onda se govori o *tenzorskom polju:*

$$T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q} = T^{i_1 \dots i_p}_{j_1 \dots j_q}(x^i) \tag{3}$$

Međutim, mogu se uvesti takvi tenzori, odnosno takva tenzorska polja koja bi bila *istovremeno* definisana u međusobno nezavisnim tačkama dva prostora ili dve oblasti tih prostora ili pak u različitim tačkama dve oblasti istog prostora.

Naime, radi se o sistemu funkcija oblika:

$$T^{i_1 \dots i_p I_1 \dots I_P}_{j_1 \dots j_q J_1 \dots J_Q} = T^{i_1 \dots i_p I_1 \dots I_P}_{j_1 \dots j_q J_1 \dots J_Q}(x^i, X^I)$$

$$(i, i_1, \dots, i_p, j_1, \dots, j_q = 1, \dots, n;\ I, I_1, \dots, I_P, J_1, \dots, J_Q = 1, \dots, N) \tag{4}$$

*) "*From everyday experience, we all have some idea as to the meaning of the following terms [space, time and matter] ... . However, we would certainly find it difficult to formulate completely satisfactory definitions. ... Space ... is closely related to the concepts of point, position, direction and displacement.*" ([19], str. 1-2). Ovde je, za sada, *prostor* određen kao skup svih *tačaka* $(x^1, x^2, \dots, x^n)$ za sve moguće realne vrednosti promenljivih x^i;

koji je dat u odnosu na sisteme koordinata x^i i X^I u tim prostorima ili oblastima i koji se pri *istovremenim* koordinatnim transformacijama (1) i transformacijama*):

$$\bar{X}^I = \bar{X}^I(X^J) \quad (I, J = 1, \dots, N) \tag{5}$$

transformiše prema zakonu ([4], str. 805):

$$\begin{aligned} &\bar{T}^{i_1\dots i_p I_1\dots I_P}_{j_1\dots j_q J_1\dots J_Q} = \\ &= T^{k_1\dots k_p K_1\dots K_P}_{\ell_1\dots \ell_q L_1\dots L_Q} \frac{\partial \bar{x}^{i_1}}{\partial x^{k_1}} \cdots \frac{\partial \bar{x}^{i_p}}{\partial x^{k_p}} \frac{\partial x^{\ell_1}}{\partial \bar{x}^{j_1}} \cdots \frac{\partial x^{\ell_q}}{\partial \bar{x}^{j_q}} \\ &\quad \frac{\partial \bar{X}^{I_1}}{\partial X^{K_1}} \cdots \frac{\partial \bar{X}^{I_P}}{\partial X^{K_P}} \frac{\partial X^{L_1}}{\partial \bar{X}^{J_1}} \cdots \frac{\partial X^{L_Q}}{\partial \bar{X}^{J_Q}} \end{aligned} \tag{6}$$

Očigledno, ako se vrši samo koordinatna transformacija (1), zakon transformacije tog sistema se svodi na zakon transformacije tenzora tipa $T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}$, a u slučaju transformacije (5) na zakon transformacije tenzora tipa $T^{I_1\dots I_P}_{J_1\dots J_Q}$. Stoga je i sistem (4) ipak tenzorske prirode, a kako je definisan u tačkama dva prostora – dva polja, kaže se da određuje *dvostruko tenzorsko polje (p+P+q+Q)-tog reda, p+P puta kontravarijantno i q+Q puta kovarijantno* ([4], str. 805).

Poseban slučaj dvostrukog tenzorskog polja predstavlja, npr. sistem oblika:

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^i, X^I) \tag{7}$$

koji se pri koordinatnoj transformaciji (1) ponaša kao "običan" tenzor, a pri transformaciji (5) kao sistem skalarnih funkcija, tj. *skalarnih invarijanata* ([5], str. 38):

$$\bar{T}^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^i, \bar{X}^I) = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^i, X^I) \tag{8}$$

Ukoliko je sistem (7) još i *konstantna* skalarna invarijanta u prostoru ili oblasti (polju) promenljivih X^I, što znači da je oblika:

$$T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q} = T^{i_1\dots i_p}_{j_1\dots j_q}(x^i) \tag{9}$$

tada se dvostruko polje (7) svodi na "obično" tenzorsko polje. Prema tome, obični tenzori zaista mogu da budu posmatrani kao posebna vrsta dvostrukih tenzorskih polja.

Prostori promenljivih x^i (i=1,...,n) i X^I (I=1,...,N) očigledno su dimenzija n i N, pa je moguće razlikovati sledeća dva slučaja ([4], str. 806):

1. $N<n$; prostor promenljivih X^I može da se posmatra kao neki *potprostor* prostora promenljivih x^i (tj. *obvojnog* prostora); taj potprostor definisan je jednačinama oblika:

$$x^i = x^i(X^I) \tag{10}$$

   pri čemu tački potprostora s koordinatama X^I odgovara ta *ista tačka* obvojnog prostora, čije su koordinate sad $x^i(X^I)$;
2. $N=n$; u ovom slučaju se postojanje dve oblasti definisanosti dvostrukih tenzorskih polja obično interpretira na sledeća dva načina:
   a) koordinate x^i i X^I posmatraju se kao koordinate *dveju* tačaka u istom prostoru i u odnosu na *jedan* koordinatni sistem;
   b) međutim, x^i i X^I mogu da se smatraju i sistemima koordinata u dvema oblastima istoga prostora; pri tom se pretpostavlja da između tih oblasti postoji preslikavanje oblika (10).

   Treći slučaj $N>n$ nije od interesa, jer je sličan slučaju pod 1) i može na njega da se svede.

Napomenimo da se za dvostruka tenzorska polja uvode algebarske i diferencijalne operacije ([4], str. 809-813), koje su određena uopštenja takvih operacija u "običnom" tenzorskom računu, ali o tome ovde neće biti reči.

Izvori dvostrukih tenzorskih polja

Upravo će navedenim tumačenjima uzajamnih odnosa oblasti definisanosti dvostrukih tenzorskih polja odgovarati sledeći sistemi veličina, koji mogu da budu smatrani začecima teorije takvih polja, jer je za te veličine od ranije bilo poznato ili uvedeno da imaju dvojako ponašanje pri transformacijama koordinatnih sistema u odnosu na veličine koje se posmatraju.

Kada se u diferencijalnoj geometriji govori o površi u trodimenzionalnom euklidskom prostoru, koja je određena parametarskim jednačinama oblika ([5], str. 184):

$$z^i = z^i(u^\alpha) \quad (i = 1,2,3;\ \alpha = 1,2) \tag{11}$$

gde su z^i Dekartove (Descartes) pravougle koordinate, a u^α neke generalisane koordinate na samoj toj površi (tzv. Gausovi (Gauss) parametri), tada se posmatra i ovakav sistem drugog reda:

$$\frac{\partial z^i}{\partial u^\alpha} \tag{12}$$

koji obrazuju *gradijenti* skalarnih funkcija $z^i(u^\alpha)$; za taj sistem se utvrđuje ([5], str. 186-187) da ima *dvostruku prirodu*: u odnosu na trodimenzionalni obvojni prostor on se, pri koordinatnoj transformaciji u tom prostoru:

$$\bar{z}^i = \bar{z}^i(z^j) \quad (i, j = 1,2,3) \tag{13}$$

ponaša kao kontravarijantni vektor

$$\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial u^\alpha} = \frac{\partial z^j}{\partial u^\alpha}\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial z^j} \quad (i, j = 1,2,3;\ \alpha = \text{const.}) \tag{14}$$

a promenljive u^α imaju ulogu parametara za obvojni prostor, tj. za transformaciju (13); posmatrano pak, u odnosu na površ (potprostor trodimenzionalnog euklidskog prostora), sistem (12) se, pri zameni promenljivih u^α na samoj površi:

$$\bar{u}^\alpha = \bar{u}^\alpha(u^\beta) \quad (\alpha, \beta = 1,2) \tag{15}$$

transformiše kao kovarijantni vektor:

$$\frac{\partial z^i}{\partial \bar{u}^\alpha} = \frac{\partial z^i}{\partial u^\beta}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \quad (i = const.;\ \alpha, \beta = 1,2) \tag{16}$$

dok sad funkcije z^i promenljivih na površi ostaju invarijantne pri transformaciji (15); no, ukoliko se koordinatne transformacije u obvojnom prostoru i potprostoru, (13 i 15), izvrše *istovremeno*, onda se sistem (12) transformiše po sledećem zakonu:

$$\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial \bar{u}^\alpha} = \frac{\partial z^j}{\partial u^\beta}\frac{\partial \bar{z}^i}{\partial z^j}\frac{\partial u^\beta}{\partial \bar{u}^\alpha} \tag{17}$$

*)Za koje se, slično kao i u (1), pretpostavlja da je $\left|\partial \bar{X}^I / \partial X^J\right| \neq 0$!

i stoga određuje *dvostruko tenzorsko polje* drugoga reda, jer

nisu našle primenu u kasnijim Ajnštajnovim radovima, a

u definiciji dvostrukih tenzorskih polja. Naravno, takva razmatranja mogu da budu preneta i na n-dimenzionalne obvojne prostore i njihove $N(<n)$-dimenzionalne potprostore ([4], str. 810), ali to ovde nije od interesa. Da bismo ilustrovali složenost dvostrukih zakona transformacije, navedimo da bi izrazi (17) – u slučaju da se radi o koordinatnim transformacijama između Dekartovih sistema z^i ($z^1 \equiv x,\ z^2 \equiv y,\ z^3 \equiv z$) i $\overline{z}^i$ ($\overline{z}^1 \equiv \overline{x},\ \overline{z}^2 \equiv \overline{y},\ \overline{z}^3 \equiv \overline{z}$) odnosno između geografskih koordinata u^α ($u^1 \equiv \varphi,\ u^2 \equiv \vartheta$) i $\overline{u}^\alpha$ ($\overline{u}^1 \equiv \overline{\varphi},\ \overline{u}^2 \equiv \overline{\vartheta}$) na nekoj sfernoj površi $r = \overline{r} = \text{const.}$ – – u razvijenom obliku glasili:

$$\frac{\partial \overline{x}}{\partial \overline{\varphi}} = \frac{\partial x}{\partial \varphi}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\varphi}} + \frac{\partial y}{\partial \varphi}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\varphi}} + \frac{\partial z}{\partial \varphi}\frac{\partial \overline{x}}{\partial z}\frac{\partial \varphi}{\partial \overline{\varphi}} + \frac{\partial x}{\partial \vartheta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial x}\frac{\partial \vartheta}{\partial \overline{\varphi}} + \frac{\partial y}{\partial \vartheta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial y}\frac{\partial \vartheta}{\partial \overline{\varphi}} + \frac{\partial z}{\partial \vartheta}\frac{\partial \overline{x}}{\partial z}\frac{\partial \vartheta}{\partial \overline{\varphi}}$$

Tek je u mehanici kontinuuma (čiju disciplinu svakako predstavlja i teorija ljusaka!), preciznije u tzv. teoriji velikih deformacija, ideja o dvostrukim tenzorskim poljima razvijena u tolikoj meri i na takav način da je omogućila izgrađivanje teorije tih polja onako kako je to u [4] učinjeno. Naime, pokazalo se da se za opisivanje neprekidne sredine (materijalnog kontinuuma) moraju koristiti *dva*, u opštem slučaju krivolinijska, koordinatna sistema ([7], str. 241; [8], str. 13; [9], str. 15; [10], str. 23 i 32; [11], str. 12). Prvi je sistem *materijalnih* ili *Lagranževih* (Lagrange) *koordinata* X^I (I=1,2,3), u odnosu na koji se opisuje *početna konfiguracija* neprekidne sredine; drugi je sistem *prostornih* ili *Ojlerovih* (Euler) *koordinata* x^i (i=1,2,3), koje u svakom trenutku vremena t određuju položaj u prostoru bilo koje materijalne tačke X^I posmatrane neprekidne

Međutim, iako je teorija dvostrukih tenzorskih polja iskorišćena kao matematički aparat prvenstveno u mehanici kontinuuma (pri opisivanju ponašanja neprekidne sredine u odnosu na dva koordinatna sistema), ona može da bude primenjena i u drugim fizikalnim teorijama (ali i matematičkim, kao npr. u diferencijalnoj geometriji). Razlog ovakvom uverenju jeste jedan poseban primer dvostrukih tenzorskih polja – tzv. *operatori paralelnog pomeranja* (*"Euclidean shifters"*, str. 806 u [4]; *"shifting operators"*, str. 97 u [12]). To su sistemi veličina oblika:

$$g^i_I = g^i_I(x^j, X^J) \quad (i, j, I, J = 1,2,3) \tag{26}$$

pomoću kojih može neki vektor i, uopšte, tenzor definisan u tački x^i prostora, *paralelno* da se prenese u neku tačku X^I tog istog prostora i obrnuto. Oni su definisani relacijama oblika:

$$g^i_I \equiv \delta^j_J \frac{\partial x^i}{\partial z^j} \frac{\partial Z^J}{\partial X^I} \tag{27}$$

gde su z^i i Z^I Dekartove pravougle koordinate (u odnosu na *isti* koordinatni sistem) pomenutih dveju tačaka prostora (između kojih se vrši paralelno pomeranje) i povezane su s krivolinijskim koordinatama x^i i X^I tih tačaka relacijama oblika:

$$x^i = x^i(z^j) \quad (i, j = 1,2,3) \tag{28}$$

i

$$X^I = X^I(Z^J) \quad (I, J = 1,2,3) \tag{29}$$

kojima su, u stvari, uvedena *dva* nezavisna generalisana koordinatna sistema u okolinama tih tačaka prostora; pri opštim koordinatnim transformacijama (23 i 24) u tim okolinama, sistem (26) će se transformisati prema zakonu:

$$\bar{g}^i_I = g^j_J \frac{\partial \bar{x}^i}{\partial x^j} \frac{\partial X^J}{\partial \bar{X}^I} \tag{30}$$

koji je samo specijalan slučaj zakona transformacije (6), što znači da i operatori paralelnog pomeranja takođe predstavljaju primer dvostrukih tenzorskih polja. Značaj ovih operatora je u tome što omogućuju da se vrši *konačno* paralel-

Vektor položaja kao dvostruko tenzorsko polje

Kao primer korišćenja pomenutih operatora paralelnog pomeranja, u [14] se izvode sledeći izrazi**) za koordinate vektora položaja tačke P u odnosu na tačku P_o (u opštem slučaju se pretpostavlja da je $P_o \neq O$, tj. da se tačka P_o ne poklapa sa koordinatnim početkom O) u proizvoljnom krivolinijskom sistemu x^i (i=1,2,3) u trodimenzionalnom euklidskom prostoru***):

$$\begin{aligned} r^i(P, P_o) &= \int_{P_o}^{P} g^i_{.j}(P, M)\, dx^j(M) \\ &= \int_{P_o}^{P} g^i_j(M, P)\, dx^j(M) \end{aligned} \tag{31}$$

a to ukazuje na to da vektor položaja pripada kategoriji dvostrukih tenzorskih polja ili tzv. dvotačkastih tenzora****): *"The position vectors belong to the category of two-point tensors."* ([14], str. 500); pri tome: *"With respect to the first point indicated behind the kernel letter r, they represent an ordinary vector and with respect to the second point, an absolute scalar."* ([14], str. 500), što znači da (31) predstavlja, u stvari, sistem oblika (7).

Dakle, zaista *"vektor položaja jeste vektor **i** u «tenzorskom smislu»"*, dok bi tvrdnja da *"vektor položaja ne predstavlja vektorsko polje"* dobila svoje puno značenje tek kada bi glasila: *"vektor položaja ne predstavlja **obično** vektorsko polje"*, jer se zapravo radi o dvostrukom tenzorskom polju. Međutim, ovaj bipunktualni karakter vektora položaja često se previđa, jer se obično govori o vektoru položaja tačke P u odnosu na koordinatni početak O (tj. pretpostavlja se da je $P_o \equiv O$), pa se zavisnost od tog početka (pola) izostavlja i jednostavno se piše samo $r^i(P)$; čak i u [14] se na str. 87 za vektor položaja tačke P u odnosu na tačku P_o koristi oznaka $r^i(P)$ i izostavlja početna tačka, makar da je (u vrlo iscrpnom Dodatku, na str. 500) korišćena doslednija oznaka $r^i(P, P_o)$!

Primer: Koordinate vektora položaja u cilindarskim polarnim koordinatama. Ako se iskoriste izrazi (31), odnosno u razvijenom obliku:

$r^1(P, P_o) =$

$\{g_j^{\cdot i}(M,P)\}$ između tačaka $M(r,\varphi,z)$ i $P(r_P,\varphi_P,z_P)$ u tom sistemu (v. npr. (15.1) u [4], (3.A.22) u [14] ili (17) u [13]):

$$\left\{\begin{matrix} \cos(\varphi_P-\varphi) & r\sin(\varphi_P-\varphi) & 0 \\ -1/r_P\sin(\varphi_P-\varphi) & r/r_P\cos(\varphi_P-\varphi) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{matrix}\right\} \tag{33}$$

dobija ([14], str. 501):

$$\left.\begin{aligned} r^1(P,P_o) &= \int_{P_o}^{P}[\cos(\varphi_P-\varphi)\,dr + r\sin(\varphi_P-\varphi)\,d\varphi] \\ r^2(P,P_o) &= \int_{P_o}^{P}[-1/r_P\sin(\varphi_P-\varphi)\,dr + r/r_P\cos(\varphi_P-\varphi)\,d\varphi] \\ r^3(P,P_o) &= \int_{P_o}^{P}dz \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

Podesno birajući put integraljenja*) od $P_o(r_o,\varphi_o,z_o)$ do $P(r_P,\varphi_P,z_P)$, npr. preko tačaka (r_P,φ_o,z_o) i (r_P,φ_P,z_o), možemo krivolinijske integrale u (34) svesti na obične:

$$\left.\begin{aligned} r^1(P,P_o) &= \\ &= \int_{r_o}^{r_P}[\cos(\varphi_P-\varphi)]_{\varphi=\varphi_o}\,dr + \int_{\varphi_o}^{\varphi_P}[r\sin(\varphi_P-\varphi)]_{r=r_P}\,d\varphi \\ r^2(P,P_o) &= \\ &= \int_{r_o}^{r_P}[-1/r_P\sin(\varphi_P-\varphi)]_{\varphi=\varphi_o}\,dr + \int_{\varphi_o}^{\varphi_P}[r/r_P\cos(\varphi_P-\varphi)]_{r=r_P}\,d\varphi \\ r^3(P,P_o) &= \int_{z_o}^{z_P}dz \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

pa se za koordinate vektora položaja tačke P u odnosu na tačku P_o u cilindarskom polarnom sistemu najzad dobijaju izrazi:

$$\left.\begin{aligned} r^1(P,P_o) &= r_P - r_o\cos(\varphi_P-\varphi_o) \\ r^2(P,P_o) &= r_o/r_P\sin(\varphi_P-\varphi_o) \\ r^3(P,P_o) &= z_P - z_o \end{aligned}\right\} \tag{36}$$

koji se u slučaju da je $P_o \equiv O$ (tj. $r_o=0, \varphi_o=0, z_o=0$) svode (uz izostavljanje oznake za koordinatni početak O) na dobro poznate izraze za koordinate vektora položaja u tom sistemu:

$$\left.\begin{aligned} r^1(P) &= r_P \\ r^2(P) &= 0 \\ r^3(P) &= z_P \end{aligned}\right\} \tag{37}$$

Razume se, do izrazâ oblika (37) može se doći i neposredno, na uobičajeni način, koristeći poznate veze između Dekartovih koordinata z^i i cilindarskih polarnih koordinata $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv z$:

$$\left.\begin{aligned} z^1 &= r\cos\varphi \\ z^2 &= r\sin\varphi \\ z^3 &= z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{(z^1)^2+(z^2)^2} \\ \mathrm{tg}\,\varphi &= z^2/z^1 \\ z &= z^3 \end{aligned}\right\} \tag{38}$$

i zamenjujući odgovarajuće izraze za parcijalne izvode u transformacionim formulama oblika:

$$r_P^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right|_P z_P^j \tag{39}$$

dok bi se izrazi (36) dobili polazeći od relacija:

$$r_P^i = \left.\frac{\partial x^i}{\partial z^j}\right|_P (z_P^j - z_o^j) \tag{40}$$

pri čemu se koristi činjenica da su koordinate vektora položaja u Dekartovom sistemu jednake razlici koordinata krajnje i početne tačke.

Međutim, pravi cilj donekle neuobičajenog dobijanja izrazâ (36), polazeći od izrazâ (31), bio je da se na konkretnom primeru pokaže učinkovitost izrazâ (31), uz dosledno isticanje bipunktualnog karaktera vektora položaja. Napomenimo da izrazi (31), osim u nekim opštim razmatranjima, svakako mogu biti korišćeni i za numeričko (dakle približno) određivanje koordinata vektora položaja (naravno uz odgovarajuće aproksimiranje i samih koordinata operatora paralelnog pomeranja u (31)) u slučaju ređe korišćenih krivolinijskih sistema, kada su složenije i relacije kojima se uvode odnosne krivolinijske koordinate.

Završne napomene

Ovaj rad predstavlja prilog raspravi o (ne)vektorskom karakteru vektora položaja. Naime, ukazivanjem na dvostruki karakter vektora položaja prevaziđena je dilema da li se zaista radi o vektorskom polju (u smislu tenzorskog računa): vektor položaja jeste, s obzirom na početnu tačku, tzv. apsolutno skalarno polje, ali s obzirom na krajnju tačku predstavlja i vektorsko polje.

Pimetimo da, čak i da je u uvodu pomenuta tvrdnja da *"vektor položaja ne predstavlja vektorsko polje"* u celosti ispunjena, to ipak ne bi bio jedini primer veličine koja svojim nazivom nagoveštava, makar u jezičkom smislu, protivrečnost. Recimo tzv. *bazni vektori* $\mathbf{g}_i$ nekog koordinatnog sistema x^i (i=1,2,3) u svom imenu sadrže pojam *vektor*, a zapravo *nisu vektori* u smislu tenzorskog računa (v. [16], str. 44), nego *koordinate* (ili *komponente*, što je uobičajen naziv za njih u anglosaksonskoj literaturi) vektora**), budući da zadovoljavaju zakon transformacije (v. npr. [11], str. 341):

$$\mathbf{g}_i = \frac{\partial z^j}{\partial x^i}\mathbf{e}_j \qquad (i,j=1,2,3) \tag{41}$$

gde su $\mathbf{e}_i$ bazni vektori Dekartovih koordinata z^i.

Na kraju podvlačimo da je bilo reči o vektoru položaja samo u euklidskom prostoru. Naime, *"U euklidskom prostoru ... rastojanje je jednako radijus-vektoru***), dok u*

*) Nezavisnost krivolinijskih integrala u (31) od puta integraljenja sledi neposredno iz tzv. kovarijantne konstantnosti operatora paralelnog pomeranja (v. [4], str. 810).

**) Na sličnu nekonzistentnost u posmatranju rezultanti napona (u teoriji ljusaka) kao vektora, a ne kao vektorskih koordinata, ukazano je u [17].

***) Radijus-vektor je naziv koji se u literaturi takođe koristi za vektor položaja!

neeuklidskom prostoru ... nema veličine koja bi imala sva svojstva euklidskog radijus-vektora ... . Prema tome, sada je izbor «radijus-vektora» proizvoljan." ([18], str. 284). Međutim, valja priznati da se celom ovom prilogu pristupilo zapravo u uverenju da bi i rekapitulacija izvesnih (sa)znanja o vektoru položaja u euklidskom prostoru mogla da ukaže na neki novi put u proučavanju neeuklidskih prostora. To bi trebalo da bude predmet budućih istraživanja.

Obaveštenje. Autor izražava zahvalnost prof. dr Veljku Vujičiću (*Matematički institut SANU*, Beograd) na kritičkom pregledu ovog rada.

Literatura

[1] ANĐELIĆ,T., STOJANOVIĆ,R. *Racionalna mehanika*, Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1965.

[2] VUJIČIĆ,V. Transformacija koordinata vektora položaj. *Tehnika*, 1980, no.6, pp.858-868.

[3] PLAVŠIĆ,M. O mogućnosti predstavljanja koordinata vektora brzine. *Tehnika*, 1985, no.40, pp.3-9.

[4] ERICKSEN,J.L. *Tensor Fields*. Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer–Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, 1960.

[5] ANĐELIĆ, T.P. *Tenzorski račun*. Naučna knjiga, Beograd, 1967.

[6] EINSTEIN,A., BARGMANN,V. Bivector fields. *Ann. of Math.*, 1944, vol.45, no.2, pp.1-14.

[7] TRUESDELL C., TOUPIN, R.A. *The Classical Field Theories*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer-Verlag, Berlin – Göttingen – - Heidelberg, 1960.

[8] STOJANOVIĆ,R., *Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma*. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1965.

[9] STOJANOVIĆ,R., *Mehanika kontinuuma*. Prirodno-matematički fakultet, Beograd, 1969.

[10] SEDOV,L.I. *Mekhanika sploshnoj sredy*. I, Nauka, Moskva, 1970.

[11] JARIĆ,J. *Mehanika kontinuuma*. Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

[12] ANĐELIĆ,T.P. *A Survey of Tensor Calculus*. International Centre for Mechanical Sciences, Udine, 1970.

[13] DRAŠKOVIĆ,Z. O operatorima paralelnog pomeranja u euklidskom i neeuklidskim prostorima. *Naučnotehnički pregled*, 2001, vol.51, no.5, pp.5-14.

[14] RUTTEN,H.S. *Theory and Design of Shells on the Basis of Asymptotic Analysis*. Rutten+Kruisman, Consulting Engineers, Voorburg, 1973.

[15] ERINGEN,A.C., SUHUBI,E.S. *Elastodynamics*. I, Academic Press, New York, 1974.

[16] MARSDEN,J.E., HUGHES,T.J.R. *Mathematical Foundations of Elasticity*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, 1983.

[17] DRAŠKOVIĆ,Z., Stress-resultants in the shell theory - asymmetric or symmetric ? *Teorijska i primenjena mehanika*, 1995, no.21, pp.19-28.

[18] LANDAU,L., LIFŠIC,E. *Torija polja*. Naučna knjiga, Beograd, 1952. *(prevod s ruskog)*

[19] SPIEGEL,M.R. *Theory and Problems of Theoretical Mechanics*, McGraw-Hill, New York, 1967.

Rad primljen: 5.7.2002.god.

On the position vector dual character

A dilemma still present – whether the position vector is a true vector – is surpassed by pointing out the fact that an example of the *double* tensor fields is, in essence, in question.

Key words: **position vector, double tensor fields.**

Sur le double caractère du vecteur de position

Un dilemme encore présent - si le vecteur de position est vraiment un vecteur - est surmonté par le fait qu'il s agit, en effet, d'un exemple du champ tensoriel double.

Mots-clés: **vecteur de position, champs tensoriels doubles.**