UDK: 681.511.2.037:517.93(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Stabilnost linearnih vremenski neprekidnih sistema na konačnom vremenskom intervalu: retrospektiva rezultata

Dr Dragutin Lj. Debeljković,dipl.inž [1)]

U radu je dat iscrpan, hronološki pregled rezultata koji se bave problematikom stabilnosti ove klase sistema na konačnom vremenskom intervalu. Navedene su brojne definicije, a kroz selektivno odabrane teoreme dati su aktuelni publikovani rezultati, koji određuju dovoljne uslove stabilnosti i nestabilnosti autonomnih i neautonomnih vremenski neprekidnih linearnih sistema.

Ključne reči: **vremenski neprekidni sistemi, stabilnost na konačnom vremenskom intervalu.**

Korišćene oznake i simboli

$A_{(\cdot)}$	– matrica sistema, objekta ili procesa, matrica
B	– matrica upravljanja, matrica
$\mathbf{f}(\cdot)$	– vektorska funkcija
I	– jedinična matrica
J	– kontinualni vremenski interval
J	– tekući indeks
$\mathcal{K}$	– diskretni vremenski interval
$\boldsymbol{K}_{(\cdot)}(\cdot)$	– kugla
k	– diskretni vremenski trenutak, konstanta, eksponent, tekući indeks
M	– pozitivno određena matrica
n	– red sistema, dimenzionalnost, tekući indeks
P	– pozitivno određena matrica,
$\mathbf{q}$	– vektor
$S_{()}$	– skup
s	– kompleksno promenljiva, element skupa S
T	– konačan vremenski interval
T	– vreme
U	– skup, univerzalni skup
$\mathbf{u}(t)$	– vektor upravljanja
$V(,)$	– Ljapunovljeva funkcija
$\mathbf{v}$	– vektor
$\mathbf{x}(t)$	– vektor stanja
α	– realan, pozitivan broj.
β	– realan, pozitivan broj
Γ	– posebna osobina
$\Gamma(t)$	– funkcija
γ	– realan pozitivan broj, realan broj
$\gamma(t)$	– funkcija
δ	– realan pozitivan broj
Δ	– konačna razlika
ε	– realan pozitivan broj
$\kappa(t)$	– skalarna funkcija
Λ	– maksimalna sopstvena vrednost matrice
λ	– sopstvena vrednost matrice
$\mathfrak{I}$	– trajektorija
$\Phi(t)$	– fundamentalna matrica

Posebne oznake

[ ]	– zatvoren interval
] [	– otvoren interval
$\wedge$	– i
$\vee$	– ili
$\veebar$	– isključivo ili
$\rightarrow$	– preslikava
$\Rightarrow$	– sledi
$\Leftrightarrow$	– ako i samo ako
$\forall$	– za svako
$\exists$	– postoji
$\exists!$	– postoji barem jedan
$\neg\exists$	– ne postoji
:	– koji ima osobinu
$\ni$	– tako da
$\in$	– pripada
$\notin$	– ne pripada
{ }	– skup, sekvenca, niz
$\cup$	– unija skupa
$\cap$	– presek skupova
$\subset$	– podskup
\	– razlika skupova
Δ	– simetrična razlika
$\sim$	– ekvivalentni skupovi
$\partial(\cdot)$	– granica skupa
$(\cdot)$	– otvoren skup
$\overline{(\cdot)}$	– zatvoren skup
$(\cdot)^c$	– komplement skupa
$\emptyset$	– prazan skup
$\triangleq$	– po definiciji
Δ	– konačna potonja razlika
∇	– posebno značenje, simbol

[1)] Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80.

■	– završetak dokaza
•	– skalarni proizvod vektora
×	– proizvod
$*$	– konvolucija
$\int$	– integral
$\sum$	– suma
$\prod$	– proizvod
$\lvert(\cdot)\rvert$	– apsolutna vrednost
$\lVert(\cdot)\rVert$	– norma
grad	– gradijent
det	– determinanta
exp	– eksponent
inf	– infinum
max	– maksimum
min	– minimum
sup	– supremum

Hronološki pregled postignutih rezultata

PRVI radovi u kojima je započeto razmatranje problema stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu potiču od ruskih autora: *Moiseeva (1948)* [1], *Kamenkova (1953)* [2], *Lebedeva (1954.a, 1954.b)* [3,4] i *Chz–Han–Sy–Ina (1959)* [5]

$$\sum_s x_s^2 \leq \beta \tag{2}$$

Ovde su veličine T, α i β unapred poznate i zadate."

U navedenom radu izvedeni su dovoljni uslovi ove vrste stabilnosti za linearne, nestacionarne i stacionarne autonomne sisteme.

Posmatrajući vremenske odzive linearnih nestacionarnih sistema, *Dorato (1961)* [6] je izveo dovoljne uslove stabilnosti "*na kratkom*" vremenskom intervalu, a iskazani su preko koeficijenata sistema diferencijalnih jednačina. S druge strane, izvedeni su i potrebni i dovoljni uslovi stabilnosti na "kratkom" vremenskom intervalu, iskazani kroz matricu impulsnih odziva razmatranog sistema.

Weiss, Infante (1965, 1967) [7,8] su uopštili Ljapunovljevu metodu, dozvolivši da agregaciona funkcija i njen totalni izvod duž kretanja sistema, budu po znaku neodređene funkcije. Za vremenski neprekidne sisteme, oni su izveli dovoljne uslove različitih oblika praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, razmatrajući sisteme kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu, a na vremenski invarijantnim, skupovima u prostoru stanja.

U radu [9] *Weiss (1967),* daje modifikovanu verziju standardne definicije stabilnosti na konačnom vremenskom

[18], a kroz klasičan pristup metode podešavanja polova. Izloženi rezultati su manje konzervativni u odnosu na prethodne izvedene korišćenjem ljapunovskog prilaza, a posebno su zgodni i jednostavni za praktičnu implementaciju.

Generalizacija svih prethodnih rezultata data je u radu [19], *Heinen, Wu (1971)*, a kroz novi koncept stabilnosti nazvan "set stability". Lako se pokazuje da posebni slučajevi ove vrste stabilnosti odgovaraju ranije iznetim konceptima i, u suštini kao i prethodni, bave se pitanjima granica do kojih dosežu rešenja nelinearnih, nestacionarnih sistema, bilo u slobodnom, bilo u prinudnom radnom režimu unutar zadatih vremenski promenljivih skupova. Nažalost, kao i u nekim prethodnim slučajevima, dobijeni su i potrebni i dovoljni uslovi, ali u razjedinjenim formulacijama, što donekle umanjuje vrednost iznetih rezultata.

Potrebne i dovoljne uslove *kontraktivne stabilnosti* izveo je *Kayande (1971)* [20] za klasu nelinearnih, nestacionarnih sistema.

U radu [31], *Grippo, Lampariello (1976)*, izvedeni su dovoljni uslovi praktične stabilnosti velikih sistema. Ovi uslovi dati su u obliku vektorskih kvazi-Lajpunovljevih funkcija, čije komponente mogu da zavise, u opštem slučaju, od vektora stanja podsistema koji obrazuju osnovni sistem. Isti ti uslovi iskazani su u posebnoj agregacionoj formi, u kojoj granice kretanja igraju ulogu agregacionih promenljivih.

Koristeći koncept vektorske agregacione funkcije, *Grujić (1977.a)* [27] je izložio nove rezultate o praktičnoj stabilnosti velikih sistema. Ovaj prilaz ne zahteva informacije o osobinama stabilnosti izdvojenih podsistema i snižava red agregacione matrice sistema na red jednak broju podsistema.

U radu [32] *Grujić (1977.c)* je sproveo postupak sinteze neinercionog adaptivnog upravljanja na konačnom vremenskom intervalu za nelinearne, nestacionarne objekte automatskog upravljanja. Pokazano je da predloženi postupak ima značajne prednosti, koje se sumarno mogu izraziti u

Pretpostavlja se da su vektorske funkcije $\mathbf{f}(\cdot,(\cdot))$ dovoljno glatke na posmatranom vremenskom intervalu, kako bi se obezbedilo *postojanje*, *jedinstvenost* i *neprekidnost* odgovarajućih rešenja u odnosu na početne uslove. Pri tome, nije neophodno da je $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$ i/ili $\mathbf{f}(t, \mathbf{0}, \mathbf{0}) = \mathbf{0}$, što znači da nulto stanje ne mora da bude ravnotežno stanje razmatranih sistema, sledstveno.

Dinamika razmatranih sistema posmatra se na vremenskom intervalu $J = [t_0, t_0 + T[$, gde veličina T može biti pozitivan realan broj ili simbol $+\infty$, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost, mogu razmatrati jednovremeno. Jasno je da $J \in \mathbb{R}$.

Skupovi od interesa $S_{(\cdot)}$, koji se koriste kao granice do kojih dosežu moguće trajektorije sistema, jesu vremenski nepromenljivi. Štaviše, za njih se pretpostavlja da su povezani i ograničeni, tako da važi:

$$S_\rho = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| < \rho\} \tag{6}$$

odnosno:

$$\bar{S}_\rho = \{\mathbf{x} \in \mathbf{R}^n : \|\mathbf{x}\| \le \rho\} \tag{7}$$

Sa S_α označen je skup svih *početnih stanja* sistema $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, a sa S_β skup svih *dozvoljenih stanja sistema* na razmatranom vremenskom intervalu. S_ε označava skup dopustivih upravljanja.

Definicije stabilnosti

Definicija 1. Sistem dat jed. (3) je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \le \beta$ ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(t)$, koja zadovoljava početni uslov $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$, sledi da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in J$.

Definicija 2. Sistem dat jed. (3) je *nestabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \le \beta$ ako postoji trajektorija $\mathbf{x}(t)$, koja zadovoljava početni uslov $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$ i trenutak $t^* \in J$, tako da je $\|\mathbf{x}(t^*)\| = \beta$.

Definicija 3. Sistem dat jed. (3) je *kvazi-kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha > \beta$ ako za svaku trajektoriju $\mathbf{x}(t)$, koja zadovoljava početni uslov $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$, postoji trenutak $t^* \in J$, tako da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, za $\forall t \in]t^*, t_0 + T[$.

Definicija 4. Sistem dat jed. (3) je *kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$ ako je:

- *i) stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \gamma, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$
- *ii) kvazi-kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$.

Na osnovu iznetih definicija mogu se izvući sledeći zaključci:

a) Granice trajektorija unapred su definisane i određene realnim pozitivnim brojevima α, β, γ.

b) *Definicije 1.* i *2.* su slične definicijama stabilnosti i nestabilnosti u smislu Ljapunova, dok preostale dve podsećaju na definicije osobina privlačenja i asimptotske stabilnosti nultog ravnotežnog stanja. Pri tome treba imati stalno na umu da kod koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, osobine privlačenja i asimptotske stabilnosti nemaju nikakvo značenje, jer se u ovom konceptu ne razmatra stabilnost ravnotežnih stanja već *isključivo* stabilnost sistema, odnosno ograničenost rešenja diferencijalnih jednačina koje opisuju njegovu dinamiku.

c) Domeni stabilnosti u R^n očigledno zavise od izabrane norme.

Definicija 5. Sistem dat jed. (4) je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \le \beta$ ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$, uslovi $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$, i $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)\| \le \varepsilon$ za $\forall t \in J$ i $\forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\beta \setminus S_\alpha\}$ garantuju da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in J$.

Definicija 6. Sistem dat jed. (4) je *kvazi-kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha \le \beta < \gamma$, ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$, uslovi $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$, i $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)\| \le \varepsilon$ za $\forall t \in J$ i $\forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\gamma \setminus S_\alpha\}$ garantuju:

i)stabilnost u odnosu na$\{\alpha, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$
ii)da postoji trenutak $t^* \in J$, tako da je

$\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, za $\forall t \in]t^*, t_0 + T[$.

Definicija 7. Sistem dat jed. (4) je *kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\beta < \alpha \le \gamma$, ako za bilo koju trajektoriju $\mathbf{x}(t)$, uslovi $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$, i $\|\mathbf{u}(\mathbf{x}(t), t)\| \le \varepsilon$ za $\forall t \in J$ i $\forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\gamma \setminus S_\beta\}$ garantuju:

i)stabilnost u odnosu na$\{\alpha, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$
ii)da postoji trenutak $t^* \in J$, tako da je

$\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$, za $\forall t \in]t^*, t_0 + T[$.

Na osnovu iznetih definicija, mogu da se izvuku sledeći zaključci:

a) Opštije definicije mogu da se dobiju ako se kretanje sistema ne posmatra u odnosu na hiperkugle u prostoru stanja, već u odnosu na skupove $S_{(\cdot)}$ koji imaju proizvoljan oblik.

b) Za $\varepsilon = 0$, *Definicija 5.* se svodi na slučaj autonomnog sistema datog jed. (5).

c) Jasno je da osobina stabilnosti sistema na konačnom vremenskom intervalu zavisi od α, β, γ i T. Pri jednom takvom izboru sistem može biti stabilan, a pri drugom ne.

Radi lakšeg praćenja rezultata koji slede, uvode se sledeće oznake:

$$V:\ \mathbf{R}^n \times J \to R \tag{8}$$

$$V_m^\rho(t) = \min_{\|\mathbf{x}\|=\rho} V(t,\mathbf{x}) \tag{9}$$

$$V_M^\rho(t) = \max_{\|\mathbf{x}\|=\rho} V(t,\mathbf{x}) \tag{10}$$

$$\dot{V}(t,\mathbf{x}) = \frac{\partial V(t,\mathbf{x})}{\partial t} + [\mathrm{grad}\ \ V]^T \cdot \mathbf{f}(t,\mathbf{x}) \tag{11}$$

Teoreme o stabilnosti

Teorema 1. Sistem dat jed. (3) je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x}) \in C^1 \times C^0$ i funkcija $\varphi(t)$ integrabilna na vremenskom intervalu J, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i)}\ \dot{V}(t,\mathbf{x}) < \varphi(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\beta \setminus S_\alpha\}, \quad \forall t \in J \tag{12}$$

$$\text{ii)}\ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \le V_m^\beta(t_2) - V_M^\alpha(t_1), \quad \forall (t_1,\ t_2) \in J,\ \ t_1 < t_2 \tag{13}$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}(t)$ prizvoljna trajektorija sistema, datog jed. (3), koja zadovoljava početni uslov, $\|\mathbf{x}(t_0)\| < \alpha$. Pretpostavimo da postoji trenutak $t_2 \in J$, takav da je $\|\mathbf{x}(t_2)\| = \beta$, pri čemu je t_2 prvi takav trenutak. Pretpostavimo, dalje, da postoji trenutak t_1, $t_0 < t_1 < t_2$, takav da je $\|\mathbf{x}(t_1)\| < \alpha$ i $\|\mathbf{x}(t)\| < \alpha$, $\forall t \in]t_1, t_2]$.

Sada se može napisati:

$$V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right) = V\left(t_1,\mathbf{x}(t_1)\right) + \int_{t_1}^{t_2} \dot{V}(t,\mathbf{x}(t))dt \tag{14}$$

Iz uslova i) *Teoreme* i definicije $V_M^\alpha(t_1)$ sledi da je:

$$V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right) < V_M^\alpha(t_1) + \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \tag{15}$$

Imajući u vidu uslov ii) *Teoreme*, dobija se:

$$V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right) < V_M^\beta(t_2) \tag{16}$$

Iz nejed. (16) sledi da je $\|\mathbf{x}(t_2)\| \neq \beta$, što je u suprotnosti s polaznom pretpostavkom da je $\mathbf{x}(t_2) = \beta$. Prema tome, ne postoji trenutak $t_2 \in J$ takav da je $\|\mathbf{x}(t_2)\| = \beta$. Pošto ovaj dokaz ne zavisi od izabranog $\mathbf{x}(t_0)$ i trajektorije koja se posmatra, on obuhvata sve trajektorije koje polaze iz S_α, čime je i *Teorema 1.* dokazana. ∎

Teorema 2. Sistem dat jed. (3) je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \alpha, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x}) \in C^1 \times C^0$ i funkcija $\varphi(t)$ integrabilna na vremenskom intervalu J i realan, pozitivan broj δ, $\delta < \alpha$, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i)}\ \dot{V}(t,\mathbf{x}) < \varphi(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\alpha \setminus S_\delta\}, \quad \forall t \in J \tag{17}$$

$$\text{ii)}\ \int_{t_1}^{t_2} \varphi(t)dt \le V_m^\alpha(t_2) - V_M^\alpha(t_1), \quad \forall (t_1,\ t_2) \in J, \quad t_1 < t_2 \tag{18}$$

$$\text{iii)}\ V(t,\mathbf{x}) \le V_M^\alpha(t), \quad \forall \mathbf{x} \in \{\bar{S}_\alpha \setminus S_\delta\}, \quad \forall t \in J \tag{19}$$

Dokaz prethodne teoreme identičan je dokazu *Teoreme 1.*, pa se stoga ovde izostavlja.

Prethodno izložene teoreme daju očigledno samo dovoljne uslove stabilnosti. Da bi se dobile potpunije ocene o stabilnosti sistema, celishodno je formulisati uslove pod kojima će razmatrani sistem da bude *nestabilan*.

Teorema 3. Sistem dat jed. (3) je *nestabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x}) \in C^1 \times C^0$ i funkcija $\varphi(t)$ integrabilna na vremenskom intervalu J, dva realna pozitivna broja δ i T_1, takva da važi $\delta < \alpha$, $0 < T_1 < T$, i skupovi S_Ω, $S_{v(t)}$, $S_{U(t)}$ definisani na sledeći način:

$$S_\Omega = \bar{S}_\beta \setminus S_\delta \tag{20}$$

$$S_{v(t)} = \left\{\ \mathbf{x}:\ V(t,\mathbf{x}) > V_M^\delta(t)\ \right\}, \quad \forall t \in J \tag{21}$$

$$S_{U(t)} \subset S_\Omega \cap S_{v(t)} \tag{22}$$

$$S_{U(t+T_1)} \cap \partial S_\beta \neq \varnothing \tag{23}$$

$U(t)$ je povezan i neprazan skup, $\varnothing$ je prazan skup, a sa $\partial S_{(\cdot)}$ je označena granica skupa, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\dot{V}(t,\mathbf{x}(t)) > \varphi(t), \quad \forall \mathbf{x} \in S_{U(t)}, \quad \forall t \in J \tag{24}$$

$$\exists \mathbf{x}_0 \in S_{U(t_0)}, \quad \delta < \|\mathbf{x}_0\| < \alpha\ , \quad \ni \tag{25}$$

$$\int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi(t)dt \ge V_M^\beta(t_0+T_1) - V(t_0,\mathbf{x}_0) \tag{26}$$

$$\int_{t_0}^{t_1} \varphi(t)dt \ge V_M^\delta(t_1) - V(t_0,\mathbf{x}_0), \quad \forall t_1 \in [t_0,\ t_0+T_1] \tag{27}$$

$$V(t_0+T_1,\mathbf{x}) \le V_M^\beta(t_0+T_1), \quad \forall \mathbf{x} \in S_{U(t_0+T_1)} \tag{28}$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}(t)$ proizvoljna trajektorija sistema, datog jed. (3), pri čemu $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \in S_{U(t_0)}$. Dalje, očigledno važi:

$$V((t,\mathbf{x}(t))) = V\left(t_0,\mathbf{x}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t} \dot{V}\left(\theta,\mathbf{x}(\theta)\right)\ d\theta \tag{29}$$

Neka je $t_2 \in [t_0,\ t_0 + T_1]$ prvi trenutak, takav da je $V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right) = V_M^\delta(t_2)$. Može se pretpostaviti da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in [t_0,\ t_2]$, pošto u suprotnom nema šta da se dokaže. Na osnovu jed. (29) i prethodne diskusije, može se pisati:

$$\begin{aligned} V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right) &= V\left(t_0,\mathbf{x}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t_2} \dot{V}\left(t,\mathbf{x}(t)\right)dt \\ &> V\left(t_0,\mathbf{x}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t_2} \varphi(t)dt > V_M^\delta(t_2) \end{aligned} \tag{30}$$

Poslednji rezultat je u suprotnosti s polaznom hipotezom što se tiče trenutka t_2. Na osnovu toga, sledi da ne postoji trenutak t_2 onakav kakav je ranije definisan. Prema tome:

$$V\left(t,\mathbf{x}(t)\right) > V_M^\delta(t), \quad \forall t \in [t_0, t_0+T_1] \tag{31}$$

Dalje sledi da, ako je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in [t_0, t_0+T_1]$, onda logično $\mathbf{x}(t) \in S_{U(t)}$ za $\forall t \in [t_0, t_0+T_1]$.

Pretpostavimo sada da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in [t_0, t_0+T_1]$. Onda se može pisati:

$$\begin{aligned} & V\left(t_0+T_1,\mathbf{x}(t_0+T_1)\right) \\ &= V\left(t_0,\mathbf{x}(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t_0+T_1} \dot{V}\left(t_1,\mathbf{x}(t)\right)\ dt \\ &> V\left(t_0,x(t_0)\right) + \int_{t_0}^{t_0+T_1} \varphi(t)dt > V_M^\beta(t_0+T_1) \end{aligned} \tag{32}$$

Ovo je u suprotnosti s trećim uslovom teoreme, što pokazuje da je polazna pretpostavka u dokazu bila pogrešna. Na osnovu ove diskusije, sledi da postoji trenutak t_3, $t_3 \in [t_0,\ t_0 + T_1]$ takav da važi:

$$\|\mathbf{x}(t_3)\| = \beta, \qquad t_3 \in [t_0,\ t_0 + T_1] \tag{33}$$

što je trebalo i dokazati. ∎

Teorema 4. Sistem dat jed. (3) je *kvazi-kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, ako postoji funkcija

$V(t,\mathbf{x})\in C^1\times C^0$, funkcija $\varphi(t)$ integrabilna na vremenskom intervalu J i realan, pozitivan broj δ, $\delta<\beta$, tako da ako je:

$$S_{S(t)}=\left\{\mathbf{x}:\ V(t,\mathbf{x})\le V_S+\sup_{t\ge t_0}\ \sup_{0\le a\le t_0+T}\int_t^a\varphi(\theta)d\theta\right\},\quad t\in J \tag{34}$$

gde je:

$$V_S=\sup_{t\in J}\ \max_{x\in\bar{S}_\alpha\setminus S_\delta}\ V(t,\mathbf{x}) \tag{35}$$

onda:

$$\text{i) } \dot{V}(t,\mathbf{x})<\varphi(t),\quad \forall\mathbf{x}\in S_{S(t)}\setminus S_\delta,\quad \forall t\in J \tag{36}$$

$$\text{ii) } \int_{t_0}^{t_0+T}\varphi(t)dt<V_m^\beta(t_0+T)-V_{S_0} \tag{37}$$

gde je:

$$V_{S_0}=\max_{\mathbf{x}\in\bar{S}_\alpha\setminus S_\delta}\ V(t_0,\mathbf{x}) \tag{38}$$

$$\text{i) } \int_{t_1}^{t_0+T}\varphi(t)dt<V_m^\beta(t_0+T)-V_M^\delta(t_1),\quad \forall t_1\in J \tag{39}$$

$$\text{ii) } \begin{array}{l} V(t_0+T,\mathbf{x})\ge V_m^\beta(t_0+T),\\ \forall\mathbf{x}\in S_{S(t_0+T)}\setminus S_\beta \end{array} \tag{40}$$

Teorema 5. Sistem dat jed. (3) je *kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ t_0,\ T,\ \|(\cdot)\|\}$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x})\in C^1\times C^0$, funkcije $\varphi(t)$ i $\rho(t)$ integrabilne na vremenskom intervalu J i realan, pozitivan broj δ, $\delta<\beta$, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i) } \dot{V}(t,\mathbf{x})<\varphi(t),\quad \forall\mathbf{x}\in\bar{S}_\gamma\setminus S_\alpha,\quad \forall t\in J \tag{41}$$

$$\text{ii) } \dot{V}(t,\mathbf{x})<\rho(t),\quad \forall\mathbf{x}\in S_\gamma\setminus S_\delta,\quad \forall t\in J \tag{42}$$

$$\text{iii) } \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt\le V_m^\alpha(t_2)-V_M^\delta(t_1),\\ \forall(t_1,t_2)\in J,\quad t_1<t_2 \end{array} \tag{43}$$

$$\text{iv) } \int_{t_0}^{t_0+T}\rho(t)dt<V_m^\beta(t_0+T)-V_{M_0} \tag{44}$$

gde je:

$$V_{M_0}=\max_{\mathbf{x}\in\bar{S}_\gamma\setminus S_\delta}\ V(t_0,\mathbf{x}) \tag{45}$$

$$\text{v) } \int_{t_0}^{t_0+T}\rho(t)dt<V_m^\beta(t_0+T)-V_M^\delta(t_1),\quad \forall t_1\in J \tag{46}$$

$$\text{vi) } \begin{array}{l} V(t_0+T,\mathbf{x})\ge V_m^\beta(t_0+T),\\ \forall\mathbf{x}\in S_\gamma\setminus S_\beta \end{array} \tag{47}$$

Dokazi prethodno izloženih teorema se ne razlikuju od prethodnih, pa se zbog svoje obimnosti ovde izostavljaju. Zainteresovani čitalac se upućuje na već pomenutu literaturu, *Weiss, Infante (1965)* [7].

Valja zapaziti da se ni u jednom od prethodno izloženih rezultata *ne zahteva* određenost ili poluodređenost po znaku kako funkcije $V(t,\mathbf{x})$, tako i funkcije $\dot{V}(t,\mathbf{x})$, što predstavlja osobenost u konceptu praktične stabilnosti i jednu od osnovnih razlika u odnosu na ljapunovski koncept stabilnosti.

Nastavak izlaganja biće posvećen identičnim razmatranjima ponašanja dinamičkih sistema u prinudnim radnim režimima, *Weiss, Infante (1967)* [8].

Teorema 6. Sistem dat jed. (5) je *stabilan* u odnosu na $\{\alpha,\ \beta,\ \varepsilon\ \ t_0,\ T,\ \|(\cdot)\|\}$, $\alpha<\beta$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x})\in C^1\times C^0$, funkcije $\varphi(t)$ i $\rho(t)$ integrabilne na vremenskom intervalu J tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i) } \begin{array}{l} \|[\text{grad }V(t,\mathbf{x})]\|\le\rho(t),\\ \forall x\in\bar{S}_\beta\setminus S_\alpha,\quad \forall t\in J \end{array} \tag{48}$$

$$\text{ii) } \dot{V}_f(t,\mathbf{x})<\varphi(t),\quad \forall x\in\bar{S}_\beta\setminus S_\alpha,\quad \forall t\in J \tag{49}$$

gde je:

$$\dot{V}_f=\dot{V}\big|_{\mathbf{u}(t,\mathbf{x})\equiv\mathbf{0}} \tag{50}$$

$$\text{iii) } \begin{array}{l} \int_{t_1}^{t_2}\left(\varphi(t)+\varepsilon\rho(t)\right)\ dt\le V_m^\beta(t_2)-V_M^\alpha(t_1),\\ \forall(t_1,t_2)\in J,\quad t_1<t_2 \end{array} \tag{51}$$

Dokaz. Neka je $\mathbf{x}(t)$ proizvoljna trajektorija sistema, datog jed. (5), koja zadovoljava početni uslov $\|\mathbf{x}(t_0)\|<\alpha$. Pretpostavimo da postoji trenutak $t_2\in J$ takav da je $\|\mathbf{x}(t_2)\|=\beta$. Neka je t_2 prvi takav trenutak. Tada postoji i trenutak t_1, $t_1<t_2\in J$, takav da je $\|\mathbf{x}(t_1)\|=\alpha$.

Na osnovu prethodnog, može da se napiše:

$$\begin{aligned} V\left(t,\mathbf{x}(t)\right)&=V\left(t_1,\mathbf{x}(t_1)\right)+\int_{t_1}^{t}\dot{V}\left(\theta,\mathbf{x}(\theta)\right)\ d\theta\\ &\le V_M^\alpha(t_1)+\int_{t_1}^{t}\dot{V}\left(\theta,\mathbf{x}(\theta)\right)\ d\theta,\quad t\in[t_1,t_2] \end{aligned} \tag{52}$$

Prema tome:

$$\begin{aligned} V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right)\le V_M^\alpha(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\dot{V}_f\left(t,\mathbf{x}(t)\right)\ dt+\\ \int_{t_1}^{t_2}[\text{grad }V]^T\cdot\mathbf{u}(t,\mathbf{x})dt \end{aligned} \tag{53}$$

Koristeći prva dva uslova teoreme, dobija se:

$$\begin{aligned} &V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right)\\ &<V_M^\alpha(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\varphi(t)dt+\varepsilon\cdot\int_{t_1}^{t_2}\|[\text{grad }V]\|\,dt\\ &<V_M^\alpha(t_1)+\int_{t_1}^{t_2}\left(\varphi(t)+\varepsilon\rho(t)\right)\ dt \end{aligned} \tag{54}$$

Korišćenjem trećeg uslova teoreme, dobija se konačno:

$$V\left(t_2,\mathbf{x}(t_2)\right)<V_M^\beta(t_2) \tag{55}$$

na osnovu čega sledi da je $\|\mathbf{x}(t_2)\| \neq \beta$, što je u suprotnosti s polaznom hipotezom. Prema tome, $t_2 \notin J$ i iz toga sledi da je $\|\mathbf{x}(t)\| < \beta$ za $\forall t \in J$. Kako dokaz ne zavisi od izbora $\mathbf{x}(t_0)$ i trajektorije koja se posmatra, on važi za sve trajektorije koje polaze iz S_α, čime je teorema dokazana. ■

Teorema 7. Sistem dat jed. (5) je *kvazi-kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha < \beta < \gamma$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x}) \in C^1 \times C^0$, funkcije $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ integrabilne na vremenskom intervalu J, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i)}\ \|[\text{grad } V(t,\mathbf{x})]\| \leq \rho_1(t),\ \forall \mathbf{x} \in \bar{S}_\gamma \setminus S_\alpha,\ \forall t \in J \tag{56}$$

$$\text{ii)}\ \|[\text{grad } V(t,\mathbf{x})]\| \leq \rho_2(t),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta,\ \forall t \in J \tag{57}$$

$$\text{iii)}\ \dot{V}_f(t,\mathbf{x}) < \varphi_1(t),\ \forall \mathbf{x} \in \bar{S}_\gamma \setminus S_\alpha,\ \forall t \in J \tag{58}$$

$$\text{iv)}\ \dot{V}_f(t,\mathbf{x}) < \varphi_2(t),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta,\ \forall t \in J \tag{59}$$

$$\text{v)}\ \int_{t_1}^{t_2} (\varphi_1(t) + \varepsilon\rho_1(t))dt \leq V_m^\gamma(t_2) - V_M^\alpha(t_1), \quad \forall(t_1, t_2) \in J,\ t_1 < t_2 \tag{60}$$

$$\text{vi)}\ \int_{t_1}^{t_0+T} (\varphi_2(t) + \varepsilon\rho_2(t))dt \leq V_m^\beta(t_0+T) - V_M^\beta(t_1),\ \forall t_1 \in J \tag{61}$$

$$V(t_0+T,\mathbf{x}) \leq V_m^\beta(t_0+T),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta \tag{62}$$

Teorema 8. Sistem dat jed. (5) je *kontraktivno stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, \gamma, \varepsilon, t_0, T, \|(\cdot)\|\}$, $\beta < \alpha < \gamma$, ako postoji funkcija $V(t,\mathbf{x}) \in C^1 \times C^0$, funkcije $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, $\rho_1(t)$, $\rho_2(t)$ integrabilne na vremenskom intervalu J, tako da su zadovoljeni sledeći uslovi:

$$\text{i)}\ \|[\text{grad } V(t,\mathbf{x})]\| \leq \rho_1(t),\ \forall \mathbf{x} \in \bar{S}_\gamma \setminus S_\alpha,\ \forall t \in J \tag{63}$$

$$\text{ii)}\ \|[\text{grad } V(t,\mathbf{x})]\| \leq \rho_2(t),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta,\ \forall t \in J \tag{64}$$

$$\text{iii)}\ \dot{V}_f(t,\mathbf{x}) < \varphi_1(t),\ \forall \mathbf{x} \in \bar{S}_\gamma \setminus S_\alpha,\ \forall t \in J \tag{65}$$

$$\text{iv)}\ \dot{V}_f(t,\mathbf{x}) < \varphi_2(t),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta,\ \forall t \in J. \tag{66}$$

$$\text{v)}\ \int_{t_1}^{t_2} (\varphi_1(t) + \varepsilon\rho_1(t))dt \leq V_m^\gamma(t_2) - V_M^\alpha(t_1), \quad \forall(t_1, t_2) \in J,\ t_1 < t_2 \tag{67}$$

$$\text{vi)}\ \int_{t_0}^{t_0+T} (\varphi_2(t) + \varepsilon\rho_2(t))dt \leq V_m^\beta(t_0+T) - V_{M_0} \tag{68}$$

gde je:

$$V_{M_0} = \max_{\mathbf{x} \in \bar{S}_\alpha \setminus S_\beta} V(t_0, \mathbf{x}) \tag{69}$$

$$\text{vii)}\ \int_{\nu}^{t_0+T} (\varphi_2(t) + \varepsilon\rho_2(t))dt \leq V_m^\beta(t_0+T) - V_M^\beta(\nu), \quad \forall \nu \in J \tag{70}$$

$$\text{viii)}\ V(t_0+T,\mathbf{x}) \geq V_m^\beta(t_0+T),\ \forall \mathbf{x} \in S_\gamma \setminus S_\beta. \tag{71}$$

Dokazi navedenih teorema izostavljeni su iz istih razloga kao i prethodni i mogu se, u celosti, naći u [45] (*Weiss, Infante (1967)*).

Rekapitulacija glavnih rezultata

Opšta klasa nelinearnih, nestacionarnih sistema data je jed. (3 – 6) u prethodnom odeljku. Veliki broj radova bavio se problemom određivanja dovoljnih uslova praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu posebnih klasa sistema, koji neposredno proističu iz konkretizacije funkcija $\mathbf{f}(\cdot)$ u pomenutim jednačinama. Tako se, na primer, mogu oformiti sledeći sistemi, opisani svojim vektorskim diferencijalnim jednačinama stanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) \tag{72}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) \tag{73}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t,\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \tag{74}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) \tag{75}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t,\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + B(t,\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \tag{76}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(\mathbf{x}(t))\mathbf{x}(t) + B(\mathbf{x}(t))\mathbf{u}(t) \tag{77}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t) \tag{78}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{79}$$

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = \mathbf{f}(\mathbf{x}(t)) \tag{80}$$

Sistemi opisani jed. (72 i 73) i jed. (78 i 79) detaljno su analizirani u *Chz-Han-Sy-In (1959)* [5], *Dorato (1961)* [6] i *Angelo (1971)* [34], sledstveno, gde su dati i odgovarajući rezultati iskazani dovoljnim uslovima.

U nastavku se izlažu rezultati autora ovog rada, koji se odnose na klasu sistema, opisanih jed. (80) i koji se, uz određene modifikacije i dopune, mogu proširiti na sisteme opisane jed. (74,75).

Izlaganja koja slede traže blagu preformulaciju *Definicije 1*.

Definicija 8. Sistem, dat jed. (80), *praktično je stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, J, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha < \beta$, ako i samo ako:

$$\|\mathbf{x}_0\|^2 < \alpha \tag{81}$$

povlači:

$$\|\mathbf{x}(t)\|^2 < \beta, \quad \forall t \in J \tag{82}$$

Teorema 9. Sistem, dat jed. (80), *praktično je stabilan* u odnosu na $\{\alpha, \beta, J, \|(\cdot)\|\}$, $\alpha < \beta$, ako postoji realna, simetrična, pozitivno određena matrica $M = M^T > 0$, koja zadovoljava uslov:

$$2\cdot\mathbf{f}^T\left(\mathbf{x}(t)\right)\ \mathbf{x}(t) < \mathbf{x}^T(t)M\mathbf{x}(t),\ \ \forall\mathbf{x}(t)\in S_\beta,\qquad \forall t\in J \tag{83}$$

i ako je ispunjen uslov:

$$e^{\Lambda(M)T} < \beta/\alpha \tag{84}$$

gde je sa $\Lambda(M)$ označena maksimalna sopstvena vrednost matrice M, a $T = t - t_0$ je konačni vremenski interval na kome se ispituje stabilnost sistema.

Dokaz. Dokaz se zasniva na dobro poznatim rezultatima teorije kvadratnih formi i njihovih majorizacija, i u celosti se prepušta zainteresovanom čitaocu, imajući u vidu da se ni u čemu metodološki ne razlikuju od prethodnih. ■

[9] WEISS,L. "Converse Theorems for Finite Time Stability", *Proc 1st Asilomar Conf. on Circ. and Syst.* (1967), pp.1006–1014, also *SIAM J. Appl Math*, **16** (6) (1968), pp.1319–1324.

[10] GUNDERSON,R. "On Stability over a Finite Interval", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-12** (5) (1967), pp.634–635.

[11] KAYANDE,A.A., WONG,J.S. "Finite Time Stability and Comparison Principles", *Proc. Cambridge Phil. Soc.*, (64) (1968), pp.749–756.

[12] HEINEN,J.A., WU,S.H. "Further Results Concerning Finite Time Sta-bility", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-14** (2) (1969), pp.211–212.

[13] WEISS,L. "On Uniform and Uniform Finite Time Stability", *IEEE Trans. Automat. Cont.*, **AC-14** (3) (1969), pp.313–314.

[14] MICHEL,A.N. "On the Bounds of the Trajectories of Differential Systems", *Int. J. Control*, **10** (5) (1969), pp.593–600.

[15] MICHEL,A.N. "Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems", *Int. J. Control*, **11** (4) (1970 a), pp.703–715

[39] GRUJIĆ,LJ.T. "Novel Development of Lyapunov Stability of Moti-

[44] PERRUQUETTI,W., RICHARD,J.P., GRUJIĆ,LJ.T. "On Practical