

Vremensko-frekvencijske transformacije i njihova primena u digitalnoj obradi signala

Slobodan Simić, dipl.inž.¹⁾
Dr Bojan Zrnić, dipl.inž.¹⁾

Rad daje analizu nestacionarnih signala i procesa na bazi vremensko-frekvencijski zavisnih transformacija. Težište je stavljeno na Vignerovu distribuciju, njene izravne verzije po vremenu i po frekvenciji i kratkotrajnu Furijeovu transformaciju. Prikazan je uporedni pregled navedenih distribucija po pitanju rezolucije, interferencije, potiskivanja bo nih snopova i ostalih osobina.

Ključne reči: vremensko-frekvencijske distribucije, Vignerova distribucija, pseudo-Vignerova distribucija, kratkotrajna Furijeova transformacija, rezolucija, interferencija, prozorske funkcije.

Uvod

ANALIZU signala je moguće sprovesti u vremenskom i/ili frekvencijskom domenu. Ova dva domena moguće je povezati Furijeovom transformacijom (FT). Spektar signala $X(f)$ prikazuje ukupnu snagu s kojom je frekvencija f zastupljena u signalu $x(t)$, ali generalno ne obezbeđuje informaciju o vremenskoj lokalizaciji spektralnih komponenata.

U praksi je široko rasprostranjena klasa nestacionarnih signala, čija se spektralna snaga menja s vremenom. Tipični predstavnici su govorni signali, biomedicinski, seizmički signali itd. Osnovu modernih sistema koji koriste tehniku proširenog spektra, čine takođe nestacionarni signali. Za pouzdaniju analizu takvih signala i sistema neophodno je poznavati i vremenske trenutke pojavljivanja pojedinih komponenata. Kako je FT ograničena na usku klasu signala, kad je u pitanju vremensko-frekvencijska slika spektra, kao moguće rešenje nameću se vremensko-frekvencijske transformacije (VFT), koje opisuju signal pomoću površina u vremensko-frekvencijskoj ravni.

Cilj transformacije je da se dobije idealna vremensko-frekvencijska reprezentacija [1]. Naime, u praksi su prisutne brojne transformacije čija primenljivost zavisi od konkretnog problema i ne postoji transformacija koja bi se mogla primeniti u opštem slučaju. VFT koje se najčešće koriste mogu se aproksimativno svrstati u dve grupe: linearne i kvadratne.

Linearne vremensko-frekvencijske transformacije

Linearne VFT karakteriše svojstvo linearnosti, tj. transformacija linearne kombinacije signala je linearna kombinacija transformacije svakog signala ponaosob:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow T_x(t, f) = c_1 T_{x_1}(t, f) + c_2 T_{x_2}(t, f) \quad (1)$$

gde je $x(t)$ kompleksan signal sastavljen od komponenata $x_1(t)$ i $x_2(t)$, pomnoženih konstantama (generalno kompleksnim) c_1 i c_2 . Sa $T_x(t, f)$ je označena VFT signala $x(t)$. Analogija se može izvesti u slučaju N – komponentnog signala.

Linearnost je poželjna osobina prilikom analize multikomponentnih signala. Najznačajniji predstavnici linearnih VFT su: kratkotrajna Furijeova transformacija (STFT – *Short Time Fourier Transform*) i vejvlet transformacija (WT – *Wavelet Transform*).

STFT je definisana izrazom

$$w(t) = \int_{-\infty}^{\infty} x(\tau) w(\tau - t) e^{-j2\pi f(\tau - t)} d\tau$$

na kojoj je da čuva vremenski i frekvencijski pomeraj. Nedostatak STFT je nemogućnost nezavisnog podešavanja vremenske i frekvencijske rezolucije. Naime, za signale čije se spektralne karakteristike brzo menjaju potrebno je koristiti prozorske funkcije kratkog trajanja. S druge strane, kraće trajanje funkcije u vremenskom domenu uzrokuje širenje njenog spektra u frekvencijskom domenu, odnosno dolazi do pogoršanja frekvencijske rezolucije.

Kvadratne vremensko-frekvencijske transformacije

Poželjno je da VFT bude vremenska raspodela (distribucija) frekvencije. Zbog toga se kvadratne VFT u literaturi najčešće nazivaju distribucijama (VFD). Naziv

¹⁾ Vojnotehnička akademija VJ, 11000 Beograd, Ratka Resanovića 1

potiče iz teorije verovatnoće, mada postoji suštinska razlika (kvadratne VFT npr., mogu biti negativne).

VFT treba da predstavlja vremensku distribuciju frekvencije, ali istovremeno i raspodelu kašnjenja pojedinih frekvencijskih komponenata. U skladu s tim, srednja vrednost VFT po frekvenciji, u određenom vremenskom trenutku, treba da bude proporcionalna trenutnoj frekvenciji, a srednja vrednost VFT po vremenu, na određenoj frekvenciji, treba da je proporcionalna grupnom kašnjenju date komponente. Ove poželjne osobine mogu da se iskažu sledećim izrazima:

$$\frac{\int f T_x(t, f) df}{\int T_x(t, f) df} = f_x(t) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{dt} \arg \{x(t)\} \quad (3)$$

$$\frac{\int t T_x(t, f) dt}{\int T_x(t, f) dt} = t_x(f) = \frac{1}{2\pi} \frac{d}{df} \arg \{X(f)\} \quad (4)$$

gde su: $x(t)$ kompleksni signal, $X(f)$ njegov spektar, $f_x(t)$ trenutna frekvencija, a $t_x(f)$ grupno kašnjenje frekvencijske komponente f signala $x(t)$. $\int f T_x(t, f) df$ predstavlja srednju vrednost po frekvenciji, a $\int t T_x(t, f) dt$ srednju vrednost po vremenu VFT signala $x(t)$, označenu sa $T_x(t, f)$. Sledeća poželjna osobina VFT jeste da integrali distribucije po frekvenciji, odnosno vremenu, budu jednaki trenutnoj snazi, odnosno spektralnoj gustini energije:

$$\int_f T_x(t, f) df = p_x(t) = |x(t)|^2 \quad (5)$$

$$\int_t T_x(t, f) dt = P_x(f) = |X(f)|^2 \quad (6)$$

gde je $p_x(t)$ trenutna snaga, a $P_x(f)$ spektralna gustina energije signala $x(t)$. Direktna posledica relacija (5 i 6) jeste da se integracijom distribucije po čitavoj vremensko-frek-vencijskoj ravni dobija ukupna energija signala:

$$\int_t \int_f T_x(t, f) dt df = E_x \quad (7)$$

E_x je ukupna energija signala, tako da se distribucije koje zadovoljavaju *granična svojstva* (relacije (5 i 6)) nazivaju *energetske VFD*. Vidi se da one teže da predstavljaju gustinu energije signala u odnosu na frekvenciju i vreme istovremeno.

Pored energetske postoje još i *korelacione VFD*. Poznato je da energetske distribucije kombinuju koncepte trenutne snage (funkcija vremena) i spektralne gustine energije (funkcija frekvencije). Kod korelacionih su to vremenska korelacija i spektralna korelacija. One zadovoljavaju *korelaciona granična svojstva*:

$$T_x(\tau, 0) = r_x(\tau) = \int_t x(t+\tau)x^*(t) dt \quad (8)$$

$$T_x(0, \nu) = R_x(\nu) = \int_f X(f+\nu)X^*(f) df \quad (9)$$

gde su: $r_x(\tau)$ vremenska korelacija, a $R_x(\nu)$ spektralna korelacija signala $x(t)$. Promenljiva τ predstavlja vremenski pomeraj, a promenljiva ν frekvencijski pomeraj.

Tipičan predstavnik energetske distribucije je Vignerova distribucija, dok se spektrogram (SPEC – *spec-trogram*), definisan kao kvadrat amplitude STFT, sa izvesnom tolerancijom može tretirati kao energetska distribucija, jer generalno ne zadovoljava granična svojstva.

Najznačajnija korelaciona distribucija jeste funkcija neodređenosti (AF – *Ambiguity Function*), koja je našla široku primenu u radarskoj tehnici.

Kvadratne VFT zadovoljavaju kvadratni princip superpozicije:

$$x(t) = c_1 x_1(t) + c_2 x_2(t) \Rightarrow T_x(t, f) = |c_1|^2 T_{x_1}(t, f) + |c_2|^2 T_{x_2}(t, f) + c_1 c_2^* T_{x_1, x_2}(t, f) + c_2 c_1^* T_{x_2, x_1}(t, f) \quad (10)$$

Oznake su iste kao u izrazu (1), a “*” označava kompleksnu konjugaciju. Distribucija ovakvog signala se sastoji iz četiri člana: prva dva člana predstavljaju auto-distribucije pojedinih komponenti signala $x(t)$; treći i četvrti član su kros-distribucije dva signala – komponente. $T_{x_2, x_1}(t, f)$ je, dakle, kros-distribucija signala $x_2(t)$ i $x_1(t)$. Generalizacijom ovog principa superpozicije na N -komponentni signal, dobija se sledeće:

– svakoj komponenti signala odgovara jedna auto-komponenta.

– svakom paru komponenti odgovara kros-komponenta.

Iz navedenog se vidi da N – komponentni signal proizvodi N auto-komponenta i $\binom{N}{2}$ kros-komponenta,

koje predstavljaju interferenciju. Njihov broj raste s kvadratom broja komponenta signala i o tome treba voditi računa.

Spektrogram poseduje interferenciju samo u delu vremensko-frek-vencijske ravni, u kome se auto-komponente preklapaju, tako da se može smatrati da zadovoljava linearni princip superpozicije. Međutim, ovu dobru osobinu zasenjuje ozbiljan nedostatak, a to je loša vremensko-frek-vencijska koncentracija, a samim tim i loša rezolucija.

S druge strane, kvadratne VFT izgubile su potrebnu osobinu linearnosti – imaju izraženu interferenciju, ali se češće koriste zbog znatno bolje vremensko-frek-vencijske koncentracije.

Vignerova distribucija i funkcija neodređenosti

Vignerova distribucija (WD – *Wigner Distribution*) je jedna od najvažnijih VFT. Definiše se na sledeći način:

$$WD_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi f\tau} d\tau = \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) e^{-j2\pi f\nu} d\nu \quad (11)$$

Vignerova distribucija je uvek realna. Ona kao i STFT čuva vremenski i frekvencijski pomeraj. Signal i njegova FT se iz WD dobijaju na sledeći način:

$$\int_f WD_x\left(\frac{t}{2}, f\right) e^{2j\pi f} df = x(t)x^*(0) \quad (12)$$

$$\int_t WD_x\left(t, \frac{f}{2}\right) e^{-2j\pi f} dt = X(f)X^*(0) \quad (13)$$

Znatno bolju rezoluciju ima WD u odnosu na STFT. Pokazuje se da WD predstavlja gornji granični slučaj po pitanju rezolucije linearnih i kvadratnih VFT. Međutim, visoka rezolucija je plaćena izraženom interferencijom koja je osnovni nedostatak. Zbog toga se primenjuju razne vrste "ravnjanja" WD primenom prozorskih funkcija, čime se uspostavlja kompromis između dobre rezolucije (WD) i male interferencije (SPEC).

Ulogu koju kod energetske distribucije ima WD, kod korelacionih ima funkcija neodređenosti, AF:

$$\begin{aligned} AF_x(\tau, \nu) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x\left(t + \frac{\tau}{2}\right) x^*\left(t - \frac{\tau}{2}\right) e^{-j2\pi\nu t} dt = \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} X\left(f + \frac{\nu}{2}\right) X^*\left(f - \frac{\nu}{2}\right) e^{-j2\pi f \tau} df \end{aligned} \quad (14)$$

WD i AF su *dualne* funkcije u smislu da predstavljaju Furijev transformacioni par. U ovom slučaju radi se o dvodimenzionalnoj Furijevoj transformaciji:

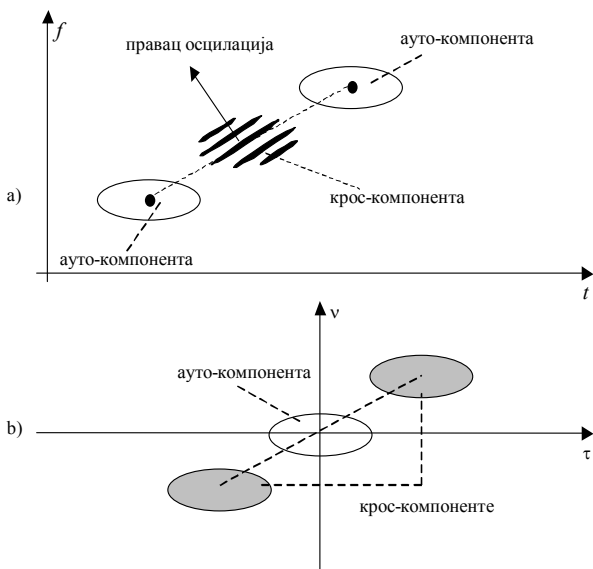
$$AF_x(\tau, \nu) = \iint_{-\infty}^{+\infty} WD_x(t, f) e^{-j2\pi(\nu t - \tau f)} dt df \quad (15)$$

Dualnost se odražava i na matematička svojstva AF. Dualnost može da se posmatra kao združena vremensko – frekvencijska korelaciona funkcija koja zadovoljava korelaciona granična svojstva (8 i 9), i u stvari predstavlja korelacione funkcije po vremenu i frekvenciji, pojedinačno.

Generalno, svakoj energetske distribucije invarijantnoj na pomeraj, može se pridružiti njoj dualna korelaciona distribucija [1].

Ravnjanje Vignerove distribucije

Pokazuje se da su kros-komponente WD, koje čine interferenciju, oscilatorne strukture. Ovo znači da su one u korelacionom domenu izmeštene u oblast viših učestanosti, znači mogu se potisnuti niskofrekvencijskim filtriranjem, u literaturi popularno nazvanim "ravnjanje" [2]. Ovo je ilustrativno prikazano na sl.1.



Slika 1. Geometrijska interferencija a) WD, b) AF

Filtriranje koje bi oslabilo interferenciju je dvodimenzionalno (vidi sl.1). Nameću se dva načina realizacije:

- u energetske domenu (sl.1a), dvodimenzionalnom konvolucijom s energetske predstavom gore navedenog jezgra.
 - u korelacionom domenu (sl.1b), množenjem AF jezgrom koncentrisanim oko koordinatnog početka;
- Ovo može da se napiše na sledeći način:

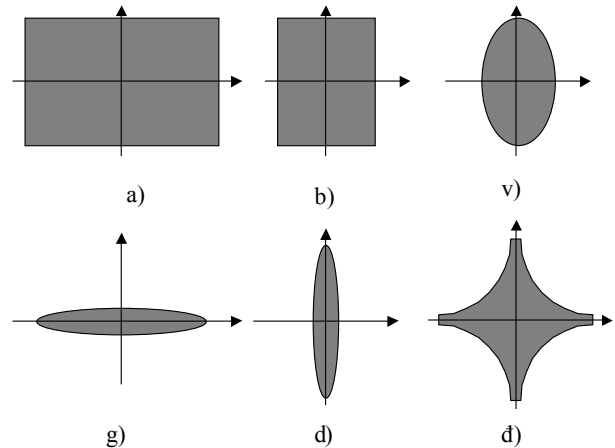
$$T_{dual,x}(\tau, \nu) = \Psi(\tau, \nu) AF_x(\tau, \nu) \quad (16)$$

$$T_x(t, f) = \iint_{-\infty}^{+\infty} \Psi(t-t', f-f') WD_x(t', f') dt' df' \quad (17)$$

pri čemu je sa $T_{dual,x}(\tau, \nu)$ označena korelaciona VFT, dualna energetske $T_x(t, f)$. $\Psi(\tau, \nu)$ predstavlja dvodimenzionalno jezgro (niskofrekvencijski filter) u korelacionom domenu, a $\psi(t, f)$ predstavlja to jezgro u energetske domenu, odnosno vremensko-frekvencijsku, dvodimenzionalnu prozorsku funkciju. $\Psi(\tau, \nu)$ je dvodimenzionalna FT $\psi(t, f)$.

Na sl.2 su prikazana neka karakteristična jezgra $\Psi(\tau, \nu)$.

Dualnost važi za distribucije invarijantne na vremenski i frekvencijski pomeraj što se može opisati sledećom



Slika 2. Izbori jezgra za različite tipove ravnjanja WD: a) WD, b) pseudo WD, v) izravnata pseudo WD, g) spektrogram sa dugim vremenskim prozorom, d) spektrogram sa kratkim vremenskim prozorom, d) Čoi – Viliamsova distribucija

relacijom:

$$x_m(t) = x(t-t_0) e^{j2\pi f_0 t} \Rightarrow T_{x_m}(t, f) = T_x(t-t_0, f-f_0) \quad (18)$$

Znači, ukoliko signal transliramo po vremenskoj osi i frekvencijskoj osi, njegova VFT se dobija translacijom VFT originalnog signala u vremensko-frekvencijskoj ravni za iznos pomaka (po vremenskoj osi t_0 , a po frekvencijskoj osi f_0). Sve energetske VFT sa ovom osobinom pripadaju tzv. Koenovoj klasi (*Cohen class*) koja se u literaturi označava sa C_E . Pokazuje se da distribucija pripada C_E ako, i samo ako može biti izvedena iz WD pomoću vremensko–frekvencijske konvolucije (17) [2].

Koenovoj klasi može se definisati dualna, korelaciona

klasa. Nju čine sve korelacione distribucije dualne energetskim distribucijama, članovima C_E . Ova klasa označava se sa C_C , a da bi neka distribucija bila član ove klase, mora da zadovolji uslov (16).

Primenjujući relaciju (17), dakle dobija se izravnata WD invarijantna na vremenski i na frekvencijski pomeraj. Međutim, ovo ravnjanje može da se izvrši i na drugi način. Ono može čuvati, npr., pomeraj u vremenu i vremensko skaliranje (19), što je veoma bitno prilikom detekcije i estimacije signala nepoznate veličine. U tom slučaju radi se o tzv. *afinom* ravnjanju (*Affine smoothing*):

$$x_m(t) = \sqrt{|a|}x(a(t-t_0)) \Rightarrow T_{x_m}(t, f) = T_x(a(t-t_0), \frac{f}{a}) \quad (19)$$

a je konstanta, a t_0 pomeraj po vremenskoj osi. Afino ravnjanje se realizuje *afinom* transformacijom:

$$T_x(t, f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \int_{-\infty}^{+\infty} \chi(f(t-t'), \frac{f'}{f}) WD_x(t', f') dt' df' \quad (20)$$

gde je $\chi(\alpha, \beta)$ *afino* jezgro, koje je funkcija bezdimenzionalnih parametara. Sve distribucije koje se dobiju na ovaj način, tj. zadovoljavaju uslov (19), čine tzv. *afinu klasu* energetskih distribucija A_E . Jasno je da u ovom slučaju, generalno, nije jednostavno izvršiti ravnjanje u korelacionom domenu. To sada ne bi bilo prosto množenje, kao u (16). Zbog toga nije moguće definisati korelacionu klasu dualnu A_E .

Postoje i mnoge druge vrste ravnjanja i svako od njih ima svoj naziv, a kada se kaže samo *ravnjanje WD*, onda se misli na ravnjanje invarijantno na pomeraj, definisano relacijom (17). Treba napomenuti da WD pripada obema navedenim klasama, C_E i A_E , dok AF pripada skupu C_C . U daljem radu biće reči isključivo o distribuciji članica C_E .

U specijalnom slučaju ravnjanja WD, kada je $\psi(t, f)$ nezavisna od frekvencije (klasična prozorska funkcija: Hanning, Kaiser,...) dobija se WD izravnata po vremenu, u literaturi poznata kao *pseudo WD* (PWD), ili *modifikovana WD* (MWD). Distribucija dobijena prilikom ravnjanja i po vremenu i po frekvenciji (opšti slučaj, gde je $\psi(t, f)$ funkcija i vremena i frekvencije) naziva se *izravnata pseudo WD* (SPWD – *Smoothed Pseudo Wigner Distribution*).

Pored korisnih efekata koji se postižu ravnjanjem, ono ima i određene nedostatke. Naime, slabljenje interferencije dovodi do gubitka u vremenskoj koncentraciji, tj. do izvesnog širenja auto-komponenta. U dualnom korelacionom domenu se jasno vidi (sl.3) kako ravnajuća funkcija $\Psi(\tau, \nu)$ na određeni način ograničava AF auto-

komponente, a sužavanje u frekvencijskom domenu ima za posledicu širenje u vremenskom domenu. Ograničavanjem auto-komponenta gubi se deo informacija o vremensko-frekvencijskoj lokalizaciji. Pored širenja, ravnjanje može dovesti i do gubitka određenih poželjnih matematičkih osobina (obično se narušavaju granična svojstva, ali ni ostala nisu pošteđena).

Zbog toga se i razvijaju i druge izravnate WD koje na sofisticiraniji način teže slabljenju interferencije, dok s druge strane čuvaju koncentraciju auto-komponenta i/ili poželjne matematičke osobine. Takve su na primer distribucija s koničnim jezgrom, generalizovana eksponencijalna distribucija, Batervortova distribucija,...[1].

Diskretna forma Wignerove distribucije

Diskretizacija WD je problem detaljno analiziran u teoriji. Classen i Mecklenbräker su prvi predložili formu WD za slučaj diskretnog vremena [4]. Međutim, ovako definisanu diskretnu WD karakterisao je *aliasing* ("preklapanje spektra" i nemogućnost rekonstrukcije kontinualne verzije). Peyrin i Prost predlažu novu formulu za diskretnu WD interpolirajuću distribuciju Classena i Mecklenbräkera [5]. Formula podrazumeva dvostruko veću učestanost odabiranja signala, ali zato ovako dobijena distribucija zadržava većinu poželjnih osobina kojima se odlikuje kontinualna WD. Nuttall zaobilazi problem *aliasinga* koristeći tehniku interpolacije signala, duplirajući brzinu odabiranja pomoću diskretne FT (DFT), tj. na "veštački" način [6]. Ovim stvarna učestanost odabiranja signala ostaje nepromenjena, ali ovako dobijena distribucija gubi mnoge poželjne osobine kontinualne WD. U [8 i 9] predložene su nove definicije diskretne WD. Međutim, one imaju nedostataka koji se razmatraju u [10]. Suštinski različita od ovih, izvedenih iz kontinualne WD, jeste definicija koju su predložili O'Neill i Williams [11]. U [7] je predložen interesantan metod diskretizacije WD periodičnih signala korišćenjem teorije grupa.

U svakom slučaju, svaki od ovih načina diskretizacije je najpogodniji za neku klasu signala, dok je za ostale manje dobar. Najopštiji je ipak metod koji su predložili Peyrin i Prost. U ovom slučaju veza između diskretne i kontinualne WD je jasna i nedvosmislena [4]. Diskretna WD, po vremenu i po frekvenciji se ovde, primenom teoreme o odabiranju i Poasonove sumacione formule na kontinualnu WD, definiše u vremenskom domenu na sledeći način [5]:

$$DWD_x(n, m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} x_k x_{n-k}^* e^{-j\frac{\pi}{N}m(2k-n)} \quad (21)$$

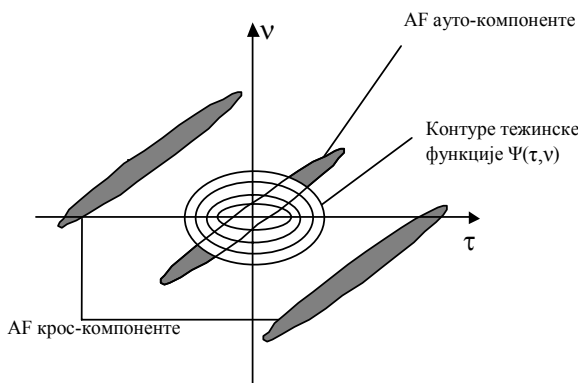
U spektralnom domenu dobija se ekvivalentna relacija u sledećem obliku:

$$DWD_x(n, m) = \frac{1}{2N} \sum_{k=0}^{N-1} X_k X_{m-k}^* e^{j\frac{\pi}{N}n(2k-m)} \quad (22)$$

$$n = 0, 1, \dots, 2N-1, \quad m = 0, 1, \dots, 2N-1$$

gde $x_0, x_1, \dots, x_k, \dots, x_{N-1}$ predstavlja vremenske odbirke signala, a $X_0, X_1, \dots, X_k, \dots, X_{N-1}$, njegovu DFT. N je broj odbiraka signala – dužina sekvence, a T je period odabiranja. Frekvencijski korak DFT iznosi $\Delta f = \frac{1}{NT}$.

Ovako dobijena distribucija sekvence dužine N je



Slika 3. Dejstvo operacije ravnjanja u korelacionom domenu

dimenzija $2N \times 2N$, a kako u vremensko-frekvencijskoj ravni zauzima samo onaj deo u kojem je smešten signal ($0 \leq t \leq NT, 0 \leq f \leq \frac{1}{T}$), to će ona imati rezoluciju po vremenu $\Delta t = \frac{T}{2}$, a po frekvenciji $\Delta f = \frac{1}{2NT}$ – znači duplo bolju nego DFT. Iz relacije (21) ili (22) može da se pokaže da vredi:

$$DWD_x(n+N, m+N) = (-1)^{m+n} DWD_x(n, m) \quad (23)$$

To znači da je dovoljno naći $DWD_x(n, m)$ za $0 \leq n \leq N-1, 0 \leq m \leq N-1$, koja je dimenzija $N \times N$, a ostale vrednosti mogu se dobiti korišćenjem relacije (23). Ovo omogućuje razna pojednostavljenja o kojima će kasnije biti reči.

Neželjena pojava koja prati ovu distribuciju jeste preklapanje spektra (*aliasing*). Naime, pokazuje se da nije dovoljno izabrati Nikvistovu učestanost uzorkovanja, jer da bi se dobila DWD bez preklapanja spektra, signal treba uzorkovati učestanošću dva puta većom od Nikvistove, ili pak koristiti analitički signal (čiji je spektar identičan nuli u negativnom području frekvencijske ose), što je u skladu sa opštim uslovima (24) i (25).

Generalan način da se izbegne preklapanje spektra jeste da originalna, kontinualna verzija WD zadovoljava sledeće uslove [5]:

$$WD_x(t, f) = 0, f \notin \left[0, \frac{1}{2T}\right] \quad (24)$$

$$WD_x(t, f) = 0, t \notin \left[0, \frac{NT}{2}\right] \quad (25)$$

Mada uslovi (24) i (25) teorijski ne mogu biti zadovoljeni istovremeno, u praksi ih je dovoljno aproksimativno ispuniti.

Diskretna WD definisana na ovaj način zadržava veliki broj osobina kontinualne WD. Najvažnije od njih su granična svojstva i reverzibilnost:

$$\sum_{m=0}^{2N-1} DWD_x(n, m) = \begin{cases} |x_{n/2}|^2, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases} \quad (26)$$

$$\sum_{n=0}^{2N-1} DWD_x(n, m) = \begin{cases} |X_{m/2}|^2, & m = 2k \\ 0, & m = 2k+1 \end{cases} \quad (27)$$

$$\sum_{m=0}^{2N-1} DWD_x(n, m) e^{j\frac{\pi}{N}nm} = \begin{cases} x_n x_0^* & n = 0, 1, \dots, N-1 \\ x_{n-N} x_0^* & n = N, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (28)$$

$$\sum_{n=0}^{2N-1} DWD_x(n, m) e^{-j\frac{\pi}{N}nm} = \begin{cases} X_m X_0^* & m = 0, 1, \dots, N-1 \\ X_{m-N} X_0^* & m = N, \dots, 2N-1 \end{cases} \quad (29)$$

Vidimo da su te osobine sadržane u parnim odbircima DWD, što daje ideju za pojednostavljenom definicijom DWD (SDWD - *Simplified Discrete WD*). Ovo pojednostavljenje se može izvesti na više načina [12].

U teoriji se najčešće koristi verzija koja sadrži pomenute parne komponente po vremenskoj osi:

$$SDWD_x(p, m) = DWD_x(2p, m) \quad (30)$$

Dimenzije ove distribucije su $N \times 2N$. Međutim, uvrstimo li u (23) $n = 2k$, dobija se da je ovako definisana distribucija periodična po frekvencijskoj osi sa periodom N , tako da je dovoljno posmatrati prvu polovinu, za $m = 0, 1, \dots, N-1$. U skladu s tim, dobija se distribucija u obliku matrice dimenzije $N \times N$. Ova pojednostavljena verzija zadržala je najznačajnije osobine generalne DWD, s tim što za dobijanje $|X_m|^2$ treba sabrati prvih $N/2$ komponenta, a ne sve parne, kao u (27).

Slično se mogu dobiti ostale pojednostavljene verzije i proučiti njihove osobine. U tabeli 1 dat je njihov pregled sa nekim najvažnijim karakteristikama. Prva kolona označava način pojednostavljenja, a druga dimenziju distribucije (uzima se samo osnovni period). Treća i četvrta kolona pokazuju koliko članova distribucije treba sabrati da bi se dobila trenutna snaga, odnosno spektralna gustina energije. Oznaka *NS* u ovim kolonama znači da informacija o pomenutim veličinama nije sadržana u dotičnoj distribuciji, odnosno, ovakvim pojednostavljenjem gubi se ta poželjna osobina. Vidi se da od navedenih prva, druga i sedma verzija čuvaju obe važne karakteristike.

Tabela 1. Pregled pojednostavljenih verzija DWD s najvažnijim osobinama

SDWD	periodičnost	$ x_n ^2$	$ X_m ^2$
DWD(2p,m)	$N \times N$	sve	prvih $N/2$
DWD(2p,2q)	$N/2 \times N/2$	prvih $N/2$	prvih $N/2$
DWD(2p,2q+1)	$N \times N/2$	sve	<i>HC</i>
DWD(2p+1,m)	$N \times 2N$	<i>HC</i>	sve
DWD(2p+1,2q)	$N/2 \times N$	<i>HC</i>	sve
DWD(2p+1,2q+1)	$N \times N$	<i>HC</i>	<i>HC</i>
DWD(n,2q)	$N \times N$	prvih $N/2$	sve
DWD(n,2q+1)	$2N \times N$	prvih $N/2$	<i>HC</i>

Najčešće se koristi prvi način pojednostavljenja. U većini kasnijih radova se diskretna WD i definiše na ovaj način. Smenom $n = 2p$, i $k = p+i$, u relaciju (21) dobija se:

$$DWD_x(p, m) = \frac{1}{2N} \sum_{i=-N+1}^N x_{p+i} x_{p-i}^* e^{-j\frac{2\pi}{N}mi} \quad (31)$$

Diskretna WD podrazumeva distribuciju definisanu relacijom (31).

Diskretna STFT, PWD, SPWD

Analogno definiciji diskretne WD, može da se definiše diskretna STFT:

$$DSTFT_x^w(n, m) = \frac{1}{N} \sum_{k=-N/2+1}^{N/2} w_k x_{n+k} e^{-j\frac{2\pi}{N}mi} \quad (32)$$

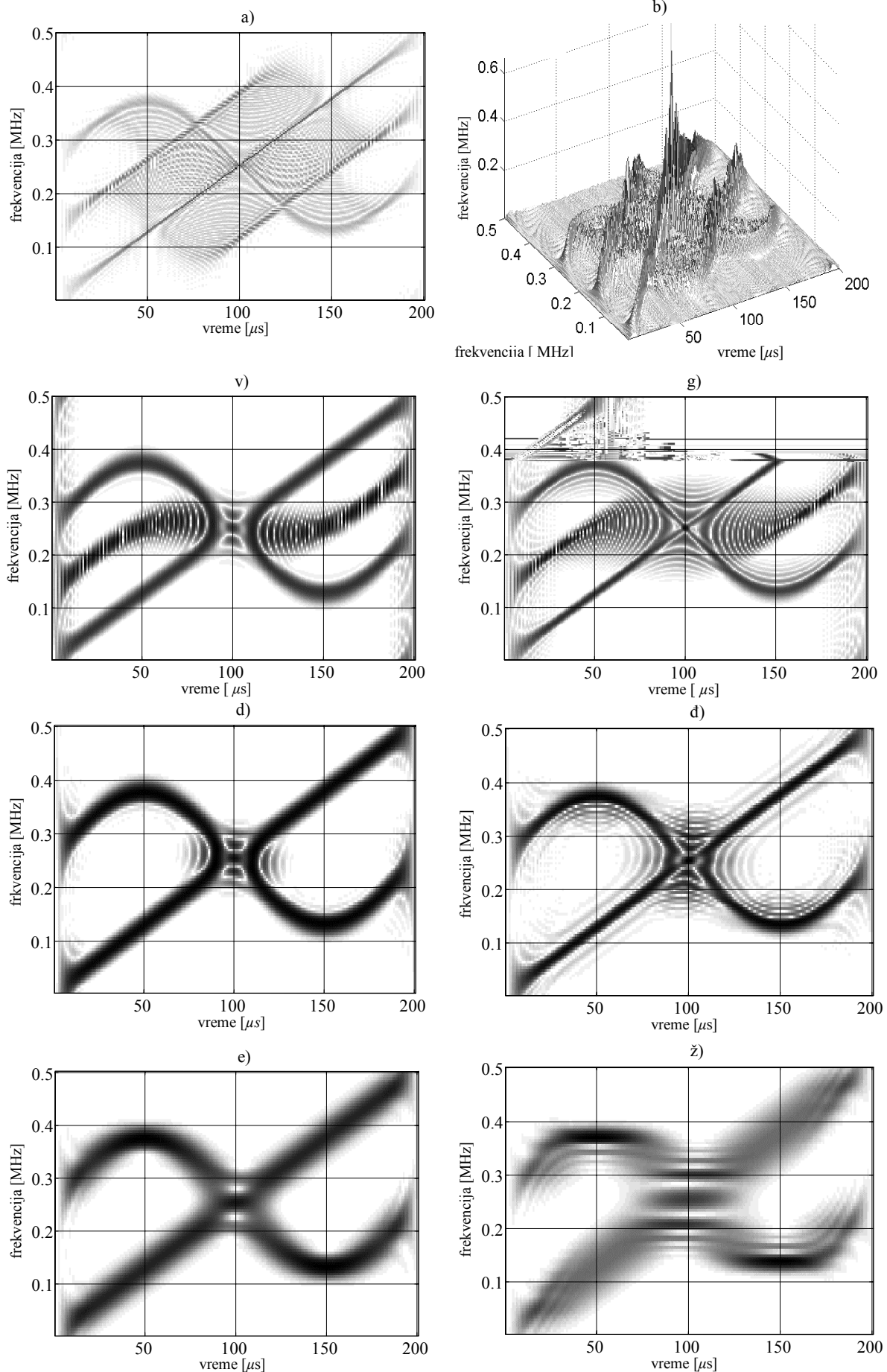
gde su w_k odbirci prozorske funkcije u vremenskom domenu.

Diskretna PWD se definiše na sledeći način:

$$DPWD_x(n, m) = \frac{1}{2N} \sum_{i=-N+1}^N w_i w_{-i}^* x_{n+i} x_{n-i}^* e^{-j\frac{\pi}{N}2mi} \quad (33)$$

Dvodimenzionalno diskretno jezgro, kojim se vrši

ravnanje, je u stvari prozorska funkcija u vremenskom domenu, replicirana na svaku od diskretnih učestanosti, a w_k su odbirci te prozorske funkcije.



Slika 4. Poređenje DWD, DPWD, DSPWD i SPEC

Kombinujući jednačine (32) i (33), diskretna PWD može da se dobije i na drugi način, u spektralnom domenu:

$$\begin{aligned} DPWD_x^w(n, m) &= \\ &= N \sum_{i=-N+1}^N DSTFT_x^w(n, m+i) DSTFT_x^{w*}(n, m-i) \end{aligned} \quad (34)$$

Ova relacija je bitna za razumevanje diskretne SPWD, koja podrazumeva ravnanje i po vremenu i po frekvenciji, što se ostvaruje na sledeći način:

$$\begin{aligned} DSPWD_x^w(n, m) &= \\ &= N \sum_{i=-N+1}^N P_d(i) DSTFT_x^w(n, m+i) DSTFT_x^{w*}(n, m-i) \end{aligned} \quad (35)$$

gde $P_d(i)$ predstavlja odbirke prozorske funkcije u frekvencijskom domenu. Radi jedinstvenog normiranja, podrazumeva se da su $P_d(i)$ i w_k normirane prozorske funkcije, odnosno da je suma svih članova prozorske funkcije jednaka jedinici.

Ravnanjem po vremenu uklanjaju se samo kros-komponente koje su posledica vremenski razdvojenih auto-komponentata signala. Ravnanje po frekvenciji uklanja deo interferencije koji potiče od frekvencijskih auto-komponentata.

DSPWD je najfleksibilnija od pomenutih distribucija po pitanju kompromisa između male interferencije i dobre rezolucije. Neki korisni efekti, koji mogu da se koriste prilikom izbora adekvatnog prozora $P_d(i)$, su npr. dva specijalna slučaja:

- ako je $P_d(i) = \delta(i)$, onda se direktnom zamenom u (35) dobija spektrogram;
- ako je $P_d(i) \equiv 1, \forall i$, onda se dobija DPWD, što se neposredno vidi iz izraza (34) i (35).

Oba slučaja daju ideju o transformaciji koja će biti između spektrograma i PWD, i kombinovaće njihova dobra svojstva. Izborom pogodnog prozora $P_d(i)$, rezolucija WD može biti očuvana, a interferencija potisnuta. Kros-komponente će se pojaviti samo između dve bliske trenutne frekvencije i neće remetiti ostali deo distribucije.

Na slici 4. je dat komparativni prikaz DWD, diskretnih izravnatih WD i DSTFT. Posmatran je dvokomponentni signal sastavljen od sinusno modulirane sinusoide i linearnog čirpa. Analitički oblik ovog signala je:

$$x(t) = e^{j2\pi f_0 \left[t - \frac{1}{2} \frac{\cos(2\pi f_m t)}{2\pi f_m} \right]} + e^{j \frac{2\pi f_0 t^2}{T}} \quad (36)$$

gde su vrednosti parametara sledeće: frekvencija nosioca $f_0 = 250$ kHz; trajanje signala $T = 200$ μ s; modulaciona frekvencija $f_m = 1/T = 10$ kHz. Signal je uzorkovan sa periodom $T_s = 1$ μ s, odnosno frekvencija uzorkovanja signala je $F_s = 1/T_s = 1$ MHz. Dobijena je sekvenca $x_k = x(kT_s)$, dužine $N = 200$.

Na slikama 4a i 4b prikazana je DWD sekvence x_k , dvodimenzionalni i trodimenzionalni prikaz, respektivno. Auto-komponente su uske, što dokazuje tvrdnju o dobroj rezoluciji ove distribucije. Međutim, kros-komponente su veoma izražene.

Slika 4v prikazuje DPWD sa kratkotrajnom sekvencom Heningove (Hanning) prozorske funkcije dužine , a slika 4g DPWD sa dugom Heningovom

prozorskom sekvencom dužine . Jasno se vidi da je došlo do širenja distribucije po frekvenciji obrnuto proporcionalno dužini trajanja prozorske sekvence. Kros-komponente koje potiču od vremenski razdvojenih auto-komponentata su potisnute, dok su one koje su posledica frekvencijski razdvojenih članova i dal

interferenciju – o
slučaju preseka
frekvencijske ko1



dužine 100); 5e i 5f (Kajzer dužine 100, $\beta=2\pi$) i 5g, 5h (Kajzer dužine 50, $\beta=2\pi$). Interferencija po vremenskoj osi je potisnuta, dok je po frekvencijskoj ostala na istom nivou, a glavni snopovi su prošireni u odnosu na DWD. Razlika nastala primenom različitih prozorskih funkcija iste dužine je mala (kriterijum: nivo interferencije i širina glavnih snopova). Značajna razlika nastaje primenom kraće prozorske sekven-ce – interferencija je potisnutija, ali se glavni snopovi šire.

Slično se zaključuje sa slika kojima su predstavljeni preseki DSPWD: 5i, 5j (Haning dužine 100); 5k i 5l (Kajzer dužine 100, $\beta=2\pi$) i 5m, 5n (Kajzer dužine 50, $\beta=2\pi$). U svim slučajevima primenjena je po frekvenciji pravougaona prozorska funkcija dužine 20. Vidimo da je rezolucija neznatno pogoršana u odnosu na DPWD, a interferencija znatno više potisnuta, pogotovo po frekvenciji.

Problem traženja optimalne dužine prozorske sekvence je dosta aktuelan. Može se zaključiti da je problem izbora prozorske funkcije veoma značajan i ne postoji univerzalno rešenje, već ono zavisi od konkretne primene.

Zaključak

Vremensko-frekvencijske transformacije predstavljaju alternativu klasičnoj Furijeovoj transformaciji prilikom analize nestacionarnih signala i sistema. Rad je kvalitativno predstavio neke od njih: STFT, WD, PWD, SPWD; one pokrivaju značajan deo skupa VFT. Međutim, treba naglasiti da je broj postojećih metoda veoma veliki, a primena različita. Posebno je važna WD iz koje se pomoću raznovrsnih jezgara dobija veliki broj ostalih.

Pokazano je teoretski i praktično da WD ima bolju vremensko-frekvencijsku rezoluciju od ostale tri, ali i da je interferencija veoma izražena, posebno kada je vremensko-frekvencijski sadržaj analiziranog signala složen.

Pokazano je da ravnjanje po vremenu uklanja samo kros-komponente koje potiču od vremenski razdvojenih auto-komponentata. Problem interferencije koja potiče od auto-komponentata koje nisu vremenski, ali jesu frekvencijski razdvojene, rešava ravnjanje po frekvenciji. Za realizaciju ravnjanja ključna je definicija WD u korelacionom domenu,

odnosno njena veza sa STFT. Sledeći važan činilac pri ravnjanju jeste prozorska funkcija, od čijeg izbora zavisi rezultat ravnjanja.

Literatura

- [1] HLAWATCH,F., BOUDREAUX – BARTELS,G.F. Linear and Quadratic Time – Frequency Signal Representations, *IEEE Signal Processing Magazine*, April 1992, vol. 9, pp. 21 – 67.
- [2] COHEN,L. Time-frequency distributions – a review, *Proceedings of the IEEE*, July 1989, vol. 77, no. 7, pp. 941 – 981.
- [3] STANKOVIĆ,Lj.B., STANKOVIĆ,S.B., USKOKOVIĆ,Z.B. *Time – Frequency Signal Analysis*, izdavač: Podgorica, 1994.
- [4] CLAASEN,T.A.C.M., MECKLENBRÄKER,W.F.G. The Wigner distribution – A tool for time – frequency signal analysis – Part 2: Discrete – time signals. *Philips J. Res.*, 1980, vol. 35, pp. 276 – 300.
- [5] PEYRIN,F., PROST,R. A unified definition for the discrete – time, discrete – frequency, and discrete – time/frequency Wigner distributions, *IEEE Signal Processing Magazine*. August 1986, vol. ASSP-34, pp. 858 – 867.
- [6] NUTTALL,A.H. *Alias free discrete – time Wigner distribution and complex ambiguity function for discrete – time samples*, Tech. Rep. 8533, Naval Underwater Syst. Centr., Newport, RI, April 1989.
- [7] RICHMAN,M.S., PARKS,T.W., RAMACHANDRA,G.S. Discrete – Time, Discrete – Frequency, Time – Frequency Analysis. *IEEE Signal Processing Magazine*. June 1998, vol. 46, pp. 1517 – 1527.
- [8] O'HAIR,J.O., SUTER,B. Kernel design techniques for alias – free time – frequency distributions. *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process.* 1994, pp. 333 – 336.
- [9] BEKIR,E.S. A contribution to the unaliased discrete – time Wigner distribution, *J. Acoust. Soc. Amer.* January 1993, vol. 93, pp. 363 – 371.
- [10] COSTA,A.H., BOUDREAUX – BARTELS,G.F. A comparative study of alias – free time – frequency representations, *Proc. IEEE Int. Conf. Acoust. Speech, Signal Process.* 1994, pp. 76 – 79.
- [11] O'NEILL,J.C., WILLIAMS,W.J. New properties for discrete, bilinear time – frequency distributions. *Proc. Third Int. Symp. Time – Frequency Time – Scale Analysis*. June 1996.
- [12] ZHU,Y.M., PEYRIN,F., GOUTTE,R. *How to use discrete Wigner distribution*. Digital Signal Processing – 87. 1987, pp. 97 – 101.
- [13] SIMIĆ,S.M. *Vremensko – frekvencijske distribucije i njihova primena u digitalnoj obradi signala*. Diplomski rad, VTA VJ Beograd, septembar 2000.
- [14] POPOVIĆ,M.V. *Digitalna obrada signala*. Nauka, Beograd, 1994.

Rad primljen: 10.6.2002.god.

Time-frequency dependent transformations and their application in digital signal processing

This paper presents an approach to the non-stationary signal and process analysis based on time-frequency dependent transformations. The focus is placed on the Wigner distribution, its time and frequency smoothed versions and the short-time Fourier transform the results of comparison of the aforementioned distributions concerning the resolution, interferences, pushing of the side lobes and characteristics are also presented.

Key words: time-frequency distribution, Wigner distribution, pseudo-Wigner distribution, short-time Fourier transform, resolution, interference, window function.

Transformations de temps et de fréquence et leur application dans le traitement digital des signaux

Cet article donne une analyse des signaux et des procès non-stationnaires basée sur les transformations qui dépendent de la fréquence et du temps. L'accent est mis sur la distribution de Wigner, ses versions „aplaties” et la transformation de Fourier à temps court. Les distributions citées sont comparées concernant la résolution, les interférences, la suppression des lobes latéraux et d'autres caractéristiques.

Mots-clés: distribution de temps et de fréquence, distribution de Wigner, distribution pseudo-Wigner, transformation de Fourier à temps court, résolution, interférence, fonctions de fenêtre.

