UDK: 681.511.2.037:517.938(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova: retrospektiva rezultata

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]
Vesna Drakulić, dipl.inž.[1)]

Deskriptivni sistemi su predstavljeni u matematičkom smislu kombinacijom diferencnih i algebarskih jednačina. Algebarske jednačine predstavljaju ograničenje koje opšte rešenje mora da zadovolji u svakom trenutku. Dat je iscrpan, hronološki pregled rezultata koji se bave problematikom stabilnosti ove klase sistema u smislu Ljapunova. Navedene su brojne definicije, a kroz selektivno odabrane teoreme su dati najnoviji publikovani rezultati, koji specifikuju uslove stabilnosti i asimptotske stabilnosti autonomnih, linearnih, diskretnih, *kako regularnih tako i iregularnih* deskriptivnih sistema.

č č **Diskretni sistemi, deskriptivni sistemi, stabilnost u smislu Ljapunova, matrična Ljapunovljeva jednačina, osobina privlačenja nultog ravnotežnog stanja.**

U v o d

predstavljaju dinamičke sisteme opisane *č* što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja i onemogućava njihovo rešavanje uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje " " sistema.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju odnosno rešavanju dela sistema koji sadrži diferencni deo.

Složena priroda diskretnih deskriptivnih sistema prouzrokuje mnoge teškoće u njihovom analitičkom i numeričkom proučavanju, a koje se ne javljuju u proučavanju tzv. . Pitanja postojanja rešenja, njegove jedinstvenosti i određivanje fundamentalne matrice, znatno otežava njihovu analizu i sintezu.

U tom smislu su od posebne važnosti, pitanja postojanja i jedinstvenosti rešenja, konzistentnih početnih uslova i impulsnog ponašanja. Neka od ovih pitanja, kao i prednosti u korišćenju matematičkih modela iskazanih deskriptivnom formom, bila su predmet razmatranja u radu *ć* [1], a očekuje se da će se kroz nekoliko sledećih radova podrobno razjasniti složena priroda i karakter ove posebne klase sistema, *ć* [2,3].

Pregled najnovijih rezultata i iscrpan uvid u do sada publikovane radove, u oblasti kontinualnih singularnih i diskretnih deskriptivnih sistema, može se naći u sledećim referencama: *ć* [4] [5,6] [7,8], *ć* [9,10,11] i u dva tematska broja časopisa Ako je reč samo najbolja spoznaja aktuelnih rezultata može da se nađe u *ć* [11].

Matematički opis autonomnih sistema, u prostoru stanja, dat je u opštem slučaju:

$$\mathbf{x}(\ +1) = \ \mathbf{x}(\ )\ , \quad \mathbf{x}(\ _0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

ili:

$$\mathbf{x}_1(\ +1) = \ _1\mathbf{x}_1(\ ) + \ _2\mathbf{x}_2(\ ) \tag{2a}$$

$$\mathbf{0} = \ _3\mathbf{x}_1(\ ) + \ _4\mathbf{x}_2(\ ) \tag{2b}$$

U jednačini (1), $\mathbf{x}(\ ) \in \Re$ je deskriptivni vektor stanja s kvadratnim matricama , $\in \Re$, i s matricom

U jednačini (2a-2b) $\mathbf{x}_1(\ ) \in \Re^{1}$, $\mathbf{x}_2(\ ) \in \Re^{2}$ su podvektori stanja, a matrice , =1,…,4 su definisane nad poljem realnih brojeva dimenzija $_1\times\ _1$, $_1\times\ _2$, $_2\times\ _1$, i $_2\times\ _2$, sledstveno.

Pregled postignutih rezultata u izučavanju stabilnosti singularnih sistema u smislu Ljapunova

Razmatrani su postignuti doprinosi izučavanju linearnih, diskretnih deskriptivnih sistema. Analiza najznačajnijih ovde razmatranih rezultata data je hronoloskim redosledom.

Kada su u pitanju , prvi

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

rezultati se vezuju za rad ć [12]. Autori su izložili geometrijski opis potprostora konzistentnih početnih uslova koji generišu sekvencu rešenja ($\mathbf{x}(\ )$: =0,1,…). Dobijeni rezultati su iskazani direktno preko bazičnih matrica i , tako da su izbegnute dodatne algebarske transformacije, koje obično opterećuju većinu procedura za ispitivanje stabilnosti sistema. Predloženi geometrijski prilaz, ponudio je ispitivanje dinamičkih osobina ove klase sistema preko "slabe" č č Do nedavno*) testiranje tih rezultata je bilo veoma složeno, jer je pozitivna određenost relevantnih matrica bila zahtevana samo na određenom podskupu prostora stanja, a ne na njegovoj sveukupnosti.

U radovima ć [13], č [32] ć [14], istraživano je postojanje diskretnih sekvenci koje teže ishodištu prostora stanja. Koristeći Ljapunovljevu metodu, bilo je omogućeno razmatranje kako , tako i diskretnih singularnih sistema. Koristeći pogodnu linearnu nesingularnu transformaciju, polazni sistem preveden je u svoju č , koja se pokazala kao izuzetno pogodna za utvrđivanje potklase mogućih rešenja (sekvenci) koje poseduju razmatranu osobinu. Tom prilikom definisan je i određen " ( ) č " nultog ravnotežnog stanja.

U monografiji ć [11] data je diskretna verzija rezultata izloženog u [15] u vidu analognih definicija i teorema.

Koristeći Weierstrassovu kanoničku formu [16] izveli su generalisanu matričnu Ljapunovljevu jednačinu za diskretne linearne deskriptpivne sisteme koji rade u slobodnom radnom režimu.

Do sličnih rezultata, koristeći matrične nejednakosti, došli su u svojim istraživanjima i [21] i [19]

Na kraju valja spomenuti i diskretnu verziju doprinosa datog u radu [16] a koja se ovde izlaže kao diskretna verzija u [16] iznetih rezultata i koja u formi diskretne matrične jednačine Ljapunova daje uslove asimptotske stabilnosti razmatranog deskriptivnog linearnog sistema.

Od ostalih značajnih rezultata na polju ljapunovske stabilnosti, vredi pomenuti rad ć ć [17], u kome je izučavana posebna klasa nelinearnih, nestacionarnih diskretnih singularnih sistema, kao i odgovarajući " " a što premašuje ovde razmatranu problematiku.

Stabilnost singularnih i deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova

Stabilnost sistema zauzima svakako najznačajnije mesto u teoriji sistema i upravljanja. Različiti koncepti stabilnosti odavno se primenjuju u dinamičkoj analizi savremenih sistema automatskog upravljanja. U ovom radu se razmatraju pitanja stabilnosti ravnotežnog stanja singularnih sistema s pozicija primene teorije Ljapunova, odnosno primene njegove Druge metode. Ovde razmatran problem stabilnosti linearnih singularnih sistema je ekvivalentan razmatranju stabilnosti sistema u celini. Dobro je poznato da je stabilnost običnih sistema izložena u enormnom broju referenci, a ovde je napravljen originalan izbor manjeg broja radova isključivo posvećenih problematici vezanoj za posebnu klasu singularnih sistema. Zašto ova problematika dobija poseban značaj, kada je u pitanju ova klasa sistema automatskog upravljanja?

Dobro je poznato da primena Druge metode Ljapunova zahteva izbor odgovarajuće skalarne agregacione funkcije za dati sistem i izračunavanje njenog totalnog vremenskog izvoda duž kretanja sistema. Na osnovu osobina Ljapunovljeve funkcije i njenog izvoda, shodno postojećim teoremama, donose se odgovarajući zaključci o kvalitetu i karakteru ponašanja rešenja, odnosno osobinama ravnotežnog stanja i/ili sistema u celini.

Ako se sa $(\ ,\mathbf{x}(\ ))$ obeleži Ljapunovljeva funkcija, onda je njen totalni vremenski izvod dat izrazom:

$$\dot{}(\ ,\mathbf{x}(\ )) = \frac{\partial\ (\ ,\mathbf{x}(\ ))}{\partial} + \frac{\partial\ (\ ,\mathbf{x}(\ ))}{\partial \mathbf{x}\ (\ )}\dot{\mathbf{x}}(\ ) \tag{3}$$

jasno, za vremenski neprekidne sisteme, pa je očigledno da nemogućnost određivanja izdvojenog $\dot{\mathbf{x}}(\ )$ za linearne singularne sisteme predstavlja osnovnu prepreku za efikasno rešavanje postavljenog problema. Problem se prevazilazi usvajanjem posebnog oblika agregacione funkcije i njenih osobina na potprostoru konzistentnih početnih uslova.

Situacija je identična i kada su u pitanju diskretni deskriptivni sistemi, a što je očigledno ako se ima u vidu njihov matematički zapis (1).

Definicije stabilnosti diskretnih deskriptivnih sistema

Definicija 1. Sistem, dat jednačinom (1) je ***regularan*** ako det (−) nije identički jednaka nuli, [18]

Definicija 2. Sistem, dat jed. (1) je ***kauzalan*** ako je i ako je uslov deg $(\det(\ -\ )) =$ zadovoljen, [18]

Napomena 1. Prema autorima [19] termin može da se poistoveti sa izrazom

Napomena 2. Uočeno je da matričnog para garantuje postojanje i jedinstvenost rešenja sistema, datog (1), a za proizvoljne početne uslove, njegovo neimpulsno ponašanje može da se obezbedi izborom odgovarajućih tzv. konzistentnih početnih uslova. Ova razmatranja su podjednako prihvatljiva i za kontinualne singularne i diskretne deskriptivne sisteme, uz napomenu, da o postojanju "glatkih" (neimpulsnih) rešenja praktično nema smisla da se govori, kada su u pitanju , ali ideja o č , koja generiše njihova rešenja u vidu sekvence $(\mathbf{x}(\ ):\ \geq 0)$, ima svoj potpuni fizički smisao. Kod "normalnih" sistema je neimpulsno ponašanje odezbeđeno njihovom apriornom regularnošću.

Definicija 3. Sistem, dat jed. (1) je ***stabilan,*** ako je i ako ima sve svoje konačne polove unutar jediničnog diska (0,1), [18]

Definicija 4. Sistem, dat jednačinom (1) je ***prihvatljiv (admissible)*** ako je [19]

Definicija 5. Sistem, dat jednačinom (1) je asimptotski stabilan ako, i samo ako, za svaki konzistentni početni uslov $\mathbf{x}_0$, kretanje sistema zadovoljava sledeću relaciju: $\lim_{\ \to\infty} \mathbf{x}(\ ) \to \mathbf{0}$.

*) Videti rad Müllera (1993.)

Teoreme stabilnosti singularnih sistema u smislu Ljapunova

Teorema 1. Da bi sistem jednačina (1) bio potrebno je i dovoljno da postoji realan pozitivan broj $\lambda^* > 0$, takav da za sve vrednosti λ u opsegu $0 < |\lambda| < \lambda^*$, postoji simetričan, pozitivno definisan operator $_\lambda$, koji zadovoljava:

$$(\; -\lambda \;) \quad _\lambda(\; -\lambda \;) - \quad _\lambda = - \; _\lambda \qquad (4)$$

za neki simetričan operator $_\lambda$ koji zadovoljava uslov pozitivne određenosti na potprostoru konzistentnih početnih uslova u obliku:

$$\mathbf{x} \; (\;) \; _\lambda \mathbf{x}(\;) > 0 \; , \quad \forall \mathbf{x}(\;) \in \; _* \setminus \{\mathbf{0}\} \qquad (5)$$

ć (1985) [12].

Uslovi dati jednačinama (4–5) imaju poznatu strukturu Ljapunovljeve jednačine s dodatnim otežavajućim okolnostima koje moraju da budu zadovoljene za svako λ u opsegu $0 < |\lambda| < \lambda^*$. Ovu parametarsku strukturu nije moguće izbeći, osim u slučaju kada je matrica regularna. Dokaz prethodne kao i naredne u celosti se nalazi u ć , [11], a ovde se ne razmatra zbog svoje preopširnosti.

Posledica 1. Pretpostavimo da je matrica regularna. Tada, da bi sistem dat jednačinom (1) bio potrebno je i dovoljno da postoji simetrična, pozitivno određena matrica , koja zadovoljava:

$$- \quad = - \qquad (5)$$

gde je simetrična, pozitivno određena matrica, tako da je:

$$\mathbf{x} \quad \mathbf{x} > 0 \; , \quad \forall \mathbf{x} \in \; _* \setminus \{\mathbf{0}\} \qquad (6)$$

gde je potprostor konzistentnih početnih uslova diskretnog deskriptivnog sistema.

Teorema 2. Da bi sistem jednačina (1) bio , potrebno je i dovoljno da postoji takav realan broj λ^* da za svako λ u opsegu $0 < |\lambda| < \lambda^*$, postoji simetričan, pozitivno određen operator $_\lambda$, koji zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\mathbf{x} \; \Big((\; -\lambda \;) \quad _\lambda(\; -\lambda \;) - \quad _\lambda \Big) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x} \;\; \mathbf{x} \qquad \forall \mathbf{x} \in \; _* \qquad (7)$$

Posledica 2. Ako je matrica invertibilna tada, da bi sistem dat jednačinom (1) bio , potrebno je i dovoljno da važi (7) pri $\lambda = 0$ i za neki simetrični, pozitivno određeni operator $= \; _0$.

Do sada izloženi rezultati su se odnosili isključivo na singularne sisteme. Više s teorijske, a manje s praktične tačke gledišta, od interesa su i iregularni singularni sistemi, kao i njihovo dinamičko ponašanje. Jedan od takvih prilaza, koji u svetlu ljapunovske stabilnosti, razmatra ovu potklasu singularnih sistema, iniciran je u radovima ć , [13] č , [32] a znatno poboljšan i usavršen u radu ć [14].

Razmatra se linearni diskretni deskriptivni sistem, opisan svojom diferencnom jednačinom stanja u kanoničnom obliku, (2).

Definicija i određivanje potprostora konzistentnih početnih uslova , kao i pitanje regularnosti razmatranog sistema veoma je važno pitanje u dinamičkoj analizi deskriptivnih sistema i ne može da se prenebregne. Ova pitanja biće predmet icrpnog razmatranja autora ć [3] Pojednostavljeniji prilaz može da se sprovede na osnovu kanoničke forme, (2). sistema iskazan je u jednom od svojih alternativnih oblika u **Definiciju 1** Za sistem jednačina (2) kada je matrica $_4$, dat je na sledeći način:

$$(-1)^{\;2} \det \;_4 \det\Big((\; _1 - \; _1) - \; _2 \; _4^{-1} \; _2 \Big) \neq 0 \qquad (8)$$

Sa φ je označen skup svih vektora konzistentnih početnih uslova sistema jednačine (2). Sa $M \in \Re^{\mathbf{n}}$ označena je linearna višestrukost**) određena jed. (2b) kao:

$$M = \{ \mathbf{x}(\;) \in \quad : \mathbf{0} = \; _3\mathbf{x}_1(\;) + \; _4\mathbf{x}_2(\;) \; \} \qquad (9)$$

Za sistem jednačina (2), u opštem slučaju, $\varphi \subseteq M$, pa u tom smislu vektor konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$ mora da zadovolji jednačinu (2b), što može da se napiše kao:

$$\mathbf{x}_0 \in \varphi \subseteq M \equiv \aleph([\; _3 \quad _4]) \qquad (10)$$

Međutim, ako se pokaže da je , dat sledećom jednačinom:

$$\text{rang} \, [\; _3 \quad _4] = \text{rang} \; _4 \qquad (11)$$

, tada je očigledno, ć [20], ć [14] da je $\varphi = M = \aleph([\; _3 \quad _4])$ i izračunavanje potprostora konzistentnih početnih uslova ne zahteva nikakva dopunska izračunavanja, osim svođenja diskretnog deskriptivnog sistema, (1), na svoj normalno–ka-nonički oblik (2). U tom slučaju, pretpostavljajući da je uslov ranga zadovoljen, jednačina (11), a kada $\mathbf{x}_0 \in \aleph([\; _3 \quad _4])$, $(\; _1 + \; _2 - \;)$ komponenti vektora $\mathbf{x}_0$ može da bude proizvoljno, tada $\mathbf{x}_0$ pripada potprostoru konzistentnih početnih uslova. Preciznije, sve komponente vektora $\mathbf{x}_{10}$ i neke (kada važi rang $A_4 = \; < \; _2$), ili nijedna (kada važi rang $A_4 = \; = \; _2$) komponenta vektora $\mathbf{x}_{20}$, stoje na raspolaganju kao slobodan izbor. U oba slučaja, sistem (2) može da se redukuje na " " nižeg reda s vektorom $\mathbf{x}_1$ kao vektorom stanja, a u slučaju da je rang $_4 = \; < \; _2$, sa nekim komponentama vektora $\mathbf{x}_2$, kao slobodnim. U ovom slučaju, redukovani matrični model diskretnog singularnog sistema biće u obliku $\mathbf{x}_1(\; +1) = \; _1\mathbf{x}_1(\;) + \; _2\mathbf{x}_2(\;)$ s matricama $_1$ i $_2$ odgovarajućih dimenzija i vektorom $\mathbf{x}_2$ sastavljenim od onih komponenti vektora $\mathbf{x}_2$, koje mogu da se izaberu. Prema tome, postojanje rešenja je obez-beđeno takvim izborom $\mathbf{x}_0$ i činjenicom da je $\varphi = M = \aleph([\; _3 \quad _4])$. Treba istaći, da nije obezbeđena kada je rang $_4 = \; < \; _2$, ć [20].

Budući da su sistemi dati jednačinama (1) i (2) ekvivalentni, konvergentnost njihovih rešenja je evidentna.

Potencijalni (slabi) domen privlačenja nultog rešenja $\mathbf{x}(\; ,0) = \mathbf{0}$ $(\; \in K)$, definisan je izrazom:

** Na engleskom jeziku:

$$\mathsf{D} \overset{\Delta}{=} \{ \mathbf{x}_0 \in \varphi \ : \ \exists(\mathbf{x}(\ ) : \quad = 0,1,2,\ldots) \quad \text{koje} \quad \text{jed. (2)} \quad \ni \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \ \lim_{\to\infty} \| x(\ ,\ _0) \| \to \mathbf{0} \ \} \tag{12}$$

ć (1998.b) [14].

Koristi se termin " ", zato što rešenja jednačine (2) ne moraju da budu jedinstvena, tako da za svako $\mathbf{x}_0 \in$ D mogu postojati i rešenja koja ne konvergiraju ishodištu faznog prostora. Ta činjenica zahteva da se odredi procena D skupa D (D $\subseteq$ D). Za tu svrhu koristiće se Ljapunovljeva metoda, a za klasu i . Znači, zahtev da det($-$) $\neq 0$

Kao prvo, pretpostavimo da je ispunjen , dat jed. (11), a samim tim $\varphi = \aleph([\ _3 \quad _4])$ za sistem dat (2). Tada postoji matrica koja zadovoljava sledeću matričnu jednačinu:

$$= \ _3 + \ _4 \tag{13}$$

gde je nula matrica iste dimenzije kao i matrica $_3$. Iz (11) i (13) sledi da, ako rešenja sistema datog (2) postoje, tada će postojati i rešenje $\mathbf{x}(\ )$ čije komponente zadovoljavaju:

$$\mathbf{x}_2(\ ) = \ \mathbf{x}_1(\ ), \quad \in \mathrm{K} \tag{14}$$

Uzimajući u obzir , (11), sledi***) da je $\aleph([\ \ - \ _2]) \subseteq \aleph([\ _3 \quad _4])$. Da bi se to pokazalo, usvaja se proizvoljno $\mathbf{x}^* \in \aleph([\ \ - \ _2])$, tj. $\mathbf{x}_2{}^* = \ \mathbf{x}_1{}^*$, gde je bilo koja matrica koja zadovoljava (13). Množeći s desne strane jednačinu (13) vektorom $\mathbf{x}_1{}^*$, uz korišćenje (14), dobija se:

$$= \ _3\mathbf{x}_1^* + \ _4 \ \mathbf{x}_1^* = \ _3\mathbf{x}_1^* + \ _4\mathbf{x}_2^* \tag{15}$$

što pokazuje da $\mathbf{x}^* \in \aleph([\ _3 \quad _4])$. Prema tome $\aleph([\ \ - \ _2]) \subseteq \subseteq \aleph([\ _3 \quad _4])$. Posledično, ona rešenja sistema, datog (2), koja zadovoljavaju (11), moraju da zadovolje i ograničenja nametnuta (2b).

Za sva rešenja sistema datog jednačinom (2), za koja važi (14), sledeći zaključci imaju poseban značaj:

1. Rešenja sistema jednačine (2) moraju pripadati skupu:

$$\mathbf{x}(\ , \mathbf{x}_0) \in \aleph([\ \ - \ _2]) \tag{16}$$

2. Ako uz zadovoljen uslov ranga, jednačina (11), postoje rešenja $\mathbf{x}(\ )$ sistema jednačine (2), a za koja može da se dokaže osobina konvergentnosti ka ishodištu faznog prostora, tada je č razmatranog sistema dat sa:

$$\mathrm{D} \ = \aleph([\ \ - \ _2])\} \subseteq \mathrm{D} \tag{17}$$

Za sistem (2) Ljapunovljeva funkcija može da bude izabrana kao:

$$(\mathbf{x}(\ )) = \mathbf{x}_1(\ ) \ \ \mathbf{x}_1(\ ) \tag{18}$$

gde je simetrična, pozitivno određena matrica.

Potonja razlika funkcije $(\cdot)$ duž rešenja (2) je:

$$\begin{aligned} \Delta \ (\mathbf{x}(\ )) &= \ (\mathbf{x}(\ +1)) - \ (\mathbf{x}(\ )) \\ &= \mathbf{x}_1(\ +1) \ \ \mathbf{x}_1(\ +1) - \mathbf{x}_1(\ ) \ \ \mathbf{x}_1(\ ) \end{aligned} \tag{19}$$

a, uz korišćenje (14) i:

$$\begin{aligned} \Delta \ (\mathbf{x}(\ )) &= \mathbf{x}_1(\ )\big((\ _1 + \ _2\ ) \quad (\ _1 + \ _2) - \ \big) \ \mathbf{x}_1(\ ) \\ &= -\mathbf{x}_1(\ ) \ \ \mathbf{x}_1(\ ) \end{aligned} \tag{20}$$

gde je:

$$= -(\ _1 + \ _2\ ) \quad (\ _1 + \ _2\ ) + \tag{21}$$

realna simetrična matrica. Kada je simetrična, pozitivno određena matrica, tada je $(\cdot)$ pozitivno određena funkcija u odnosu na kovektor $\mathbf{x}_1(\ )$. Prema tome, ako je pozitivno određena matrica, tada će $(\mathbf{x}(\ ))$ težiti nuli kada $\to\infty$, uz pretpostavku da rešenja postoje kada $\to \infty$.

Veza između matrica i , koje zadovoljavaju postavljene zahteve, može se uspostaviti preko č č u obliku:

$$- \quad = - \tag{22}$$

gde je:

$$= \ _1 + \ _2 \tag{23}$$

Proizvoljna realna, simetrična, pozitivno određena matrica i simetrična, pozitivno određena matrica , mogu da se nađu kao rešenje č č ako, i samo ako je diskretno stabilna matrica, odnosno, matrica čije sve vlastite vrednosti leže u otvorenom jediničnom krugu u kompleksnoj ravni . Valja zapaziti da matrica ima dimenziju $_1 \times \ _1$, tako da (22) može da se razmatra kao č jednačina redukovanog reda u odnosu na deskriptivni vektor stanja.

Teorema 3. Neka je zadovoljen uslov ranga, (11). Tada je procena, D , potencijalnog (slabog) domena privlačenja D nultog rešenja datog diskretnog deskriptivnog sistema određena sa (17), uz uslov da je matrica bilo koje rešenje jednačine (13), a $= (\ _1 + \ _2\ )$ je . Štaviše, D nije jednočlan skup, ć [11,14]

Dokaz izložene , zbog svoje preopširnosti, ne razmatra se, i u celosti se može naći u radu ć [11,14]

U slučaju da postoji matrica $_4^{-1}$, matrica je jedinstveno određena sa:

$$= - \ _4^{-1} \ _3 \tag{24}$$

Kada je:

$$[\ _3 \quad _4] = [\ \quad - \ _2] \tag{25}$$

i ako je:

$$= \ _1 + \ _2 \ = \ _1 - \ _2 \ _4^{-1} \ _3 \tag{26}$$

, onda je D $= \aleph([\ _3 \quad _4])$ i postoji č kao globalna osobina , koji tom prilikom može da se svede na svoju "normalnu" formu niže dimenzije $_1$, kako sledi:

$$\mathbf{x}_1(\ +1) = (\ _1 - \ _2 \ _4^{-1} \ _3)\mathbf{x}_1(\ ) \tag{27}$$

*** Prema ć i anonimnom recenzentu časopisa

Teorema 4. Sistem dat jed. (1) je regularan, kauzalan i stabilan ako, i samo ako postoji inverzna simetrična matrica $\in \Re^{\times}$ takva da važe sledeće dve nejednakosti:

$$^{T} \geq 0 \tag{28}$$

$$^{T} - ^{T} < 0 \tag{29}$$

(1999) [21].

U dokazu ove **Teoreme** koristi se pomoćni rezultat dat u

Dokaz. Dokaz se sastoji iz dva dela.

Dovoljnost. Neka su $_1$ i $_1 \in \Re^{\times}$ nesingularne matrice, takve da važi:

$$_1 \quad _1 = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

gde je jedinična matrica reda $\times$.

Ako se izvrši particija matrica $\bar{}_1 \quad _1^{-1}$ i $_1 \quad _1$ slično prethodnoj, dobija se:

$$\bar{}_1 \quad _1^{-1} = \begin{bmatrix} _1 & _2 \\ _2 & _3 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$_1 \quad _1 = \begin{bmatrix} _1 & _2 \\ _3 & _4 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Na osnovu (28,30-32) je pokazano da je:

$$_1 \geq 0 \tag{33}$$

Koristeći jednačine (29) i (32 - 33), dobija se:

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & _2 \quad _1 \quad _2 + \quad + \end{bmatrix} < 0 \tag{34}$$

gde je:

$$= \quad _2 \quad _2 \quad _4 + \frac{1}{2} \quad _4 \quad _3 \quad _4 \tag{35}$$

a sa *' su označene matrice bez značaja za dalja razmatranja.

Uzimajući u obzir (34), a imajući u vidu da je $_1 \geq 0$, dobija se:

$$^{T} < 0 \tag{36}$$

Koristeći , sledi:

$$\begin{aligned} \mathrm{Re}((\ _2 \ _2 + \tfrac{1}{2} \ _4 \ _3) \ _4) &= \mathrm{Re}(\ ) \leq \mu(\ ) = \\ &= \frac{1}{2}\lambda_{\max}(\qquad) < 0 \end{aligned} \tag{37}$$

Lako se može pokazati da je matrica $(\ _2 \ _2 + \frac{1}{2} \ _4 \ _3) \ _4$ invertibilna, što povlači i invertibilnost matrice $_4$, takođe. Prema datim , lako je da se zaključi da je razmatrani sistem regularan i kauzalan.

S druge strane, regularnost i kauzalnost razmatranog sistema, [18] podrazumeva da postoje nesingularne matrice $_2$, $_2 \in \Re^{\times}$ takve, da:

$$_2 \quad _2 = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{38}$$

$$_2 \quad _2 = \begin{bmatrix} \bar{}_1 & 0 \\ 0 & _{-} \end{bmatrix} \tag{39}$$

gde su: $_{-} \in \Re^{(\ -\ )\times(\ -\ )}$ jedinična matrica, a $\bar{}_1 \in \Re^{\times}$.

Particija matrice $\bar{}_2 \quad _2^{-1}$, slično prethodnim procedurama, dovodi do:

$$\bar{}_2 \quad _2^{-1} = \begin{bmatrix} _{11} & _{12} \\ _{12} & _{22} \end{bmatrix} \tag{40}$$

Iz (28) i (40), lako je da se pokaže da je:

$$_{11} \geq 0 \tag{41}$$

Zajedno, korišćenje jednačina (29), i (38-40), dovodi do:

$$\bar{}_1 \quad _{11} \ \bar{}_1 - \quad _{11} < 0 \tag{42}$$

Na osnovu (41 i 42) sledi i da je $_{11} > 0$. Koristeći standardnu Ljapunovljevu teoriju, dobija se i da je $\lambda(\bar{}_1) \subset \subset \mathrm{D}(0,1)$. Prema tome, na osnovu 3 sledi, direktno, da je razmatrani sistem i

Sada treba dokazati i da je matrica invertibilna. Zamenjujući jednačine (38-39) u (29), dobija se:

$$\begin{bmatrix} \bar{}_1 \quad _{11} \ \bar{}_1 - \quad _{11} & \bar{}_1 \quad _{12} \\ _{12} \ \bar{}_1 & _{22} \end{bmatrix} < 0. \tag{43}$$

Prema tome, $_{22} < 0$, i koristeći dobro poznat Schurov komplement lako se pokazuje da važi:

$$\bar{}_1 (\ _{11} - \ _{12} \ _{22}^{-1} \ _{12}) \ \bar{}_1 - (\ _{12} \ _{22}^{-1} \ _{12}) < 0 \tag{44}$$

Pošto $\lambda(\bar{}_1) \subset \mathrm{D}(0,1)$, koristeći standardnu Ljapunovljevu proceduru na (44), dobija se:

$$_{11} - \ _{12} \ _{22}^{-1} \ _{12} > 0 \tag{45}$$

što povlači invertibilnost matrice $(\ _{11} - \ _{12} \ _{22}^{-1} \ _{12})$. Imajući u vidu da je matrica $_{22}$ invertibilna, a vodeći računa i o (40), dobija se da je i matrica $\bar{}_2 \quad _2^{-1}$ invertibilna, a samim tim i matrica , što je i trebalo pokazati.

Dovoljnost. Pretpostavimo da je sistem, opisan jednačinom (1) regularan, kauzalan i stabilan. Tada, prema [18] postoje matrice $_3$, $_3 \in \Re^{\times}$ takve da:

$$_3 \quad _3 = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$_3 \quad _3 = \begin{bmatrix} \bar{}_1 & 0 \\ 0 & _{-} \end{bmatrix} \tag{47}$$

gde $\lambda(\ _{11}) \subset \mathrm{D}\ (0,1)$.

Koristeći klasičan prilaz Ljapunovljeve teorije sledi, da postoji simetrična pozitivno određena matrca $_1$ takva, da je:

$$_{11} \quad _1 \quad _{11} - \quad _1 < 0. \tag{48}$$

Definišimo matricu na sledeći način:

$$_3\begin{bmatrix} _1 & 0 \\ 0 & -\ _- \end{bmatrix}\ _3 \qquad (49)$$

Lako se uviđa da je matrica , u datoj formi (49), invertibilna i simetrična, i da pri tome zadovoljava jednačine (28-29), čime je dokaz kompletiran.

U narednim izlaganjima su od posebne važnosti sledeće činjenice.

Za bilo koji matrični par (,), uvek postoje dve realne nesingularne matrice i takve, da važi:

$$\hat{}\ , \qquad \hat{} \qquad (50)$$

gde su:

$$\hat{} = \begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & \end{bmatrix}, \quad \hat{} = \begin{bmatrix} _1 & 0 \\ 0 & _- \end{bmatrix} \qquad (51)$$

Matrični par ($\hat{}$, $\hat{}$) naziva se para (,). U (51) matrica $\in \Re^{(\ -\ )\times(\ -\ )}$ je nilpotentna matrica, a je broj konačnih sopstvenih vrednosti matričnog para (,). Pošto su i nesingularne matrice, a det (s $-$ $_-$) = $(-1)^{\ -}$, sledi:

$$\sigma(\ ,\ ) = \sigma(\ \hat{}\ ,\ \hat{}\ ) = \sigma(\ ,\ _1) \qquad (52)$$

gde je sa σ(,) označen spektar vlastitih vrednosti matričnog para, pa je jasno da se stabilnost bilo kog regularnog deskriptivnog sistema, datog parom (,), može kompletno razmatrati na podsistemu nižeg reda, u matričnom zapisu datom u formi (, $_1$).

Napomena 3. Sada valja primetiti, da je matrični par (,) ako, i samo ako je = 0.

Napomena 4. Matrice reda su × .

Korisno je uvesti i sledeća označavanja:

$$= \qquad <$$

$$\deg \quad \det(\ -\ ) = \ \leq\ <$$

Napomena 5. Bilo koji vektor $\mathbf{v}^1$, koji zadovoljava $E\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$, naziva se č matričnog para (,), a bilo koji nenulti vektor ν (≥ 2) koji zadovoljava **v** $\mathbf{Av}^{k-1}$ se naziva č Detalji vezani za ova tvrđenja podrobno su izneti u

Lema 1. Ako matrični par (,) nije kauzalan, onda on ima bar jedan č $\mathbf{v}^2$ takav, da je $E\mathbf{v}^2 = \mathbf{v}^1$ pri $\mathbf{Ev}^1 = 0$, gde je $\mathbf{v}^1$ odgovarajući vektor

Lema koja se izlaže u nastavku ukazuje na činjenicu da matrični parovi (,) i ($\hat{}$, $\hat{}$) dele iste osobine $\hat{}$ i . Međutim, dva skupa konačnih sopstvenih vrednosti tih parova, povezani su tada u afinoj linearnoj vezi.

Lema 2. Naka $\alpha, \beta \in \Re$ pri $\beta \neq 0$. Ako je $\hat{}\ \ \alpha\ + \beta$, tada matrični parovi poseduju sledeća svojstva:

( ) Matrični par (,) je ako, i samo ako je matrični par ($\hat{}$, $\hat{}$) takođe

( ) Svaki par odgovarajućih konačnih sopstvenih vrednosti, ova dva matrična para, povezan je na sledeći način:

$$\lambda \quad \hat{} \quad \hat{} \qquad \alpha \quad \beta\lambda$$

Sada se može preći na izlaganje glavnih rezultata

Teorema 5. Diskretni deskriptivni sistem oličen u svojstvima matričnog para (,) ako, i samo ako postoji matrica $\in \Re^{\ \times\ }$ koja zadovoljava sledeću č č

$$(53)$$

$$\geq 0 \qquad (54)$$

[19]

Dokaz. Dokaz se sastoji iz dva dela.

Dovoljnost. Bez gubitka u opštosti razmatranja, pretpostavimo da su matrice t i u svojoj Weierstrassovoj formi. Valja primetiti da je =0, zbog pretpostavke o neimpulsnom ponašanju sistema. Kada je matrični par (,) , tada prema Drugoj Ljapunovljevoj metodi, postoji matrica $_1 > 0$ takva, da je $_1\ _1\ _1 <\ _1$. Neka $_4 \in \Re^{(\ -\ )\times(\ -\ )}$ bude proizvoljna simetrična negativno određena matrica, i definišimo još i dijagonalnu matricu = diag($_1$, $_4$). Očigledno je da matrica zadovoljava nejednačine (53-54).

Neophodnost. Pretpostavimo da matrični par (,) . Množeći obe strane nejednačine (53) -$\mathbf{v}^1$ i njegovim transponovanim oblikom-$\mathbf{v}^{1T}$, sledstveno, dobija se:

$$\mathbf{v}^{1T}A^TPA\mathbf{v}^1 < \mathbf{v}^{1T}E^TPE\mathbf{v}^1 \qquad (55)$$

Imajući u vidu , zamenjujući $A\mathbf{v}^1$ sa $E\mathbf{v}^2$ a imaujući u vidu da je $E\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$, dobija se:

$$\mathbf{v}^{2*}E^TPE\mathbf{v}^2 < 0 \qquad (56)$$

što je u suprotnosti sa nejednačinom (54). Prema tome, matrični par (,) je , pa je samim tim dokazana i njegova regularnost. Stoga, može da se usvoji da matrični par ima svoju Weierstrassovu formu. Prema tome je i = 0, jer je par (,) kauzalan. Uvažavajući blokovsku strukturu (51), može da se izvrši i sledeća particija:

$$= \begin{bmatrix} _1 & _2 \\ _2 & _4 \end{bmatrix} \qquad (57)$$

Zamenjujući tako date matrice i kao i matricu datu jednačinom (57) u jednačine (53-54), dobija se:

$$\begin{bmatrix} _1\ _1\ _1 & _1\ _2 \\ _2\ _1 & _4 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} _1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \qquad (58)$$

$$\begin{bmatrix} _1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \geq 0 \qquad (59)$$

gde blokovi ($)_{11}$ povlače postojanje takve matrice $_1 \geq 0$ za koju je:

$$_1\ _1\ _1 -\ _1 < 0 \qquad (60)$$

Ako se definiše i:

$$\tilde{}_1 = \ _1 + \varepsilon \qquad (61)$$

gde je ε > 0 dovoljno malo, tada važi:

$$_1 \tilde{\ }_1 \ _1 - \tilde{\ }_1 = (\ _1 \ \ _1 \ _1 - \ _1) + \varepsilon(\ _1 \ \ _1 - \ ) < 0 \quad (62)$$

Imajući u vidu (52) i klasičan Ljapunovljev prilaz, jasno je da (62) garantuje stabilnost matričnog para (,).

Ljapunovljeve karakterizacije D(0,1) date nejednačinama (53 i 54), u prethodnoj mogu se, bez problema, proširiti i na pojam D

Posledica 3. Matrični par (,) je i D (,) − , tj. $\sigma($, $) \subset$ D (,), ako i samo ako postoji matrica $^T \in \Re^{\ \times\ }$ takva, da:

$$(\ ^2 - \ ^2) \ ^T \ + \ ^T \ (\ ^T \ \ ^T \ ) \quad (63)$$

$$^T \ \geq 0 \quad (64)$$

Dokaz. Na osnovu Matrični par (,) je regularan, kauzalan i D(,)-stabilan ako, i samo ako je matrični par (, 1/ − /) regularan, kauzalan i stabilan. Primenjujući **Teoremu 5** za proveru apsolutne stabilnosti matričnog para (, 1/ − /) lako je kompletiran dokaz.

Napomena 6. Zadati disk D(,) ne mora da bude centriran na realnoj osi. Kada $\in$ ***C*** jednačine (63 i 64) u **Posledici 3** preinačuju se u uslov za postojanje hermitske matrice takve, da važe sledeće nejednačine:

$$(| \ |^2 - \ ^2) \ ^T \ \ ^T \ < - \ ^T \ \ ^T \quad (65)$$

$$^T \ \geq 0 \quad (66)$$

Zaključak

Da bi se obezbedila asimptotska stabilnost autonomnog linearnog diskretnog deskriptivnog sistema nije dovoljno samo da sopstvene vrednosti matričnog para leže unutar diska jediničnog radijusa u kompleksnoj ravni već je potrebno obezbediti i neimpulsno ponašanje razmatranog sistema u celini. Nekoliko različitih prilaza, izloženih u ovom radu, formiraju različite kriterijume za utvrđivanje stabilnosti, i asimptotske stabilnosti ove klase sistema u smislu Ljapunova.

Iscrpan prikaz analognih rezultata za dat je u ć [22]

Dodatak A

č

Matrična mera $\mu($ $)$ date matrice poseduje sledeća svojstva:

$$-\| \ \| \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \mu(\ ) \leq \| \ \| \quad (A1)$$

$$\mu(\ ) = \frac{1}{2} \lambda_{\max}(\quad) \quad (A2)$$

Definicija i detaljan pregled osnovnih osobina matrične mere mogu se naći u ć ć [23].

Dodatak B

Osobina razmatranog singularnog (deskriptivnog) sistema jednačina direktno zavisi od matrica i . Ako postoji jedinstveno rešenje, ono će da se dobije uz korišćenje odgovarajućih početnih uslova. Izbor početnih uslova određuje pojavu ili eksponencijalnih ili impulsnih modova. U praksi se teži eksponencijalnim modovima koji garantuju tzv. "glatka rešenja" bez pikova, odnosno impulsa. Za početne uslove koji generišu "glatka" rešenja, kaže se da su konzistentni (saglasni).

Impulsno kretanje singularnih sistema može da se javi i u slobodnom radnom režimu, kada se dozvole proizvoljni početni uslovi. U nastavku rada će se dati postupak za ispitivanje singularnih sistema u pogledu broja eksponencijalnih i impulsnih modova u izrazu za kretanje singularnog sistema. Izlaganja koje slede, prvenstveno se oslanjaju na rad [24] i delimično na rad [5]

U ovim razmatranjima se polazi od standardnog opisa singularnog sistema:

$$\dot{\mathbf{x}}(\ ) = \ \mathbf{x}(\ ) + \ \mathbf{u}(\ ) \quad (B1)$$

$$\mathbf{x}(\ ) = \ \mathbf{x}(\ ), \quad \geq 0 \quad (B2)$$

gde $\mathbf{x}(\ ) \in \Re$, $\mathbf{u}(\ ) \in \Re$ i $\mathbf{x} \in \Re$, uz $<$ i odgovarajućim dimenzijama pratećih matrica.

Valja napomenuti, da konzistentni početni uslovi za sistem u slobodnom i prinudnom radnom režimu ne moraju da budu isti.

Ako je $\mathbf{x}(0^-)$ poznato, kao i $\mathbf{u}(\ )$ za ≥ 0, sistem (B1-B2) može da se prevede u kompleksni domen:

$$\mathbf{X}(\ ) = (\ - \ )^{-1}(\ \mathbf{x}(0^-) + \ \mathbf{U}(\ )) \quad (B3)$$

$$\mathbf{X}(\ ) = \ \mathbf{X}(\ ) \quad (B4)$$

a uz pretpostavku da je matrični par (,) i pri nultim početnim uslovima, $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{0}$, može da se oformi i odgovarajuća matrica prenosnih funkcija :

$$(\ ) = \ (\ - \ )^{-1} \quad (B5)$$

Kada je reč o tzv. " " sistemima, odnosno, kada je = , neosporne su sledeće činjenice.

( ) Poznavanje početnih uslova $\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$, potrebno je i dovoljno za iznalaženje rešenja $\mathbf{x}(\ )$, ≥ 0, kada je poznato $\mathbf{u}(\ )$ za ≥ 0. Tada -dimenzionalni vektor početnog stanja može da ima nezavisnih vrednosti. U tom smislu, sistem (B1) ima , a broj označava njegov , odnosno .

( ) Matrica prenosnih funkcija je , što znači da zadovljava uslov:

$$\lim_{\ \to\infty} \ (\ ) \to 0 \quad (B6)$$

( ) Odziv sistema u slobodnom radnom režimu sastoji se od linearne kombinacije eksponencijalnih modova pri tzv. prirodnim ili karakterističnim frekvencijama određenih oblikom, srukturom i položajem korenova karakteristične jednačine det(−) = 0.

Kada je sistem (B1) singularan (deskriptivan), tj.det =0, može da se konstatuje sledeće, a kao poređenje s prethodno iznetim.

$( )_E$ Broj stepeni slobode sistema, odnosno broj nezavisnih vrednosti koje početni vektor $\mathbf{x}(0^-)$ može da uzme, redukovan je na:

$$\stackrel{\Delta}{=} \text{rang} \quad < \tag{B7}$$

pa je broj manji od reda sistema.

$( )_E$ Matrica prenosnih funkcija $( )$ ne mora više da bude striktno svojstvena i obično može da se predstavi u vidu zbira dva sabirka, od kojih prvi ima tu osobinu, a drugi odgovara nekom polinomu po .

$( )_E$ Za slučaj kada je det $= 0$, može da se definiše stepen karakterističnog polinoma matričnog para (,) kao:

$$\text{degree det}(\; - \;) = \; \leq \; < \tag{B8}$$

U ovom slučaju, odziv sistema u slobodnom radnom režimu sadrži, kao i u analognom slučaju, eksponencijalne modove na konačnih učestanosti, ali takođe i (−) impulsnih članova ili (−) modova " č č ".

Da bi se pokazalo postojanje impulsa u rešenju singularnog sistema diferencijalnih jednačina, (B1), dekomponovaće se prostor stanja $\Re$ u dva potprostora, tako da $_1 \oplus \; _2$, pri $_1 = \; _1$. Na ovaj način, dolazi se do Weierstrassove kanoničke forme:

$$\dot{\mathbf{x}}_1( ) = \; \mathbf{x}_1( ) + \; _1\mathbf{u}( ) \tag{B9}$$

$$\dot{\mathbf{x}}_2( ) = \; \mathbf{x}_2( ) + \; _2\mathbf{u}( ) \tag{B10}$$

gde $\mathbf{x}_1( ) \in \Re^{\;1}$, $\mathbf{x}_2( ) \in \Re^{\;2}$, je Jordanov, a nilpotentni matrični oblik indeksa nilpotentnosti ν.

Podsistem (B9) je po [25,26] "spor", jer u osnovi odgovara po formi " " sistemu i ima svoju usporenu dinamiku ograničene učestanosti.

Podsistem (B10) je po [25,26] "brz", jer sadrži nedinamička ograničenja i neograničene je učestanosti, što se posebno vidi iz sistema datog jednačinama (B9 i B10):

$$\mathbf{x}_1( ) = \; \mathbf{x}_1(0) + \int_0 \; ^{(-\tau)} \; _1\mathbf{u}(\tau) \; \tau \tag{B11}$$

$$\mathbf{x}_2( ) = -\sum_{=0}^{\nu-1} \delta^{(-1)}( ) \; \mathbf{x}_2(0) - \sum_{=0}^{\nu-1} \; _2\mathbf{u}^{( )}( ) \tag{B12}$$

gde $\mathbf{u}( )^{( )}( )$ predstavlja -ti izvod funkcije $\mathbf{u}( )$, a $\delta^{(-1)}$, (-1) izvod impulsne funkcije.

Impulsi u (B10) su određeni strukturom matrice $=\text{diag}\left[\; _1, \ldots, \; \right]$. U stvari, svaki $\times$ (>1) nilpotentni blok ima −1 stepeni sobode i određuje (−1) nezavisnih impulsnih kretanja u slobodnom radnom režimu. Očigledno je da su trivijalni (1×1) nilpotentni blokovi predstavljeni samo nedinamičkim algebarskim ograničenjima. Stoga se singularni sistemi sastoje iz č i č č . Dinamika sistema sastoji se od i ponašanja.

I konačno, od posebne važnosti je da se pokaže u kakvom odnosu stoje pitanja singularnih sistema i njihovih pridruženih početnih uslova.

Naime, ako se singularni sistem, (B1) prikaže u svojoj normalnoj kanoničkoj formi:

$$\begin{bmatrix} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1( ) \\ \dot{\mathbf{x}}_2( ) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} _1 & _2 \\ _3 & _4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1( ) \\ \mathbf{x}_2( ) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} _1 \\ _2 \end{bmatrix}\mathbf{u}( ) \tag{B13}$$

onda je dat (8). Krucijalnu ulogu po tom pitanju ima tada, očigledno, submatrica $_4$. Ako je $_4$ i singularni sistem je . Ovo je uobičajena pretpostavka da bi se ispoštovao uslov regularnosti, što povlači postojanje i jedinstvenost rešenja. Ova pretpostavka garantuje da neće biti ni impulsnih članova u kretanju sistema za proizvoljne početne uslove, s obzirom na činjenicu da se tada singularni sistem redukuje na "normalni" nešto nižeg reda.

Nasuprot tome, može da se pokaže da, ako je $_4$ singularna, onda sistem (ako je rešljiv) poseduje impulse u svom kretanju u slobodnom radnom režimu, a za posebno izabrane početne uslove, [24]

Jasno razgraničenje koji uslovi vode u eksponencijalno ili impulsno rešenje, najbolje može da se sagleda, ako se razmatrani singularni sistem prvo prevede u svoju č , a zatim podvrgne preispitivanju postojećih modova, [27]

Kao što je već ranije bilo rečeno, singularni sistem sadrži tri vrste modova: č č , č č i č č .

č č modovi generišu impulsno ponašanje singularnog sistema, koje je nepoželjno. Postavlja se pitanje, kako ih prvo , a zatim, po mogućnosti minimizirati ili ih potpuno ukloniti. Izlaganja koja slede baviće se samo prvopostavljenim pitanjem.

Uticaj č na dinamičko ponašanje sistema može da se, relativno lako, sagleda preko tzv. č matričnog para (−). Oni se definišu kao , pri λ=0 matričnog para ($-\lambda$), [27].

Definicija B1. č .

(i) č matričnog para (sE − A), , zadovoljavaju :

$$\mathbf{v}^1 = \mathbf{0} \tag{B14}$$

(ii) č matričnog para (sE − A), (≥2), koji odgovaraju i-tom č , zadovoljavaju:

$$\mathbf{v}^{\;+1} = \; \mathbf{v} \tag{B15}$$

Sada se mogu dati sledeći rezultati.

Lema B1.

(i) Postoji ($-\pi$) č 1 matričnog para (−), u oznaci: $\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_{(-\pi)}^1$.

(ii) Ako je:

$$\text{degree det}(\; - \;) = \tag{B16}$$

tada postoji nezavistan skup od (π −) nezavisnih č (≥2) matričnog para (−), u oznaci: $\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^3, \ldots, \mathbf{v}_1^{\;1}, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_2^3, \ldots, \mathbf{v}_2^{\;2}, \mathbf{v}_\mu^2, \mathbf{v}_\mu^3, \mathbf{v}_\mu^{\;\mu}$, gde je indeks $\mu \leq$ ($-\pi$).

Tada postoji i $\times(-)$ matrica oformljena od kolona vektora **v** kao i (−)×(−) Jordanova forma nilpotentne matrice koje zadovoljavaju:

(B17)

(iii) Postoji i (×) matrica sa linearno nezavisnim kolonama, kao i (×) Jordanova forma matrice Λ koje zadovoljavaju:

Λ (B18)

Dokaz, zbog svoje složenosti, prevazilazi obim ovih izlaganja i može da se nađe u
[28]

Na osnovu prethodne mogu se izvući sledeći zaključci:

- Kolone matrice razapinju matrice (−), koji odgovara č , tj. taj prostor odgovara matričnog para (,), za $\lambda = 0$.
- Kolone matrice razapinju sopstveni prostor matrice (−), koji odgovara konačnim sopstvenim vrednostima, matričnog para (,). Ove konačne sopstvene vrednosti su dijagonalni elementi matrice Λ.

Definicija B2. č č

(i) č matričnog para (sE−A), , razapinju prostor nedinamičkog rešenja sistema, (B1); odgovarajuće č matrice (sE−A) su nedinamički modovi sistema, (B1).

(ii) č matričnog para (sE − A), , (k ≥ 2), razapinju prostor rešenja sistema, datog jed.(B1); odgovarajuće č matrice (sE−A) su č č ili sistema, (B1).

(iii) Matrica W razapinje prostor ili tzv č č sistema, datog (B1); dijagonalni elementi matrice Λ su č č sistema (B1).

č su beskonačne sopstvene vrednosti matrice (sE − A) pridruženi pravcima deskriptivnog vektora u kojima postoji čisto algbarska zavisnost između promenljivih stanja (deskriptivnog vektora stanja), vektora ulaza i vektora izlaza. Prostor nedinamičkih rešenja razapinje nulti prostor matrice E. Dinamički modovi u beskonačnosti su beskonačne sopstvene vrednosti matrice (sE − A) pridruženi pravcima u kojima deskriptivni vektor može da poprimi zahvaljujući odgovarajućem početnom uslovu pri nultoj vrednosti ulazne veličine.

Imajući u vidu prethodne činjenice i **Lemu B1** mogu se dati sledeći rezultati koji objedinjuju sva prethodna razmatranja.

Lema B2. Neka je matrični par (E, A) Tada:

(i) Sve č regularnog matričnog para (sE − A) koje nisu pridružene dinamičkim modovima beskonačne učestanosti su pridružene nedinamičkim modovima.

(ii) Broj (konačnih i beskonačnih) dinamičkih modova sistema, (B1), je rangu matrice E.

(iii) Broj konačnih nedinamičkih modova sistema, jed.(B.1), −

Lema B3. Pretpostavimo da je sistem, dat jed.(B1), preveden na svoju SVD kanoničku formu. Tada, ako je 22 , važi:

(i) Matrični par ( ) je .

(ii) Sistem, dat jed. (B1) ne poseduje impulsne modove.

Dodatak C

č

Sa ℵ(F) i $\mathscr{R}(\mathrm{F})$ označavaju se nulti prostor (jezgro) i domen ili područje vrednosti operatera , sledstveno, tj.:

$$\aleph(\mathrm{F}) = \{\mathbf{x}\colon \mathrm{F}\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \forall\ \mathbf{x} \in \Re\ \} \quad \text{(C1)}$$

$$\mathscr{R}(\mathrm{F}) = \{\mathbf{y} \in \Re\ ,\ \mathbf{y} = \mathrm{F}\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \Re\ \} \quad \text{(C2)}$$

pri čemu važi:

$$\dim \aleph(\mathrm{F}) + \dim \mathscr{R}(\mathrm{F}) = \mathrm{n} \quad \text{(C3)}$$

Literatura

[1] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., KORUGA,Đ., MILINKOVIĆ,S.A,. JOVANOVIĆ,M.B. Neljapunovska stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema. č č 2001, vol.LI, no.1, p.5.

[2] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., DRAKULIĆ, V., JOVANOVIĆ, M.B., PAVKOVIĆ,B. Generalisani inverzi u teoriji i primeni u linearnim singularnim sistemima. č č (2001.b).

[3] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., DRAKULIĆ,V., JOVANOVIĆ,M.B. O nekim specifičnim osobinama linearnih diskretnih deskriptivnih sistema. č č (2001.c).

[4] BAJIĆ,V.B. , Shades Technical Publications. Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[5] CAMPBELL,S.L. . Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[6] CAMPBELL,S.L. . Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[7] LEWIS,F.L. A Survey of Linear Singular Systems. , **5** (1) (1986) 3–36.

[8] LEWIS,F.L. Proc. Int. Symp. on Sing. Syst. Atlanta, GA (1987) 20–24.

[9] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ, M.B. . MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic 1996.a.

[10] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ, JOVANOVIĆ,M.B. GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[11] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A. GIP Kultura, Beograd, 1998.a.

[12] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Consistency and Liapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Approach. (1985), no.2, p.139-151.

[13] ERIĆ,T., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. Existence of Solutions Convergent to the Origin of Phase Space and Quantitative Measures of Robustness of Linear Discrete-Time Singular Systems. , Novi Sad, YU (1995) 256–262.

[14] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., ERIĆ,T., MILINKOVIĆ,S.A. Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Systems. , (1998.b) (15**)** 53-62.

[15] PANDOLFI,L. Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential Equations. , **30** (4) (1980) 601–620.

[16] SYRMOS,V.L., MISRA,P, ARIPIRALA,R. On the Discrete Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor System. (31), (1995), 297-301.

[17] MILIĆ,M.M., BAJIĆ,V.B. Solution Behavior of Semi-State Model for Large-Scale Time-Discrete Systems. , Sarajevo, Yugoslavia (1984) 106–111.

[18] DAI,L. . Springer Verlag, Berlin, 1989.

[19] HSIUNG,K.L., LEE,L. Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemma for Discrete-time Descriptor Systems. ., (**146**), no.4, July (1999), 327 - 331.

[20] BAJIĆ,V.B. . Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

[21] XU,S., YANG,C. Stabilization of Discrete-time Singular Systems: a Matrix Inequality Approach. (35), (1999), 1613 - 1617.

[22] DEBELJKOVIĆ D.LJ., DRAKULIĆ,V, JOVANOVIĆ,M.B. Stabilnost Linearnih Autonomnih Singularnih Sistema u Smislu Ljapunova: Retrospektiva rezultata. č č (2001).

[23] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A. č GIP Kultura, Beograd, 1999.

[24] VERGHESE,G.C., LEVY,B.C., KAILATH,T. A Generalized State-Space for Singular Systems. ., **AC-26** (4) (1981) 811–831.

[25] COBB,D. Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation. ., **AC-28** (5) (1983.a) 601–611.

[26] COBB,D. A Further Interpretation of Inconsistent Initial Conditions in Descriptor-Variable Systems. ., **AC-28** (9) (1983.b) 920–922.

[27] BENDER,D.J., LAUB,A,J. The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems. ., **AC-32** (8) (1987) 672–688.

[28] LEWIS,F.L., OZCALDRIAN,K. Reachability and Controllability for Descriptor Systems", , Morgantown, WV (1984).

[29] CAMPBELL,S.L., MEYER,C.D., ROSE,N.J. Application of Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations. , **31** (1976) 411–425.

[30] , Special Issue on Semistate Systems, **5** (1) (1986).

[31] , Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, **8** (3) (1989).

[32] DIHOVIČNI,Đ.N., ERIĆ,T.N., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANOVIĆ,M.B. Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Discrete Descriptor Szstems. Leon (Spain), July 5 - 7, (1996), 367 - 371.

[33] LEWIS,F.L., OZCALDRIAN,K. The Relative Eigenstructure Problem and Descriptor Systems. , Denver, CO (1983).

[34] MULLER,P.C. Stability of Linear Mechanical Systems with Holonomic Constraints. (11), part 2, November (1983), pp. 160 - 164.

[35] TSENG,H.C., KOKOTOVIĆ,P.V. Optimal Control in Singularly Perturbed Systems: The Integral Manifold Approach. , Austin, TX (1988) 1177–1181.

[36] ZHANG,Q., DAI,G., LAM,J., ZHANG,L.Q., DE LA SEN,M. Asymptotical Stability and Stabilization of Descriptor Systems", vol. 24 (2), (1998), p. 208 - 211.

[37] ZHANG,Q., LAM,J., ZHANG,L.Q. Lzapunov and Riccati Equations of Discrete-Time Descriptor Systems. ., **AC-44** (11) (1999) 2134 – 2139.

Rad primljen: 16.4.2001.god.

Liapunov stability of linear discrete descriptive systems: retrospective of results

Descriptive systems are mathematically presented as a combination of difference and algebraic equations, the latter being a constraint which a general solution ought to satisfy at any moment. There are descriptive systems in almost all engineering branches but they are less frequent than continual ones. They frequently occur in electromagnetic fields, optimization problems, continuous system discretization procedures and in the boundary case of singularly-perturbed systems. A detailed, chronological survey of results concerning Liapunov stability of this system class is given in the paper.

: **discrete systems, descriptive systems, Liapunov stability, matrix Liapunov equation, characteristic of attracting zero equilibrium state.**

Stabilité des systèmes descriptifs, discrets, linéaires de Liapunov: rétrospective des résultats

Les systèmes descriptifs sont présentés mathématiquement par la combinaison des équations de différence et des équations algébriques qui présentent une restriction que la solution générale doit satisfaire à chaque moment. Il y a des systèmes descriptifs dans tous les domaines techniques mais à un moindre degré que des systèmes continus. Ils se trouvent souvent dans les circuits électromagnétiques, les problèmes d'optimisation les procédés de discrétisation des systèmes sontinus et dans le cas limite des systèmes singulièrement perturbés. Ce paper donne une présentation détaillée et chronologique des résultats concernant la stabilité de Liapunov de cette classe de systèmes.

: **systèmes discrets, systèmes descriptifs, stabilité de Liapunov, équation matricielle de Liapunov, caractéristique d'attirer l'état d'équilibre zéro.**