UDK: 519.2.(047)=861
COSATI: 12-01

Određivanje vrednosti tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele

Dr Dragoljub M. Brkić, dipl.inž.[1)]

Obrađena je metoda kvantila za određivanje tačkastih i intervalnih ocena parametara dvoparametarske Vejbulove raspodele. Na osnovu mnoštva dobijenih pojedinačnih ocena parametara raspodele, pokazano je kako se dobijaju i njihove „srednje” vrednosti. Radi lakšeg izračunavanja tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele, ovde su priložene i tablice koeficijenata potrebnih za ova izračunavanja. S dva primera ilustrovana je praktična primena opisane metode.

Ključne reči: **Vejbulova raspodela, metoda kvantila, tačkaste i intervalne ocene, „srednje” vrednosti.**

U v o d

ZA određivanje tačkastih ocena parametara raspodele slučajne promenljive postoji više metoda, a to su: metoda maksimalne verodostojnosti, metoda momenata, metoda najmanjih kvadrata i metoda kvantila. Međutim, za određivanje intervalnih ocena ovih parametara postoji nekoliko metoda, koje su znatno složene. Ovde je izložena metoda kvantila pomoću koje se određuju tačkaste i intervalne ocene parametara Vejbulove raspodele. Pošto ova metoda, za isti skup podataka, zavisno od izbora vrednosti funkcije raspodele daje različite vrednosti za tačkaste i intervalne ocene, to je pogodno da se za stabilniju ocenu ovih parametara uzme „srednja” vrednost iz mnoštva dobijenih tačkastih ili intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele.

Ovde je razmatrana dvoparametarska Vejbulova raspodela. Međutim, metoda kvantila za određivanje tačkastih i inervalnih ocena može da se primeni i na troparametarsku Vejbulovu raspodelu, ali se mora odrediti parametar položaja, a zatim redukovati troparametarsku u dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu.

Za proveru valjanosti metode kvantila, pogodno je koristiti generator pseudoslučajnih brojeva koji imaju Vejbulovu raspodelu s unapred zadatim vrednostima parametara. Tako dobijene vrednosti za tačkaste i intervalne ocena parametara raspodele lako se mogu upoređivati s odgovarajućim tačnim ili „stvarnim” vrednostima parametara Vejbulove raspodele.

Zbog složenosti izračunavanja tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele metodom kvantila, neophodna je primena elektronskog računara, tj. specijalnih računarskih programa. Radi lakšeg izračunavanja tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele, u radu su date tablice potrebnih koeficijenata, koje pojednostavljuju proračune.

Teorijska razmatranja

Tačkaste ocene parametara raspodele

Funkcija Vejbulove raspodele:

$$F(t) = 1 - e^{\frac{t}{\ }} \tag{1}$$

gde je β parametar oblika, a η parametar razmere, može se transformisati u sledeći oblik:

$$\ln \frac{t}{\ } = \ln \ln \frac{1}{1 - F(t)} \tag{2}$$

Usvajanjem dve vrednosti funkcije raspodele $F(t)$: F_1 *i* F_2 kojima, respektivno, odgovaraju dve vrednosti slučajne promenljive t: t_1 i t_2, tj. $F_1=F(t_1)$ i $F_2=F(t_2)$, iz izraza (2), dobijaju se sledeće dve jednakosti:

$$\ln \frac{t_1}{\ } = \ln \ln \frac{1}{1 - F_1} \tag{3}$$

$$\ln \frac{t_2}{\ } = \ln \ln \frac{1}{1 - F_2} \tag{4}$$

Za poznate vrednosti F_1 i F_2, kao i t_1 i t_2, rešavanjem izraza (3 i 4) po β i η, dobijaju se tačkaste ocene ovih parametara:

$$\hat{\ } = \frac{K_2 - K_1}{\ln \frac{t_2}{t_1}} \tag{5}$$

$$\hat{\ } = \left(\frac{t_2^{K_1}}{t_1^{K_2}}\right)^{\frac{1}{K_1 - K_2}} \tag{6}$$

gde je:

[1)] Tehnički opitni centar, 11000, Beograd, Vojvode Stepe 445

$$K_1 = \ln\ln \frac{1}{1-F_1}$$

$$K_2 = \ln\ln \frac{1}{1-F_2}$$

Za usvojene vrednosti F_1 i F_2, vrednosti za t_1 i t_2 određuje se na sledeći način. Dobijene vrednosti slučajne promenljive urede se u rastućem poretku:

$$_1 \quad _2 \cdots \quad _{n-1} \quad _n$$

gde je n ukupan broj vrednosti ili realizacija slučajne promenljive t. Posle ovoga, određuju se rangovi r_1 i r_2 pomoću sledećih izraza:

$$r_1 = \begin{matrix} 1 \quad nF_1 \;;\; nF_1 \quad 1 \\ nF_1 \;;\; nF_1 \quad 1 \end{matrix} \tag{7}$$

$$r_2 = \quad nF_2 \tag{8}$$

gde je Q celobrojna vrednost broja Q .

Najzad, vremena t_1 i t_2 određuju se pomoću sledećih aproksimativnih izraza:

$$t_1 = \frac{_{r_1-1} + \; _{r_1} + \; _{r_1+1}}{3} \tag{9}$$

$$t_2 = \frac{_{r_2-1} + \; _{r_2} + \; _{r_2+1}}{3} \tag{10}$$

gde je τ_j po redu j-ta vrednost u uređenom nizu realizovanih vrednosti slučajne promenljive t.

Vrednosti t_1 i t_2, kada je n veliko ($n \geq 30$), mogu se odrediti pomoću histograma kao empirijski donji kvantili slučajne promenljive t, tj.:

$$t_1 \quad t_{F_1} \tag{11}$$

$$t_2 \quad t_{F_2} \tag{12}$$

Intervalne ocene parametara raspodele

Granice poverenja za parametar oblika β, i parametar razmere η dvoparametarske Vejbulove raspodele, koji su određeni metodom kvantila [1], date su sledećim izrazima:

$$_1 = \frac{k_{22}k_{21} - k_{11}k_{12}}{k_{11} + k_{22} \quad \ln t_2 - \ln t_1} \tag{13}$$

$$_2 = \frac{k_{22}k_{21} - k_{11}k_{12}}{k_{12} + k_{21} \quad \ln t_2 - \ln t_1} \tag{14}$$

$$_1 = \exp \quad \frac{k_{12} \quad k_{11} + k_{22} \quad \ln t_2 - k_{22} \quad k_{12} + k_{21} \quad \ln t_1}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}} \tag{15}$$

$$_2 = \exp \quad \frac{k_{11} \quad k_{12} + k_{21} \quad \ln t_2 - k_{21} \quad k_{11} + k_{22} \quad \ln t_1}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}} \tag{16}$$

gde je:

$$k_{11} = \ln\ln \frac{1}{1-F_{11}}$$

$$k_{12} = \ln\ln \frac{1}{1-F_{12}}$$

$$k_{21} = \ln\ln \frac{1}{1-F_{21}}$$

$$k_{22} = \ln\ln \frac{1}{1-F_{22}}$$

U gornjim izrazima, F_{11}; F_{12}; F_{21} i F_{22} su granice poverenja za funkciju raspodele $F(t)$; za t=t_1 i t=t_2. Ove granice poverenja određuju se pomoću granica poverenja za nepoznatu verovatnoću p=$P(A)$, gde je A posmatrani događaj. Granice poverenja su date sledećim izrazima:

$$p_1 = 1 - x_{n-r;r+1;\; _1} \tag{17}$$

$$p_2 \quad x_{r+1;n-r;\; _2} \tag{18}$$

gde su $x_{n-r;r+1;\alpha 1}$ i $x_{r+1;n-r;\,\alpha 2}$ gornji kvantili beta raspodele, n je ukupan broj vrednosti koje je uzela slučajna promenljive t, r je rang ili ukupan broj vrednosti slučajne promenljive t koje su manje ili jednake t_1 (ili t_2), α_1 i α_2 su donji i gornji rizik, respektivno.

Kada je t=t_1, granice poverenja za F_1 su:

$$F_{11} = p_{11} = 1 - x_{n-r_1;r_1+1;\; _1} \tag{19}$$

$$F_{12} = p_{12} = x_{r_1+1;n-r_1;\; _2} \tag{20}$$

Takođe, kada je t=t_2, granice poverenja za F_2 su:

$$F_{21} = p_{21} = 1 - x_{n-r_2;r_2+1;\; _1} \tag{21}$$

$$F_{22} \quad p_{22} \quad 1 - x_{n-r_2;r_2 \; 1;\; _1} \tag{22}$$

Vrednosti brojeva n i r_1, odnosno r_2 moraju biti takve da obezbede sledeće uslove: F_{12}<0.623 i F_{21}>0.623.

Ako se u izrazima (13 i 14) izvrše sledeće izmene:

$$B_1 = \frac{k_{22}k_{21} - k_{11}k_{12}}{k_{11} + k_{22}}$$

$$B_2 = \frac{k_{22}k_{21} - k_{11}k_{12}}{k_{12} + k_{21}}$$

a $\ln(t_2/t_1)$ zameni izrazom (5), dobijaju se granice poverenja za parametar oblika β, kao proizvod tačkaste ocene ovog parametra i jednog koeficijenta, tj.:

$$_1 = b_1 \; \hat{} \tag{23}$$

$$_2 = b_2 \; \hat{} \tag{24}$$

gde je:

$$b_1 = \frac{B_1}{K_2 - K_1}$$

$$b_2 = \frac{B_2}{K_2 - K_1}$$

Za usvojene vrednosti funkcije raspodele $F(t)$: F_1=0.20 i F_2=0.80 i usvojene vrednosti rizika α_1= α_2=0.005; 0.100, u tablici 1 date su vrednosti koeficijenata b_1 i b_2 kao funkcije od ukupnog broja n, vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva t.

Slično je i u slučaju uvođenja sledećih izmena:

$$E_{11} = \frac{k_{12}\ \ k_{11} + k_{22}}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}}$$

$$E_{12} = -\frac{k_{22}\ \ k_{12} + k_{21}}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}}$$

$$E_{21} = \frac{k_{11}\ \ k_{12} + k_{21}}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}}$$

$$E_{22} = -\frac{k_{21}\ \ k_{11} + k_{22}}{k_{11}k_{12} - k_{21}k_{22}}$$

u izraze (15 i 16), pa se dobija:

$$_1 = \exp\ \ E_{11}\ln t_2 + E_{12}\ln t_1 \qquad (25)$$

$$_2 = \exp\ \ E_{21}\ln t_2 + E_{22}\ln t_1 \qquad (26)$$

ili

$$_1 = t_1^{E_{12}}\, t_2^{E_{11}} \qquad (27)$$

$$_2 = t_1^{E_{22}}\, t_2^{E_{21}} \qquad (28)$$

Na osnovu izraza (3,4 i 6) i zamenom t_1 i t_2 u izrazima (25 i 26), dobijaju se granice poverenje za parametar razmere η, kao funkcije od određenih koeficijenata i tačkastih ocena parametara β i η, tj.:

$$_1 = \hat{}\ \exp\ \frac{e_1}{\hat{}} \qquad (29)$$

$$_2 = \hat{}\ \exp\ \frac{e_2}{\hat{}} \qquad (30)$$

gde je:

$$e_1 = E_{11}K_2 + E_{12}K_1$$

$$e_2 = E_{21}K_2 + E_{22}K_1$$

Za usvojene vrednosti funkcije raspodele $F(t)$: F_1=0.20 i F_2=0.80 i usvojene vrednosti rizika $\alpha_1 = \alpha_2$=0.005; 0.025; 0.050; 0.100, u tablici 2, date su vrednosti koeficijenata e_1 i e_2 kao funkcije od ukupnog broja n, vrednosti koje je uzela slučajna promenljiva t.

„Srednje" tačkaste i intervalne ocene parametara raspodele

Tačkaste i intervalne ocene parametara β i η Vejbulove raspodele, određene metodom kvantila, zasnovane su na skupu od n vrednosti slučajne promenljive t koje su uređene u rastućem poretku i na dvema usvojenim vrednostima funkcije raspodele $F(t)$: F_1 i F_2. Za isti skup vrednosti slučajne promenljive t, ako se menjaju vrednosti za F_1 i F_2, dobijaće se različite vrednosti za tačkaste i intervalne ocene parametara β i η.

Vrednost za F_1 ne treba da bude ni suviše mala, a ni suviše velika. Istraživanja su pokazala da bi vrednost za F_1 trebalo da bude između 0.15 i 0.25, tj. $F_1\ \ 0.15;0.25$. Takođe, pogodno je da se postavi veza između F_1 i F_2, tako da je F_2=1-F_1, odakle proizlazi da vrednost F_2 treba da bude između 0.75 i 0.85, tj. $F_2\ \ 0.75;0.85$.

Ako se odabere N vrednosti za F_1, odnosno F_2, tada se dobije N vrednosti za tačkaste i intervalne ocene parametara β i η, na osnovu kojih se mogu dobiti „srednje" vrednosti ovih ocena, tj.:

$$\bar{\hat{}} = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ \hat{}_i \qquad (31)$$

$$\bar{\hat{}} = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ \hat{}_i \qquad (32)$$

$$\bar{}_1 = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ {}_{1i} \qquad (33)$$

$$\bar{}_2 = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ {}_{2i} \qquad (34)$$

$$\bar{}_1 = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ {}_{1i} \qquad (35)$$

$$\bar{}_2 = \frac{1}{N}\ {}_{i=1}^{N}\ {}_{2i} \qquad (36)$$

Ovako dobijene „srednje" vrednosti za tačkaste i intervalne ocene parametara β i η su stabilnije od pojedinačnih ocena, iako pojedinačne ocene u nekim slučajevima, sasvim slučajno, mogu da budu bliže stvarnim vrednostima odgovarajućih parametara.

Primeri

Primer 1

Za „stvarne" vrednosti parametara Vejbulove raspodele: β=2.5 i η=1000, pomoću računara je generisano sledećih n=15 pseudoslučajnih brojeva koji su uređeni u rastućem poretku:

228.380 457.847 550.926 662.379 681.850 839.367 883.146 989.038

1064.343 1165.594 1250.757 1338.557 1348.613 1556.626 1643.274

Pri usvojenim vrednostima funkcije raspodele F_1=0.20 i F_2=0.80 odrede se tačkaste ocene parametara β i η, a zatim pri usvojenim rizicima $\alpha_1 = \alpha_2$=0.05 odrede se granice poverenja za parametre β i η.

Rešenje:

Pomoću izraza (7 i 8) određeni su rangovi r_1=3 i r_2=12. Pomoću izraza (9 i 10) određena su vremena t_1 i t_2:

t_1 = (457.847 + 550.926 + 662.379)/3 = 557.051
t_2 = (1250.757 + 1338.557 + 1348.613)/3 = 1312.642

Na osnovu izraza (5 i 6), u kojima je K_1=–1.5 i

K_2=0.476, dobijene su tačkaste ocene parametara β i η:
$\hat{\ }$ =2.3053 i $\hat{\ }$ =1067.762.

Tabela 1. Vrednosti koeficijenata β_1 i β_2 granica poverenja za parametar oblika Vejbulove raspodele

F_1=0.2000 F_2=0.8000

α1 = α2	0.0050		0.0250		0.0500		0.1000	
n	b1	b2	b1	b2	b1	b2	b1	b2
5								
6							0.289229	1.112942
7							0.359979	1.134780
8							0.412672	1.147934
9							0.454102	1.156412
10							0.487895	1.161994
11							0.516199	1.165655
12							0.540384	1.167985
13							0.561376	1.169370
14							0.579831	1.170068
15					0.506978	1.171178	0.596225	1.170260
16					0.523771	1.176094	0.610918	1.170075
17					0.539020	1.179798	0.624186	1.169609
18					0.552949	1.182565	0.636245	1.168930
19					0.565738	1.184596	0.647268	1.168092
20					0.577534	1.186046	0.657394	1.167135
21					0.588460	1.187030	0.666739	1.166090
22					0.598617	1.187641	0.675397	1.164980
23			0.545285	1.190957	0.608090	1.187950	0.683449	1.163824
24			0.555143	1.193172	0.616953	1.188014	0.690960	1.162635
25			0.564414	1.194929	0.625268	1.187877	0.697989	1.161425
26			0.573152	1.196300	0.633089	1.187577	0.704584	1.160204
27			0.581406	1.197347	0.640462	1.187144	0.710787	1.158978
28			0.589220	1.198120	0.647429	1.186599	0.716637	1.157753
29			0.596631	1.198660	0.654025	1.185966	0.722163	1.156532
30			0.603672	1.199001	0.660281	1.185259	0.727396	1.155321
31			0.610372	1.199173	0.666225	1.184492	0.732360	1.154119
32			0.616759	1.199199	0.671883	1.183676	0.737076	1.152932
33			0.622855	1.199102	0.677276	1.182822	0.741564	1.151759
34			0.628682	1.198897	0.682424	1.181936	0.745842	1.150602
35			0.634258	1.198601	0.687344	1.181026	0.749926	1.149463
36			0.639602	1.198226	0.692054	1.180097	0.753829	1.148341
37			0.644728	1.197783	0.696567	1.179153	0.757565	1.147237
38			0.649651	1.197282	0.700896	1.178200	0.761144	1.146151
39			0.654384	1.196732	0.705054	1.177239	0.764578	1.145084
40			0.658938	1.196138	0.709051	1.176275	0.767875	1.144034
41			0.663325	1.195508	0.712897	1.175309	0.771045	1.143004
42			0.667554	1.194846	0.716602	1.174344	0.774095	1.141992
43			0.671634	1.194159	0.720174	1.173382	0.777032	1.140998
44	0.584614	1.211992	0.675575	1.193449	0.723620	1.172422	0.779864	1.140021
45	0.589246	1.212402	0.679383	1.192720	0.726948	1.171468	0.782596	1.139063
46	0.593733	1.212719	0.683065	1.191976	0.730164	1.170520	0.785234	1.138122
47	0.598082	1.212951	0.686630	1.191218	0.733274	1.169579	0.787783	1.137197
48	0.602300	1.213106	0.690081	1.190451	0.736284	1.168645	0.790247	1.136289
49	0.606393	1.213192	0.693426	1.189675	0.739198	1.167720	0.792633	1.135398
50	0.610366	1.213215	0.696670	1.188894	0.742023	1.166803	0.794942	1.134523

nastavak tabele 1

α1 = α2	0.0050		0.0250		0.0500		0.1000	
n	b1	b2	b1	b2	b1	b2	b1	b2
51	0.614227	1.213181	0.699817	1.188107	0.744762	1.165896	0.797180	1.133663
52	0.617979	1.213096	0.702872	1.187317	0.747419	1.164997	0.799350	1.132818
53	0.621629	1.212962	0.705840	1.186525	0.749999	1.164109	0.801455	1.131989
54	0.625179	1.212787	0.708724	1.185732	0.752504	1.163231	0.803498	1.131174
55	0.628635	1.212573	0.711529	1.184940	0.754940	1.162363	0.805483	1.130373
56	0.632002	1.212323	0.714257	1.184148	0.757308	1.161504	0.807411	1.129587
57	0.635281	1.212042	0.716913	1.183359	0.759611	1.160657	0.809286	1.128813
58	0.638479	1.211732	0.719499	1.182572	0.761853	1.159819	0.811110	1.128053
59	0.641596	1.211395	0.722019	1.181788	0.764036	1.158992	0.812885	1.127306
60	0.644638	1.211035	0.724474	1.181008	0.766163	1.158175	0.814614	1.126572
61	0.647606	1.210653	0.726869	1.180232	0.768236	1.157368	0.816298	1.125849
62	0.650504	1.210251	0.729204	1.179460	0.770257	1.156571	0.817938	1.125139
63	0.653335	1.209832	0.731483	1.178693	0.772228	1.155784	0.819538	1.124440
64	0.656100	1.209396	0.733708	1.177931	0.774152	1.155008	0.821098	1.123753
65	0.658803	1.208946	0.735881	1.177175	0.776030	1.154241	0.822620	1.123077
66	0.661445	1.208483	0.738003	1.176424	0.777864	1.153484	0.824106	1.122412
67	0.664029	1.208008	0.740078	1.175679	0.779655	1.152736	0.825557	1.121757
68	0.666558	1.207523	0.742105	1.174940	0.781405	1.151999	0.826974	1.121112
69	0.669032	1.207028	0.744088	1.174207	0.783117	1.151271	0.828358	1.120478
70	0.671454	1.206525	0.746028	1.173480	0.784790	1.150552	0.829712	1.119854
71	0.673826	1.206014	0.747926	1.172759	0.786426	1.149842	0.831035	1.119239
72	0.676149	1.205496	0.749784	1.172045	0.788028	1.149141	0.832330	1.118633
73	0.678424	1.204973	0.751603	1.171337	0.789595	1.148449	0.833597	1.118037
74	0.680655	1.204445	0.753384	1.170636	0.791130	1.147766	0.834836	1.117449
75	0.682841	1.203911	0.755129	1.169941	0.792633	1.147092	0.836049	1.116871
76	0.684985	1.203375	0.756839	1.169254	0.794105	1.146426	0.837237	1.116301
77	0.687087	1.202835	0.758515	1.168572	0.795548	1.145768	0.838401	1.115739
78	0.689150	1.202292	0.760158	1.167896	0.796962	1.145119	0.839542	1.115185
79	0.691173	1.201747	0.761770	1.167227	0.798348	1.144478	0.840659	1.114639
80	0.693159	1.201200	0.763351	1.166565	0.799707	1.143845	0.841755	1.114101
81	0.695109	1.200652	0.764902	1.165909	0.801040	1.143219	0.842829	1.113571
82	0.697023	1.200102	0.766424	1.165259	0.802349	1.142601	0.843883	1.113048
83	0.698903	1.199552	0.767918	1.164616	0.803633	1.141991	0.844917	1.112531
84	0.700750	1.199001	0.769384	1.163979	0.804892	1.141389	0.845931	1.112022
85	0.702565	1.198451	0.770824	1.163349	0.806129	1.140793	0.846926	1.111521
86	0.704348	1.197900	0.772239	1.162724	0.807344	1.140204	0.847904	1.111026
87	0.706100	1.197350	0.773629	1.162106	0.808537	1.139623	0.848863	1.110537
88	0.707823	1.196800	0.774994	1.161494	0.809709	1.139049	0.849805	1.110055
89	0.709517	1.196252	0.776336	1.160888	0.810860	1.138482	0.850731	1.109580
90	0.711183	1.195704	0.777656	1.160288	0.811992	1.137921	0.851640	1.109111
91	0.712822	1.195158	0.778953	1.159694	0.813104	1.137366	0.852534	1.108647
92	0.714434	1.194613	0.780228	1.159105	0.814198	1.136819	0.853413	1.108190
93	0.716020	1.194070	0.781483	1.158523	0.815274	1.136278	0.854276	1.107738
94	0.717581	1.193528	0.782717	1.157946	0.816332	1.135742	0.855126	1.107292
95	0.719118	1.192989	0.783931	1.157375	0.817372	1.135213	0.855961	1.106852
96	0.720630	1.192450	0.785125	1.156810	0.818396	1.134690	0.856782	1.106417
97	0.722120	1.191915	0.786302	1.156250	0.819403	1.134173	0.857590	1.105988
98	0.723586	1.191381	0.787459	1.155696	0.820394	1.133662	0.858385	1.105564
99	0.725031	1.190850	0.788599	1.155146	0.821370	1.133156	0.859168	1.105145
100	0.726454	1.190321	0.789721	1.154603	0.822331	1.132656	0.859938	1.104731

Tabela 2. Vrednosti koeficijenata e_1 i e_2 granica poverenja za parametar razmere Vejbulove raspodele

F_1=0.2000 F_2=0,8000

α1 = α2	0.0050		0.0250		0.0500		0.1000	
n	e1	e2	e1	e2	e1	e2	e1	e2
5			-15.0935	25.7532	-2.2996	3.1146	-0.7914	0.4929
6			-2.5131	3.9867	-1.2269	1.4939	-0.6624	0.4135
7	-7.7948	15.5806	-1.5372	2.3338	-0.9256	1.0732	-0.5820	0.3720
8	-3.5031	6.8841	-1.1598	1.7084	-0.7707	0.8696	-0.5238	0.3432
9	-2.3117	4.4713	-0.9542	1.3739	-0.6724	0.7458	-0.4789	0.3209
10	-1.7517	3.3378	-0.8226	1.1633	-0.6028	0.6609	-0.4431	0.3028
11	-1.4258	2.6788	-0.7302	1.0173	-0.5504	0.5984	-0.4136	0.2876
12	-1.2123	2.2477	-0.6612	0.9096	-0.5090	0.5500	-0.3889	0.2746
13	-1.0615	1.9435	-0.6075	0.8265	-0.4754	0.5111	-0.3678	0.2633
14	-0.9491	1.7172	-0.5642	0.7602	-0.4473	0.4791	-0.3496	0.2533
15	-0.8620	1.5423	-0.5285	0.7060	-0.4236	0.4521	-0.3336	0.2445
16	-0.7925	1.4028	-0.4985	0.6606	-0.4030	0.4290	-0.3195	0.2365
17	-0.7357	1.2891	-0.4729	0.6221	-0.3851	0.4090	-0.3070	0.2293
18	-0.6883	1.1945	-0.4506	0.5890	-0.3693	0.3914	-0.2957	0.2227
19	-0.6482	1.1145	-0.4312	0.5601	-0.3553	0.3758	-0.2855	0.2167
20	-0.6137	1.0460	-0.4139	0.5346	-0.3426	0.3618	-0.2762	0.2111
21	-0.5837	0.9866	-0.3985	0.5120	-0.3312	0.3493	-0.2677	0.2060
22	-0.5574	0.9346	-0.3847	0.4918	-0.3209	0.3379	-0.2599	0.2012
23	-0.5341	0.8887	-0.3721	0.4735	-0.3114	0.3275	-0.2527	0.1968
24	-0.5133	0.8478	-0.3607	0.4570	-0.3027	0.3180	-0.2461	0.1927
25	-0.4946	0.8112	-0.3503	0.4419	-0.2946	0.3092	-0.2399	0.1888
26	-0.4777	0.7782	-0.3407	0.4281	-0.2872	0.3011	-0.2342	0.1851
27	-0.4624	0.7483	-0.3318	0.4154	-0.2803	0.2936	-0.2288	0.1817
28	-0.4483	0.7211	-0.3236	0.4037	-0.2738	0.2866	-0.2237	0.1784
29	-0.4355	0.6962	-0.3159	0.3929	-0.2678	0.2800	-0.2190	0.1753
30	-0.4236	0.6733	-0.3088	0.3828	-0.2621	0.2739	-0.2145	0.1724
31	-0.4126	0.6522	-0.3022	0.3734	-0.2568	0.2682	-0.2103	0.1696
32	-0.4024	0.6327	-0.2959	0.3646	-0.2518	0.2628	-0.2063	0.1670
33	-0.3929	0.6145	-0.2900	0.3563	-0.2471	0.2577	-0.2025	0.1645
34	-0.3841	0.5977	-0.2845	0.3485	-0.2426	0.2528	-0.1989	0.1621
35	-0.3758	0.5819	-0.2792	0.3412	-0.2383	0.2483	-0.1955	0.1598
36	-0.3680	0.5672	-0.2743	0.3343	-0.2343	0.2439	-0.1923	0.1576
37	-0.3607	0.5533	-0.2696	0.3278	-0.2305	0.2398	-0.1892	0.1555
38	-0.3538	0.5404	-0.2651	0.3216	-0.2268	0.2359	-0.1862	0.1534
39	-0.3473	0.5281	-0.2608	0.3157	-0.2233	0.2321	-0.1834	0.1515
40	-0.3411	0.5166	-0.2568	0.3102	-0.2200	0.2285	-0.1807	0.1496
41	-0.3352	0.5056	-0.2529	0.3049	-0.2168	0.2251	-0.1781	0.1478
42	-0.3297	0.4953	-0.2492	0.2998	-0.2137	0.2219	-0.1756	0.1461
43	-0.3244	0.4355	-0.2457	0.2950	-0.2108	0.2187	-0.1732	0.1444
44	-0.3193	0.4761	-0.2423	0.2903	-0.2080	0.2157	-0.1709	0.1428
45	-0.3145	0.4672	-0.2390	0.2859	-0.2053	0.2128	-0.1687	0.1412
46	-0.3099	0.4588	-0.2359	0.2817	-0.2027	0.2100	-0.1665	0.1397
47	-0.3055	0.4507	-0.2329	0.2776	-0.2002	0.2074	-0.1645	0.1382
48	-0.3013	0.4430	-0.2300	0.2737	-0.1977	0.2048	-0.1625	0.1368
49	-0.2973	0.4356	-0.2272	0.2699	-0.1954	0.2023	-0.1606	0.1354
50	-0.2934	0.4286	-0.2245	0.2663	-0.1931	0.1999	-0.1587	0.1341

nastavak tabele 2

α1 = α2	0.0050		0.0250		0.0500		0.1000	
n	e1	e2	e1	e2	e1	e2	e1	e2
51	-0.2896	0.4218	-0.2219	0.2628	-0.1910	0.1976	-0.1569	0.1328
52	-0.2860	0.4153	-0.2194	0.2595	-0.1889	0.1953	-0.1552	0.1316
53	-0.2826	0.4091	-0.2170	0.2563	-0.1868	0.1932	-0.1535	0.1303
54	-0.2793	0.4031	-0.2147	0.2531	-0.1848	0.1911	-0.1519	0.1292
55	-0.2761	0.3974	-0.2124	0.2501	-0.1829	0.1890	-0.1503	0.1280
56	-0.2729	0.3918	-0.2102	0.2472	-0.1811	0.1871	-0.1488	0.1269
57	-0.2700	0.3865	-0.2081	0.2444	-0.1793	0.1852	-0.1473	0.1258
58	-0.2671	0.3813	-0.2060	0.2417	-0.1775	0.1833	-0.1458	0.1247
59	-0.2643	0.3763	-0.2040	0.2390	-0.1758	0.1815	-0.1444	0.1237
60	-0.2615	0.3715	-0.2021	0.2364	-0.1742	0.1798	-0.1431	0.1227
61	-0.2589	0.3669	-0.2002	0.2340	-0.1726	0.1781	-0.1417	0.1217
62	-0.2564	0.3624	-0.1984	0.2315	-0.1710	0.1764	-0.1404	0.1207
63	-0.2539	0.3580	-0.1966	0.2292	-0.1695	0.1748	-0.1392	0.1198
64	-0.2515	0.3538	-0.1949	0.2269	-0.1680	0.1732	-0.1379	0.1189
65	-0.2492	0.3497	-0.1932	0.2247	-0.1666	0.1717	-0.1367	0.1180
66	-0.2469	0.3458	-0.1915	0.2225	-0.1652	0.1702	-0.1356	0.1171
67	-0.2447	0.3420	-0.1899	0.2205	-0.1638	0.1688	-0.1344	0.1162
68	-0.2425	0.3382	-0.1883	0.2184	-0.1625	0.1674	-0.1333	0.1154
69	-0.2405	0.3346	-0.1868	0.2164	-0.1612	0.1660	-0.1322	0.1146
70	-0.2384	0.3311	-0.1853	0.2145	-0.1599	0.1646	-0.1312	0.1138
71	-0.2364	0.3277	-0.1839	0.2126	-0.1586	0.1633	-0.1301	0.1130
72	-0.2345	0.3244	-0.1825	0.2108	-0.1574	0.1620	-0.1291	0.1122
73	-0.2326	0.3211	-0.1811	0.2090	-0.1562	0.1608	-0.1281	0.1115
74	-0.2308	0.3180	-0.1797	0.2072	-0.1551	0.1596	-0.1272	0.1108
75	-0.2290	0.3149	-0.1784	0.2055	-0.1539	0.1584	-0.1262	0.1100
76	-0.2273	0.3119	-0.1771	0.2038	-0.1528	0.1572	-0.1253	0.1093
77	-0.2256	0.3090	-0.1758	0.2022	-0.1517	0.1560	-0.1244	0.1086
78	-0.2239	0.3062	-0.1746	0.2006	-0.1507	0.1549	-0.1235	0.1079
79	-0.2223	0.3034	-0.1734	0.1991	-0.1496	0.1538	-0.1226	0.1073
80	-0.2207	0.3007	-0.1722	0.1975	-0.1486	0.1528	-0.1218	0.1066
81	-0.2191	0.2981	-0.1710	0.1960	-0.1476	0.1517	-0.1209	0.1060
82	-0.2176	0.2955	-0.1699	0.1946	-0.1466	0.1507	-0.1201	0.1054
83	-0.2161	0.2930	-0.1688	0.1932	-0.1457	0.1497	-0.1193	0.1047
84	-0.2146	0.2906	-0.1677	0.1918	-0.1447	0.1487	-0.1185	0.1041
85	-0.2132	0.2882	-0.1666	0.1904	-0.1438	0.1477	-0.1178	0.1035
86	-0.2118	0.2858	-0.1656	0.1890	-0.1429	0.1467	-0.1170	0.1029
87	-0.2104	0.2836	-0.1645	0.1877	-0.1420	0.1458	-0.1163	0.1024
88	-0.2091	0.2813	-0.1635	0.1864	-0.1411	0.1449	-0.1155	0.1018
89	-0.2078	0.2791	-0.1625	0.1852	-0.1403	0.1440	-0.1148	0.1012
90	-0.2065	0.2770	-0.1616	0.1839	-0.1394	0.1431	-0.1141	0.1007
91	-0.2052	0.2749	-0.1606	0.1827	-0.1386	0.1422	-0.1134	0.1001
92	-0.2040	0.2728	-0.1597	0.1815	-0.1378	0.1414	-0.1127	0.0996
93	-0.2027	0.2708	-0.1587	0.1804	-0.1370	0.1405	-0.1121	0.0991
94	-0.2016	0.2688	-0.1578	0.1792	-0.1362	0.1397	-0.1114	0.0986
95	-0.2004	0.2669	-0.1569	0.1781	-0.1354	0.1389	-0.1108	0.0981
96	-0.1992	0.2650	-0.1561	0.1770	-0.1347	0.1381	-0.1101	0.0976
97	-0.1981	0.2631	-0.1552	0.1759	-0.1339	0.1373	-0.1095	0.0971
98	-0.1970	0.2613	-0.1543	0.1748	-0.1332	0.1366	-0.1089	0.0966
99	-0.1959	0.2595	-0.1535	0.1738	-0.1325	0.1358	-0.1083	0.0961
100	-0.1948	0.2578	-0.1527	0.1728	-0.1318	0.1351	-0.1077	0.0957

Na osnovu izraza (23 i 24) određene su granice poverenja za parametar oblika β:

$$_1 = b_1 \text{ x } \hat{} = 0.506978 \text{ x } 2.3053 = 1.1687$$

$$_2 = b_2 \text{ x } \hat{} = 1.171178 \text{ x } 2.3053 = 2.6999$$

Vrednosti koeficijenata b_1 i b_2 uzete su iz tablice 1; za n=15 i $\alpha_1 = \alpha_2$=0.05.

Na osnovu izraza (29 i 30) određene su granice poverenja za parametar razmere η:

$$_1 = \hat{} \text{ x exp } (e_1/ \hat{}) = 1067.762 \text{ x exp } (-0.4236/2.3053) = 883.7646$$

$$_2 = \hat{} \text{ x exp } (e_2/ \hat{}) = 1067.762 \text{ x exp } (0.4521/2.3053) = 1299.1084.$$

Vrednosti koeficijenata e_1 i e_2 uzete su iz tablice 2; za η=15 i $\alpha_1 = \alpha_2$=0.05.

Poredeći dobijene vrednosti za tačkaste ocene parametara $\hat{}$ 2.3053 i $\hat{}$ 1067.762 sa „stvarnim” vrednostima β=2.5 i η=1000, uočeno je da je postignuta zadovoljavajuća približnost, što ukazuje na valjanost primenjene metode.

Primer 2

Za podatke iz primera 1, izračunate su tačkaste i intervalne ocene za parametre β i η, kada funkcije F_1 i F_2 uzimaju pseudoslučajne vrednosti u zadatim intervalima: F_1 0.15; 0.25 i F_2 0.75; 0.85 . Izračunavanje je ponovljeno N=30 puta, a zatim su određene „srednje” vrednosti tačkastih i intervalnih ocena parametara β i η.

Rešenje:

Zbog složenosti izračunavanja neophodna je primena računara, pa je u tu svrhu urađen odgovarajući računarski program pomoću kojeg su dobijene sledeće vrednosti za tačkaste i intervalne ocene parametara β i η:

$$\bar{\hat{}} = 2.0862 \quad \bar{}_1 = 0.9953 \quad \bar{}_2 = 2.5701$$

$$\bar{\hat{}} = 999.6591 \quad \bar{}_1 = 835.394 \quad \bar{}_2 = 1189.842$$

za $_1 = \ _2$ = 0.05; $F_1 \in$ [0.15; 0.25], $F_2 \in$ [0.75; 0.85] i N=30.

Zaključak

Metoda kvantila koja je obrađena u ovom radu, s detaljnom teorijskom osnovom, omogućava određivanje tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele. Pošto se ovom metodom za razne vrednosti funkcije raspodele dobijaju različite vrednosti tačkastih i intervalnih ocena parametara raspodele, to su za „stabilnije” ocene parametara predložene „srednje” vrednosti navedenih ocena, koje se dobijaju kao srednje aritmetičke vrednosti na osnovu pojedinačnih vrednosti ocena tih parametara. Kada je broj vrednosti,koje je u toku eksperimenta uzela slučajna promenljiva t, dovoljno veliki ($n \geq 30$), tada je variranje vrednosti ocena parametara malo, pa se i pojedinačne ocene parametara mogu smatrati valjanim.

Izračunavanje tačkastih i intervalnih ocena parametara Vejbulove raspodele je složeno i zahteva primenu elektronskog računara. Priložene tablice potrebnih koeficijenata olakšavaju predmetna izračunavanja.

Valjanost izložene metode proveravana je pomoću računara više puta na generisanim pseudoslučajnim brojevima koji imaju dvoparametarsku Vejbulovu raspodelu s unapred zadatim vrednostima parametara. U velikom broju slučajeva rezultat su bili prihvatljivi, pa se opravdano može očekivati da će se i za realne podatke iz prakse dobiti zadovoljavajući rezultati.

Literatura

[1] BRKIĆ,D.M. Interval estimation of the parameters β and η of the two-parameter Weibull distribution. *Microelectronics and Reliability*, 1990, vol.30, no.1, pp.39-42.

[2] CHAPOUILLE,P., PAZZIS DE R. *Fiabilité des Systèmes*. Masson et Cie, Paris, 1968.

[3] VAN DER WAERDEN,B.L. *Mathematische Statistik*. Springer-Verlag, Berlin, 1965.

Rad primljen: 15.05.2002.god.

Determination of the values of the point and interval estimation of the Weibull distribution parameters

This paper presents a method of quantiles for determining the point and interval estimates of the parameters of the two-parameter Weibull distribution. The averaged values of these parameters are determined on the basis of single estimates of these parameters for various values of the Weibull distribution function *F(t)*. In order to facilitate the computation of the values of these interval estimated parameters, the paper gives the tables of numerical values of the coefficients for the confidence limits of the Weibull distribution parameters. The practical application of the proposed method is illustrated by two examples.

Key words: **distribution parameter, point estimate, interval estimate, average, Weibull distribution.**

Valeurs moyennes des estimations au point et à l'intervalle des paramètres de la distribution de Weibull et leur détermination

L'article traite la méthode de quantiles pour la détermination des esti-mations au point à l'intervalles des paramètres de la distribution de Weibull à deux paramètres. Leurs valeurs „moyennes" sont obtenues sur la base des estimations particulières nombreuses. Afin de calculer plus facilement ces estimations, on a aussi donné les tables des coefficients nécessaires pour ces calculs. L'application pratique de cette méthode est illustrée par deux exemples.

Mots-clés: **distribution de Weibull, méthode de quantiles, estimations au point et à l'intervalle, valeurs „moyennes".**