UDK: 539.219.3(047)=861
COSATI: 12-01, 05-02

Analitička teorija vremenski i energetski nezavisnog transporta čestica u ravnoj geometriji

Rodoljub D. Simović[1)]

Analitički je proučen energetski i vremenski nezavisan transport čestica u ravnoj geometriji opisan opštom anizotropnom funkcijom rasejanja. Korišćenjem inverzne Fourierove tehnike, izvedena su nova egzaktna rešenja transportnih jednačina čestica koje difunduju na specifičan način u beskonačnoj ili polubeskonačnoj sredini. Razmatrane su dve posebne grupe čestica koje karakteriše uzastopno rasejanje isključivo u pravcima $\mu < 0$ ili u pravcima $\mu > 0$. Njihove transportne jednačine u Fourierovom transformisanom obliku imaju rešenja bez logaritamskih singulariteta u jednoj polovini kompleksne k-ravni. Inverzija ovih rešenja sprovedena je u potpunosti analitički, a dobijeni izrazi u realnom prostoru predstavljaju generalizacije fluksa jednom sudarenih čestica.

Ključne reči: **Transportna jednačina, Fourierova metoda, iterativna metoda, ravna geometrija, beskonačna sredina, poluprostor.**

Uvod

METODE Fourierove transformacije [1,2] i Wiener-Hopfove transformacije [3], singularnih svojstvenih funkcija [4,5] i funkcionalne analize (rezolventna tehnika) [6], predstavljaju najznačajnije egzaktne analitičke postupke proučavanja linearne transportne jednačine, u literaturi često imenovane "matematički strogom transportnom teorijom" [7]. Pomoću njih rešen je egzaktno tek manji broj osnovnih transportnih problema, pre svega epistemološkog značaja. Naime, složen matematički oblik nerazdvojan je od rešenja Boltzmannove integrodiferencijalne jednačine čak i kada se razmatraju najjednostavniji transportni zadaci. Na primer, kada se proučava vremenski i energetski nezavisan transport čestica u beskonačnoj sredini s izotropnim rasejanjem [8]. Već u ovom najelementarnijem slučaju, jedna komponenta Greenove funkcije beskonačne sredine - kako se uobičajeno naziva rešenje ovog problema -predstavljena je singularnim eksponencijalnim integralom, tako da je dalja integracija Greenove funkcije po prostoru i uglu analitički neizvodljiva. Otuda se primena egzaktnih metoda na proučavanje složenijih zadataka transporta (koji obuhvataju prostorno ograničenu sredinu, anizotropnu funkciju rasejanja čestica i energetski zavisne preseke za interakciju) pokazala isuviše komplikovanom da bi bila od stvarne praktične vrednosti. Glavni pravci daljeg razvoja analitičke teorije bili su, s jedne strane, unapređivanje matematičkog formalizma [9,10], a s druge, povezivanje analitičkih i numeričkih postupaka i izgradnja efikasnijih semianalitičkih ili aproksimativnih metoda [11,12]. Mada stroga transportna teorija pripada oblasti matematičke fizike koja se bavi usko metodološkim proučavanjem egzistencije rešenja Boltzmannove jednačine, ona i danas značajno utiče na razvoj aproksimativnih metoda služeći im kao neophodna i dublja matematička osnova [13].

Među brojnim aproksimativnim metodama po jednostavnosti se izdvaja iterativna metoda [14-17]. Ona je uspešno primenjivana za rešavanje energetski i vremenski nezavisnog transporta čestica, omogućavajući rešenja visoke tačnosti u homogenim sredinama. U strogom smislu, iterativna metoda nije isključivo analitička. Pomoću nje mogu se analitički egzaktno odrediti samo ugaone gustine fluksa nesudarenih, jednom i dva puta sudarenih čestica. Šta više, izrazi koji se odnose na čestice dva puta sudarene postaju izuzetno složeni ako rasejanje nije izotropno [18]. Zato je iterativna metoda efikasna samo u izrazito apsorbujućim sredinama, ili u sredinama malih dimenzija - kada nekoliko prvih članova iterativnog reda dobro aproksimira ukupno rešenje transportnog zadatka. Razmatranjem analitičkih osnova i ograničenja ove metode stečeni su jasniji uvidi u prirodu transportnog procesa i nagoveštene drugačije mogućnosti formiranja iterativnog reda u odnosu na standardni postupak [19].

U drugom poglavlju ovog rada detaljnije su razmotrene metodološke teškoće egzaktno analitičkih i iterativnih procedura. Analiza ukazuje na priličnu iscrpljenost predmeta istraživanja, bar kada je reč o energetski i vremenski nezavisnom transportnom problemu. Moglo bi se osnovano poverovati da nema više prostora za nove pristupe proučavanju transporta čestica unutar ovako redukovanog transportnog fenomena. Međutim, kao što se to dešava u istraživanju, pažljivo preispitivanje egzaktnih i iterativnih tehnika pokazalo je da nove mogućnosti analitičkog rešavanja transportne jednačine ipak postoje. Originalna metoda koja je izložena u trećem poglavlju ovog rada oslanja se na sledeća dva uvida koji su oslonjeni na klasičnu analizu kompleksnih funkcija i fizički model iterativne metode [19-21]:

(i) Postoje domeni u kompleksnoj ravni u kojima su karakteristične funkcije koje se pojavljuju tokom rešavanja

[1)] Institut za nuklearne nauke VINČA-Laboratorija za nuklearnu energetiku i tehničku fiziku,.NET(150), PF 522, 11001 Beograd

transportne jednačine Fourierovom transformacijom strogo analitičke ili meromorfne. Drugim rečima, u ovim oblastima kompleksne ravni funkcije nemaju logaritamske singularitete. Kao posledica toga, Fourierova inverzija rešenja transformisane transportne jednačine može se sprovesti dosledno analitički, a konačan rezultat je u obliku elementarnih funkcija.

(ii) Uobičajeni postupak razvrstavanja čestica po broju sudara koji su doživele, do sada smatran najprikladnijom fizičkom osnovom iterativnih metoda, može se zameniti efikasnijim modelom grupisanja čestica prema broju sudara s rasejanjem unapred (u smeru inicijalnog snopa čestica).

Osnovni rezultati analitičke transportne teorije

Jednobrzinska transportna jednačina koja opisuje homogenu beskonačnu sredinu u kojoj deluje ravanski usmereni izvor čestica jediničnog intenziteta $S(x,\mu)=$ $=\delta(x-0)\,\delta(\mu-\mu_0)$, glasi [5,14]:

$$\mu\frac{\partial\phi(x,\mu)}{\partial x}+\phi(x,\mu)= \\ =c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}\phi(x,\mu')P_l(\mu')d\mu'+ \\ +\delta(x-0)\delta(\mu-\mu_0),\ \mu\in[-1,1] \tag{1}$$

U jednačini (1), $\phi(x,\mu)$ označava ugaonu gustinu fluksa čestica, x prostornu koordinatu u ravnoj geometriji (računatu u jedinicama srednjeg slobodnog puta čestice), $\mu=\cos\theta$ kosinus ugla θ koji zaklapa pravac kretanja čestice s pozitivnim smerom x-ose, c konstantu umnožavanja čestica (srednji broj sekundarnih čestica nastalih po sudaru jedne primarne čestice), $P_l(\mu)$ Legendreov polinom l-tog reda i σ_l Legendreov koeficijent l-tog reda funkcije rasejanja čestica koja je aproksimirana konačnom sumom Legendreovih polinoma. Simbol L definiše red anizotropije funkcije rasejanja.

Gornjom jednačinom opisan je vremenski nezavisan transport čestica. Za beskonačnu sredinu sa stalnim izvorom ovo implicira da je sredina pretežno apsorbujuća, jer bi u protivnom transportni proces bio nestacionaran. Apsorbujućim sredinama odgovara konstanta umnožavanja čestica $c<1$ i ugaona gustina fluksa koja je opadajuća funkcija rastojanja od izvora ($\phi(x,\mu)\to 0$ kada $x\to\pm\ \infty$).

Jedan od mogućih načina rešavanja razmatrane jednačine počiva na upotrebi Fourierove transformacije [1,2]. Naime, ako se na jednačinu (1) primeni Fourierova transformacija po prostornoj promenljivoj x, ova postaje:

$$(1+ik\mu)F(k,\mu)= \\ =c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}F(k,\mu')P_l(\mu')d\mu' \\ +\delta(\mu-\mu_0),\ \mu\in[-1,1] \tag{2}$$

gde $F(k,\mu)$ označava Fourierovu transformaciju ugaone gustine fluksa $\phi(x,\mu)$ definisanu izrazom [22]:

$$F(k,\mu)=\int_{-\infty}^{+\infty}e^{-ikx}\phi(x,\mu)dx \tag{3}$$

Ovim je integrodiferencijalna transportna jednačina (1) prevedena u integralni oblik (2). Pripada tipu Fredholmovih integralnih jednačina druge vrste s promenljivom μ pod znakom integrala ($\mu\in[-1,1]$) i degenerisanim jezgrom. Transformisana jednačina (2) može se formalno rešiti u prostoru Fourierove promenljive k (egzaktno, iterativno, ili aproksimativno), pri čemu se rešenje $F(k,\mu)$ za zadati red anizotropije funkcije rasejanja dobija u kompaktnoj formi. Krajnje rešenje u prostoru promenljive x izračunava se inverznom Fourierovom transformacijom:

$$\phi(x,\mu)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{+\infty}e^{ikx}F(k,\mu)\,dk \tag{4}$$

Može se zaključiti da je izloženim postupkom rešavanje originalne transportne jednačine (1) svedeno na određivanje jednog na prvi pogled jednostavnog integrala. Ali, iza ove prividne jednostavnosti krije se složeniji matematički poduhvat, posebno u geometrijski i energetski komplikovanijim slučajevima. U daljem tekstu ovog poglavlja biće ukratko razmotrene mogućnosti analitičkog određivanja ugaone gustine fluksa $\phi(x,\mu)$, bilo u celini ili samo u fragmentima.

Rešavanje transportne jednačine analitičkom Fourierovom inverzijom

Da bi se razumele osnovne teškoće povezane s egzaktnim rešavanjem transportne jednačine, valja se osvrnuti na prirodu rešenja jednačine u najjednostavnijem slučaju prostiranja čestica u beskonačnoj sredini s izotropnim rasejanjem. Kada je $L=0$, imajući u vidu da iz uslova normiranja funkcije rasejanja sledi $\sigma_0=1$, jednačina (2) svodi se na oblik:

$$(1+ik\mu)F(k,\mu)=\frac{c}{2}\int_{-1}^{1}F(k,\mu')\,d\mu'+\delta(\mu-\mu_0) \tag{5}$$

Uobičajenim rešavanjem Fredholmove integralne jednačine (5) po promenljivoj μ, lako se dobija [23]:

$$F(k,\mu)=\frac{c}{2}\frac{1}{1+ik\mu}\frac{1}{1+1k\mu_0}\frac{1}{D_0(k)}+\frac{\delta(\mu-\mu_0)}{1+ik\mu} \tag{6}$$

gde $D_0(k)$ predstavlja funkciju:

$$D_0(k)=1-\frac{c}{2ik}\ln\frac{1+ik}{1-ik}=1-\frac{c}{k}\,Arctg\,k \tag{7}$$

Kompleksna funkcija $F(k,\mu)$ (6) u kompleksnoj k-ravni ima proste polove, polove prvog reda, $k=i/\mu$, $k=i/\mu_0$ i $k=\pm\ i/\nu_0$. Polovi $k=\pm\ i/\nu_0$ predstavljaju nule parne funkcije $D_0(k)$ (7), koja se nalazi u imenitelju rešenja (6). Pored polova, funkcija $F(k,\mu)$ ima i dve tačke grananja, dva logaritamska singulariteta ($k=\pm\ i$), koji potiču od logaritamskog člana funkcije $D_0(k)$, a raspoređeni su i u gornjoj ($\{k\,|\,Im\,k>0\}$) i u donjoj ($\{k\,|\,Im\,k<0\}$) kompleksnoj poluravni.

Inverzna Fourierova transformacija izraza (6) obavlja se njegovim supstituisanjem u integral po zatvorenoj konturi u kompleksnoj ravni i naknadnom primenom računa ostataka. Ukoliko se rešenje traži u oblasti $x>0$, kontura se mora izabrati u $\{k \,|\, Im\,k > 0\}$. Za oblast $x < 0$, kontura se bira u $\{k \,|\, Im\,k < 0\}$ [24]. Pod pretpostavkom da se rešenje transportne jednačine $\phi(x,\mu)$ (Greenova funkcija beskonačne sredine) traži za vrednosti $x,\mu,\mu_0 > 0$, dobija se:

$$\begin{aligned}\phi(x,\mu) &= \frac{c}{2}\frac{e^{-x/\mu}}{(\mu-\mu_0)\,D_0(i/\mu)} + \\ &+ \frac{c}{2}\frac{e^{-x/\mu_0}}{(\mu_0-\mu)\,D_0(i/\mu_0)} + \frac{a_1(\nu_0,c)\,e^{-x/\nu_0}}{(\nu_0-\mu)(\nu_0-\mu_0)} + \\ &+ \int_0^1 \frac{a_2(\nu,c)}{(\nu-\mu)(\nu-\mu_0)}\,e^{-x/\nu}\,d\nu + \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}\delta(\mu-\mu_0)\end{aligned} \tag{8}$$

Egzaktni oblici funkcija $a_1(\nu_0,c)$ i $a_2(\nu,c)$, koje se javljaju u rešenju (8), mogu se naći u odgovarajućoj literaturi [2,5,25,26].

Rešavanje transportne jednačine analitičkom iterativnom metodom

Standardni iterativni postupak zasniva se na razvoju rešenja $\phi(x,\mu)$ transportne jednačine (1) u red funkcija [14]:

$$\phi(x,\mu) = \sum_{r=0}^{\infty}\phi^{(r)}(x,\mu) \tag{9}$$

čiji članovi, svaki za sebe, zadovoljavaju jednačine:

$$\mu\frac{\partial\phi^{(0)}(x,\mu)}{\partial x} + \phi^{(0)}(x,\mu) = \delta(x-0)\,\delta(\mu-\mu_0) \tag{10}$$

i

$$\begin{aligned}&\mu\frac{\partial\phi^{(r)}(x,\mu)}{\partial x} + \phi^{(r)}(x,\mu) = \\ &= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}\phi^{(r-1)}(x,\mu')\,P_l(\mu')\,d\mu', \; r \geq 1\end{aligned} \tag{11}$$

Ako red (9) uniformno konvergira, tada rešenje $\phi(x,\mu)$ egzistira i ovim je redom na jedinstven način predstavljeno.

Pošto član reda $\phi^{(r)}(x,\mu)$ odgovara ugaonoj gustini fluksa čestica koje su doživele r sudara, ova se metoda u transportnoj teoriji naziva i metodom sudar po sudar.

Primenom Fourierove transformacije na jednačine (10) i (11) dobija se:

$$(1+ik\mu)\,F^{(0)}(k,\mu) = \delta(\mu-\mu_0) \tag{12}$$

i

$$\begin{aligned}&(1+ik\mu)F^{(r)}(k,\mu) = \\ &= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}F^{(r-1)}(k,\mu')\,P_l(\mu')\,d\mu', \; r \geq 1\end{aligned} \tag{13}$$

S izuzetkom člana $F^{(0)}(k,\mu)$, koji se neposredno određuje iz (12), viši članovi reda $F^{(r)}(k,\mu)$ izračunavaju se rekurzivno tako što se svaki naredni računa uz pomoć prethodnog. Šta više, prva dva člana reda mogu se inverznom transformacijom analitički izraziti.

Ukoliko se pretpostavi da je $\mu_0 > 0$ − ova pretpostavka predstavlja izbor koji ni najmanje ne ograničava opštost postupka − dobijaju se sledeća rešenja (za bilo koji red L anizotropije funkcije rasejanja): za fluks nesudarenih čestica:

$$\phi^{(0)}(x,\mu) = \frac{e^{-x/\mu}}{\mu}\delta(\mu-\mu_0)\begin{cases}1, & x>0,\ \mu>0,\\ 0, & x>0,\ \mu<0,\\ 0, & x<0,\ \mu>0,\\ 0, & x<0,\ \mu<0,\end{cases} \tag{14}$$

i za fluks čestica jednom sudarenih:

$$\begin{aligned}&\phi^{(1)}(x,\mu) = \\ &= \frac{c}{\mu-\mu_0}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)P_l(\mu_0)\begin{cases}e^{-x/\mu}-e^{-x/\mu_0}, & x>0,\ \mu>0,\\ -e^{-x/\mu_0}, & x>0,\ \mu<0,\\ 0, & x<0,\ \mu>0,\\ -e^{-x/\mu}, & x<0,\ \mu<0.\end{cases}\end{aligned} \tag{15}$$

Viši članovi iterativnog reda ne mogu se prikazati isključivo pomoću elementarnih i eksponencijalnih funkcija. Već član $\phi^{(2)}(x,\mu)$ ima i komponente u obliku eksponencijalnih integralnih funkcija po promenljivoj x [18,27]. Naredni članovi reda ($r > 2$) mogu se jedino numerički odrediti, postupkom jednako složenim kao što je tretman potpune transportne jednačine (1). Otuda je iterativna metoda posebno efikasna samo u sredinama s konstantom umnožavanja čestica $c \approx 0$, ili u sredinama malih dimenzija, kada se ukupno rešenje transportnog problema dovoljno tačno da zameniti zbirom prva dva člana reda.

Analitička rešenja transportnih jednačina koje opisuju prostiranje čestice sa specifičnim rasejanjem

Rešavanje transportne jednačine (1) obično započinje rastavljanjem ukupne ugaone gustine fluksa $\phi(x,\mu)$ na komponentu $\phi^{(0)}(x,\mu)$ (14), koja odgovara nesudarenim česticama, i komponentu $\phi^{s}(x,\mu)$, koja predstavlja čestice koje su doživele bar jedan sudar ($\phi(x,\mu) = \phi^{(0)}(x,\mu) + \phi^{s}(x,\mu)$). Ovim razdvajanjem iz funkcije $\phi^{s}(x,\mu)$ uklonjen je singularitet $\delta(\mu-\mu_0)$ karakterističan za ugaonu gustinu fluksa čestica koje nisu doživele nijedan sudar. Primenom Fourierove transformacije razlaganje se može prikazati kao:

$$F(k,\mu) = F^{(0)}(k,\mu) + F^{s}(k,\mu) \tag{16}$$

gde je Fourierova transformacija ugaone gustine fluksa nesudarenih čestica data izrazom:

$$F^{(0)}(k,\mu) = \frac{\delta(\mu-\mu_0)}{1+ik\mu} \tag{17}$$

dok je Fourierova transformacija ugaone gustine fluksa čestica koje su doživele bar jedan sudar $F^{s}(k,\mu)$ - rešenje transportne jednačine (2) sa izmenjenim slobodnim članom:

$$\begin{aligned}(1+ik\mu)\,F^s(k,\mu) &= \\ &= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{1}F^s(k,\mu')\,P_l(\mu')\,d\mu' + \\ &+ c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0},\ \mu\in[-1,1]\end{aligned} \tag{18}$$

Rešavanje jednačine (18) egzaktnim postupkom svodi se na traženje rešenja Fredholmove integralne jednačine druge vrste sa promenljivom μ i granicama integrala od -1 do 1. U prethodnom poglavlju ukazano je na komplikovanu analitičku inverziju rešenja jednačine (2), koja se od jednačine (18) razlikuje samo po drugačijem slobodnom članu (izvoru čestica). Već je tada zapaženo da najveća teškoća dolazi od funkcije s logaritamskim singularitetima:

$$\frac{1}{k}\,Arctg\,k = \frac{1}{2ik}\ln\frac{1+ik}{1-ik} \tag{19}$$

koja se javlja u izrazima (7, 9 i 10). Ova funkcija ima dve tačke grananja $k=\pm i$ raspoređene u obe kompleksne poluravani, a koje predstavljaju i njene logaritamske singularitete. Po analogiji s inverzijom rešenja jednačine (2) i izračunavanje inverznog Fourierovog integrala rešenja jednačine (18) vodi integraciji po zatvorenoj konturi u kompleksnoj ravni s razrezima u obe poluravni. Integracija po deformisanoj konturi duž razreza daje konačno rešenje s članovima u obliku eksponencijalnih singularnih integrala, slično rešenju (8).

Može se zaključiti da je oblik eksponencijalnog singularnog integrala imanentan kako egzaktnom rešenju transportne jednačine (1), tako i invertovanom rešenju njoj srodne jednačine (18). Štaviše, ovakvog oblika su i rešenja dobijena analitičkom iterativnom metodom za čestice bar dva puta sudarene. Nasuprot ovome, ugaone gustine fluksa nesudarenih i jednom sudarenih čestica zapisane su pomoću elementarnih funkcija. Dalja analiza funkcije (19) pomoći će da se utvrdi da li osim nesudarenih i jednom sudarenih čestica postoje i druge čestice čija se ugaona gustina fluksa može prikazati samo upotrebom elementarnih funkcija.

Funkcija s logaritamskim singularitetima (19) nastaje pri rešavanju jednačine (18) integracijom funkcije $1/(1+ik\mu)$ po promenljivoj μ, u granicama koje su i granice Fredholmovog integrala u jednačini (18):

$$\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{1+ik\mu} = \frac{1}{ik}\ln\frac{1+ik}{1-ik} \tag{20}$$

Integral (20) može se razložiti na dva člana:

$$\begin{aligned}\int_{-1}^{1}\frac{d\mu}{1+ik\mu} &= \int_{-1}^{0}\frac{d\mu}{1+ik\mu} + \int_{0}^{1}\frac{d\mu}{1+ik\mu} = \\ &= \frac{1}{ik}[-\ln(1-ik) + \ln(1+ik)]\end{aligned} \tag{21}$$

što olakšava razumevanje nastanka logaritamskih singulariteta. Naime, sada se lako uočava da funkcija $-\ln(1-ik)/(ik)$, analitička u gornjoj poluravni $\{k \mid Im\,k>0\}$ i sa logaritamskim singularitetom u tački $k=-i$ donje poluravni $\{k \mid Im\,k<0\}$, postaje integracijom izraza $1/(1+ik\mu)$ po μ od -1 do 0, a da funkcija $\ln(1+ik)/(ik)$, analitička u donjoj poluravni $\{k \mid Im\,k<0\}$ i sa logaritamskim singularitetom u tački $k=i$ gornje poluravni $\{k \mid Im\,k>0\}$, nastaje integracijom istog izraza po promenljivoj μ od 0 do 1.

Ako se pretpostavi da su granice integrala na desnoj strani jednačine (18) -1 i 0 (umesto pravih granica -1 i 1), rešavanje jednačine (18) vodilo bi funkcijama srodnim funkciji $-\ln(1-ik)/(ik)$, analitičkim u gornjoj poluravni $\{k \mid Im\,k>0\}$. U tom slučaju, za $x>0$, inverzna Fourierova transformacija rešenja $F^s(k,\mu)$ bila bi izvedena integracijom po zatvorenoj konturi u gornjoj poluravni $\{k \mid Im\,k>0\}$, u potpunosti analitički [21].

Ukoliko bi granice integrala na desnoj strani jednačine (18) bile 0 i 1, rešavanje jednačine (18) vodilo bi funkcijama srodnim funkciji $\ln(1+ik)/(ik)$, analitičkim u donjoj poluravni $\{k \mid Im\,k<0\}$. Za $x<0$ inverzna Fourierova transformacija rešenja $F^s(k,\mu)$ bila bi izvedena integracijom po zatvorenoj konturi u donjoj poluravni $\{k \mid Im\,k<0\}$, takođe, u potpunosti analitički.

Ideja egzaktnog analitičkog rešavanja specifičnih transportnih jednačina, onih što odgovaraju skupovima čestica s posebnim istorijama kretanja, bila je prvobitno isprobana (korišćenjem metode sudar po sudar) za određivanje Greenove funkcije beskonačne sredine i koeficijenta refleksije poluprostora [19,28,29]. Najpre je postupak bio razvijen samo za izotropnu funkciju rasejanja, da bi kasnije bio proširen da obuhvati i anizotropiju rasejanja čestica, posebno slučaj linearne anizotropije [20,30]. U daljem tekstu ovog poglavlja biće pokazano za koje se sve skupove čestica može analitički rešiti transportna jednačina i kakav je oblik tih rešenja u beskonačnoj sredini, ili poluprostoru.

Čestice u beskonačnoj sredini do poslednjeg sudara rasejavane isključivo u $\mu<0$

U saglasnosti s prethodnim razmatranjem, u ovom odeljku najpre će se odrediti Fourierova transformacija ugaone gustine fluksa čestica $F^a(k,\mu)$, kojima odgovara transportna jednačina:

$$\begin{aligned}(1+ik\mu)\,F^a(k,\mu) &= \\ &= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}F^a(k,\mu')\,P_l(\mu')\,d\mu' + \\ &+ c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0},\ \mu\in[-1,1]\end{aligned} \tag{22}$$

potom, Fourierovom inverzijom funkcije $F^a(k,\mu)$ utvrditi rešenje $\phi^a(x,\mu)$ i na kraju razmotriti slučajevi izotropnog i linearno anizotropnog rasejanja čestica.

Ako se jednačina (22) sukcesivno pomnoži sa $P_n(\mu)/(1+ik\mu)$, $n=0,1,\ldots,L$ i integrali po μ u granicama od -1 do 0, dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}F_n^{a-}(k) &= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{-}(k)\,F_l^{a-}(k) + \\ &+ c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{-}(k)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0},\ n=0,1,\ldots,L\end{aligned} \tag{23}$$

U (23) simbol $F_n^{a-}(k)$ predstavlja n-ti Legendreov moment ugaone gustine fluksa $F^a(k,\mu)$ definisan na segmentu $\mu \in [-1,0]$:

$$F_n^{a-}(k) = \int_{-1}^{0} F^a(k,\mu) P_n(\mu)\, d\mu \tag{24}$$

dok su funkcije $A_{n,l}^-(k)$ određene sa:

$$A_{n,l}^-(k) = \int_{-1}^{0} \frac{P_n(\mu) P_l(\mu)}{1+ik\mu} d\mu \tag{25}$$

$A_{n,l}^-(k)$ su kompleksne funkcije Fourierove promenljive k simetrične u odnosu na indekse n i l i analitičke u gornjoj k-poluravni $\{k \mid Im\, k > 0\}$. Za indekse n i l niskog reda funkcije $A_{n,l}^-(k)$ određuju se eksplicitno, a za indekse višeg reda izračunavaju se rekurzivno [21].

Sistem jednačina (23) može se zapisati i u matričnom obliku:

$$\hat{T}^-(k)\, \hat{F}^{a-}(k) = \frac{c}{1+ik\mu_0} \hat{S}^-(k) \tag{26}$$

gde je $\hat{T}^-(k)$ kvadratna matrica dimenzija $(L+1)\mathrm{x}(L+1)$, sa elementima:

$$t_{n,l}^-(k) = \delta_{n,l} - c\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^-(k) \tag{27}$$

dok su $\hat{F}^{a-}(k)$ i $\hat{S}^-(k)$ vektori dimenzija $(L+1)$, sa elementima $F_n^{a-}(k)$, definisanim jednakošću (24), i $s_n^-(k)$, određenim izrazom

$$s_n^-(k) = \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^-(k) P_l(\mu_0) \tag{28}$$

Sistem jednačina (23) po momentima $F_n^{a-}(k)$, ili u matričnom obliku (26), rešava se analitički: kada je malo L neposredno, a za L veliko, pomoću odgovarajućih računarskih programa [31]. Tako se za željenu vrednost L, može zapisati $F_n^{a-}(k)$ kao:

$$F_n^{a-}(k) = \frac{c}{1+ik\mu_0}\frac{D_n^-(k)}{D^-(k)},\ n = 0,1,\ldots,L \tag{29}$$

gde su $D^-(k) = \det \hat{T}^-(k)$ i $D_n^-(k)$ funkcije određene analitičkim rešavanjem sistema jednačina (23). Funkcija $D_n^-(k)$ dobija se zamenom n-te kolone $\det \hat{T}^-(k)$ elementima $s_l^-(k), l = 0,1,\ldots,L$, vektora $\hat{S}^-(k)$ [32].

Kada se izrazi za momente (29) unesu u jednačinu (22) dobija se rešenje u obliku Fourierove transformacije po prostornoj koordinati x:

$$F^a(k,\mu) = \frac{c}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)} \sum_{l=0}^{L} \frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu) \frac{Q_l^-(k)}{D^-(k)},\ \mu \in [-1,1] \tag{30}$$

sa funkcijama $Q_l^-(k)$ određenim jednakošću:

$$Q_l^-(k) = c\, D_l^-(k) + P_l(\mu_0)\, D^-(k) \tag{31}$$

Funkcija $D^-(k)$ nema nula u gornjoj poluravni $\{k \mid Im\, k > 0\}$ [21]. Otuda su jedini singulariteti funkcije $F^a(k,\mu)$ u toj poluravni prosti polovi $k = i/\mu_0$ (pretpostavljeno je $\mu_0 > 0$) i $k = i/\mu$, kada je $\mu > 0$. Primenom Caushyjevog računa ostataka, za $x > 0$ lako se dobija rešenje u realnom prostoru:

$$\phi^a(x,\mu) = \frac{c}{\mu-\mu_0}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\begin{cases} \left[\dfrac{Q_l^-(i/\mu)}{D^-(i/\mu)}e^{-x/\mu} - \dfrac{Q_l^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}e^{-x/\mu_0}\right],\ \mu > 0 \\ -\dfrac{Q_l^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}e^{-x/\mu_0},\ \mu < 0 \end{cases} \tag{32}$$

Za $x < 0$ inverzna Fourierova transformacija rešenja (30) predviđa integraciju po konturi u donjoj poluravni $\{k \mid Im\, k < 0\}$. Kako funkcije $D^-(k)$ i $Q_l^-(k)$, $l = 0,1,\ldots,L$, u ovoj poluravni nisu analitičke već imaju logaritamske singularitete i tačku grananja $k = -i$, to se donja poluravan razrezuje duž imaginarne ose od $k = -i$ do $k = -\infty$, čime se obezbeđuje jednoznačnost funkcija. Poznato je iz računa ostataka da kontura integracije ne sme razrez presecati, već ga mora obići. Integracija po putanji duž razreza vodi rešenju u formi singularnog eksponencijalnog integrala. Otuda se za $x < 0$ ugaona gustina fluksa $\phi^a(x,\mu)$ ne može odrediti analitički egzaktno.

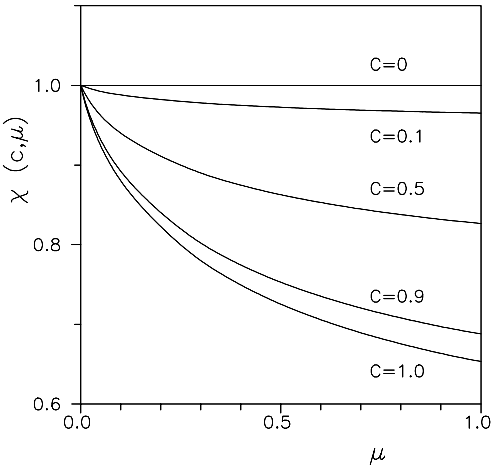
Kada je izotropna funkcija rasejanja ($L = 0$), rešenje glasi [21]:

$$\phi^a(x,\mu) = \frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}\begin{cases} \left[\dfrac{e^{-x/\mu}}{\chi(c,\mu)} - \dfrac{e^{-x/\mu_0}}{\chi(c,\mu_0)}\right],\ \mu > 0, \\ -\dfrac{e^{-x/\mu_0}}{\chi(c,\mu_0)},\ \mu < 0 \end{cases} \tag{33}$$

gde je funkcija χ definisana sa:

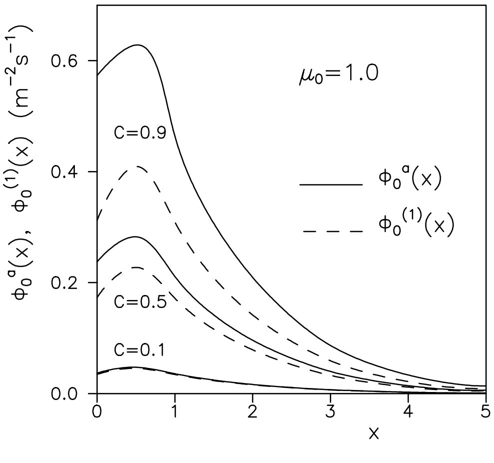
$$\chi(c,\mu) \equiv 1 - \frac{c\mu}{2}\ln(1+\frac{1}{\mu}) \tag{34}$$

Ako se uporedi rešenje $\phi^a(x,\mu)$ (33) sa ugaonom gustinom fluksa jednom sudarenih čestica $\phi^{(1)}(x,\mu)$ za izotropno rasejanje (15), uočava se da funkcija $\chi(c,\mu)$ (sl.1) upućuje na razliku ovih rešenja. Vrednost funkcije $\chi(c,\mu)$ jednaka je 1 kada je $c = 0$, ili $\mu = 0$, a kada konstanta umnožavanja c i promenljiva μ rastu, funkcija $\chi(c,\mu)$ monotono opada.



Slika 1. Funkcija $\chi(c,\mu)$

Na sl.2 prikazane su gustine flukseva $\phi_0^a(x)$ i $\phi_0^{(1)}(x)$, dobijene integracijom rešenja (33) i (15) po promenljivoj μ u granicama od -1 do 1. Izvor čestica je jediničnog intenziteta (1 čestica/m^{2}s), usmeren u $\mu_0 = 1.0$. Relativne razlike gustina flukseva najveće su za $x = 0$. Kada je $c = 0.1$, $\phi_0^a(0)$ je za 6% veća od $\phi_0^{(1)}(0)$, da bi za $c = 0.9$ uvećanje iznosilo približno 84%. S povećanjem rastojanja od izvora čestica (merenim u dužinama srednjeg slobodnog pita), gustine flukseva posle dostignutog maksimuma eksponencijalno slabe, i pri tome se i relativna razlika među njima postepeno smanjuje. Ovi rezultati upućuju na zaključak da novo rešenje (33) najveći značaj ima u okolini izvora čestica. Na rastojanjima od pet dužina srednjeg slobodnog puta relativne razlike gustina flukseva $\phi_0^a(x)$ i $\phi_0^{(1)}(x)$ umanje se za jednu trećinu svojih početnih vrednosti.



Slika 2. Gustine flukseva $\phi_0^a(x)$ i $\phi_0^{(1)}(x)$ za izotropnu funkciju rasejanja

Kada je funkcija rasejanja linearno anizotropna ($L = 1$) rešenje je u obliku izraza [21]:

$$\phi^a(x,\mu) = \\ = \frac{c}{\mu - \mu_0}\sum_{l=0}^{1}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\begin{cases} [\dfrac{\tilde{Q}_l^-(\mu)}{\tilde{D}^-(\mu)}e^{-x/\mu} - \dfrac{\tilde{Q}_l^-(\mu_0)}{\tilde{D}^-(\mu_0)}e^{-x/\mu_0}], & \mu > 0 \\ -\dfrac{\tilde{Q}_l^-(\mu_0)}{\tilde{D}^-(\mu_0)}e^{-x/\mu_0}, & \mu < 0 \end{cases} \tag{35}$$

u kome su:

$$\tilde{D}^-(\mu) \equiv 4\,D^-(i/\mu) = -3(2-c)^2\sigma_1\mu^2 + \\ +[4 - 3c\sigma_1\mu + 6(2-c)\sigma_1\mu^2]\,\chi(c,\mu) \tag{36}$$

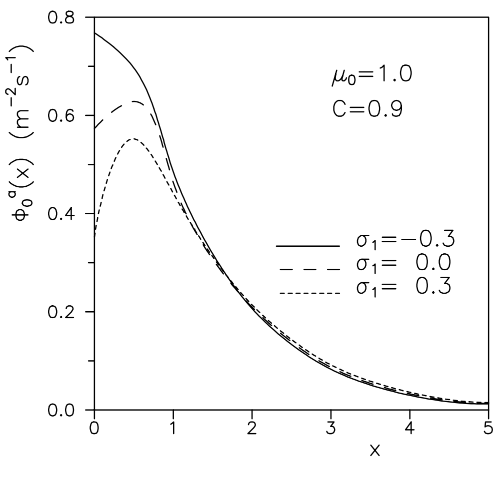
$$\tilde{Q}_0^-(\mu) \equiv 4\,Q_0^-(i/\mu) = 4 + 3\sigma_1[2\mu_0(2-c) - c]\mu - \\ -6\sigma_1(2-c)\mu^2 + 12\sigma_1(\mu - \mu_0)\mu\,\chi(c,\mu) \tag{37}$$

i

$$\tilde{Q}_1^-(\mu) \equiv 4\,Q_1^-(i/\mu) = 2(2-c)\mu - 4(\mu - \mu_0)\,\chi(c,\mu) \tag{38}$$

Ako je $\sigma_1 = 0$, formula (35) prelazi u formulu (33) za izotropnu funkciju rasejanja.

Na slici 3, za $\mu_0 = 1.0$ i $c = 0.9$, prikazana je gustina fluksa $\phi_0^a(x)$ za linearno anizotropnu funkciju rasejanja. Razmatrane su tri vrednosti σ_1 - prvog Legendreovog momenta funkcije rasejanja, koje reprezentuju tri karakteristična rasejanja čestica: dominantno unazad ($\sigma_1 = -0.3$), izotropno ($\sigma_1 = 0.0$) i dominantno unapred ($\sigma_1 = 0.3$). Kada je rasejanje čestica određeno momentom $\sigma_1 = -0.3$, gustina fluksa $\phi_0^a(x)$ je monotono opadajuća funkcija, dok u slučajevima izotropnog rasejanja i rasejanja pretežno unapred, grafik funkcije prolazi kroz maksimum, a potom eksponencijalno opada. Najveće relativne razlike gustina flukseva obrazuju se na mestu izvora čestica (34% i -39%, za rasejanje unazad i rasejanje unapred u odnosu na slučaj izotropnog rasejanja). S povećanjem rastojanja od izvora relativne razlike se umanjuju i menjaju poredak po veličini, budući da najveće vrednosti ima gustina fluksa onih čestica koje se rasejavaju dominantno unapred.



Slika 3. Gustina fluksa $\phi_0^a(x)$ za linearno anizotropnu funkciju rasejanja

Na osnovu integralnog člana transportne jednačine (22) nije teško zaključiti da ugaona gustina fluksa $\phi^a(x,\mu)$ (32) - koja je egzaktno rešenje ove transportne jednačine invertovano u realan prostor za $x > 0$ - predstavlja čestice koje se u beskonačnoj sredini do poslednjeg sudara restriktivno rasejavaju uvek u pravcima omeđenim sa $\mu < 0$. Nakon poslednjeg sudara ove čestice se rasejavaju nerestriktivno u $\mu \in [-1,1]$. Drugim rečima, $\phi^a(x,\mu)$

opisuje skup svih čestica jednom ili više puta sudarenih, koje se ili nikada nisu rasejale u $\mu > 0$, ili se to dogodilo samo jednom pri poslednjem rasejanju.

Rešenje (32) može se takođe izvesti metodom sudar po sudar, za slučaj izotropne funkcije rasejanja [21].

Čestice u beskonačnoj sredini do poslednjeg sudara rasejavane isključivo u $\mu > 0$

U ovom odeljku kao prvi korak, određena je funkcija $F^b(k,\mu)$ - Fourierova transformacija ugaone gustine fluksa rasejanih čestica kojima odgovara transportna jednačina:

$$\begin{aligned}&(1+ik\mu)\,F^b(k,\mu)=\\&=c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_0^1 F^b(k,\mu')\,P_l(\mu')\,d\mu'+\\&+c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0},\quad \mu\in[-1,1]\end{aligned}\tag{39}$$

a potom je analitički invertovano rešenje da se dobije $\phi^b(x,\mu)$. Postupak sledi proceduru prethodno razvijenu za određivanje funkcije $F^a(k,\mu)$ u prostoru Fourierove promenljive k i tehniku inverzije razvijenu za izračunavanje $\phi^a(x,\mu)$.

Ako se jednačina (39) sukcesivno pomnoži sa $P_n(\mu)/(1+ik\mu)$, $n=0,1,\dots,L$ i integrali po μ u granicama od 0 do 1, dobija se sistem jednačina:

$$\begin{aligned}&F_n^{b+}(k)=c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{+}(k)\,F_l^{b+}(k)+\\&+c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{+}(k)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0},\quad n=0,1,\dots,L\end{aligned}\tag{40}$$

u kome $F_n^{b+}(k)$ predstavlja n-ti Legendreov moment ugaone gustine fluksa $F^b(k,\mu)$, definisan na segmentu $\mu\in[0,1]$:

$$F_n^{b+}(k)=\int_0^1 F^b(k,\mu)P_n(\mu)\,d\mu \tag{41}$$

a $A_{n,l}^{+}(k)$ funkciju Fourierove promenljive k, određenu sa:

$$A_{n,l}^{+}(k)=\int_0^1\frac{P_n(\mu)\,P_l(\mu)}{1+ik\mu}\,d\mu \tag{42}$$

Ranije je pokazano [21] da se funkcije $A_{n,l}^{+}(k)$ mogu izvesti iz funkcija $A_{n,l}^{-}(k)$ ($A_{n,l}^{+}(k)=(-1)^{n+l}A_{n,l}^{-}(-k)$). To su funkcije simetrične u odnosu na indekse n i l, a s tačkom $k=0$ koja je regularna. Osim toga one su analitičke u donjoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k<0\}$, s logaritamskim singularitetom i tačkom grananja $k=i$ u gornjoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k>0\}$.

Sistem jednačina (40) može se prikazati u matričnom obliku:

$$\hat{T}^{+}(k)\,\hat{F}^{b+}(k)=\frac{c}{1+ik\mu_0}\hat{S}^{+}(k) \tag{43}$$

gde simbol $\hat{T}^{+}(k)$ označava kvadratnu matricu dimenzija $(L+1)\mathrm{x}(L+1)$, s elementima:

$$t_{n,l}^{+}(k)=\delta_{n,l}-c\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{+}(k) \tag{44}$$

dok je $\hat{F}^{b+}(k)$ vektor dimenzija $(L+1)$ s elementima $F_n^{b+}(k)$ definisanim jednačinom (41) i $\hat{S}^{+}(k)$ vektor dimenzija $(L+1)$ s elementima $s_n^{+}(k)$

$$s_n^{+}(k)=\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^{+}(k)\,P_l(\mu_0) \tag{45}$$

Za izabranu vrednost L, može da se zapiše rešenje sistema jednačina (40) kao:

$$F_n^{b+}(k)=\frac{c}{1+ik\mu_0}\frac{D_n^{+}(k)}{D^{+}(k)},\quad n=0,1,\dots,L \tag{46}$$

gde su $D^{+}(k)=\det\hat{T}^{+}(k)$ i $D_n^{+}(k)$ funkcije određene analitičkim putem.

Kada se momenti (46) unesu u jednačinu (39), dobija se rešenje problema u obliku Fourierove transformacije:

$$F^b(k,\mu)=\frac{c}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{Q_l^{+}(k)}{D^{+}(k)},\quad \mu\in[-1,1] \tag{47}$$

sa funkcijama $Q_l^{+}(k)$ određenim jednakošću:

$$Q_l^{+}(k)=c\,D_l^{+}(k)+P_l(\mu_0)\,D^{+}(k) \tag{48}$$

Funkcije $D^{+}(k)$ i $Q_l^{+}(k)$ imaju za svoje komponente funkcije $A_{n,l}^{+}(k)$, te su i same analitičke u donjoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k<0\}$, a sa logaritamskim singularitetom $k=i$ u gornjoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k>0\}$. Otuda se inverzna Fourierova transformacija izraza (47) analitički može izvesti samo za $x<0$.

Kako funkcija $D^{+}(k)$ u donjoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k<0\}$ nema nula [21], to je $F^b(k,\mu)$ u čitavoj ovoj poluravni analitička sa samo jednim prostim polom $k=i/\mu$, ako je $\mu<0$. Ako je $\mu>0$, tada je $F^b(k,\mu)$ strogo analitička bez ijednog pola u donjoj poluravni. Za čestice upućene iz izvora u pravcima $\mu_0>0$, rešenje u prostoru realne promenljive $x<0$ dobija oblik:

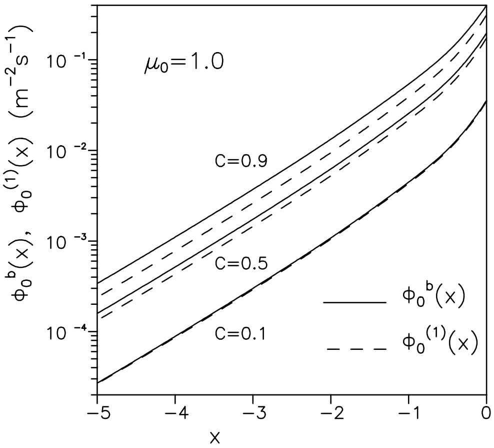
$$\frac{c}{-\mu}\quad {}_0\,\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\begin{cases}0, & \mu>0\\[4pt] \dfrac{Q_l^{+}(i/\mu)}{D^{+}(i/\mu)}e^{-x/\mu}, & \mu>0\end{cases} \tag{49}$$

koji je analogon ranije određenom rešenju za ugaonu gustinu fluksa $\phi^{(1)}(x,\mu)$ (15).

Kada je $L=0$, rešenje glasi [21]:

$$\phi^b(x,\mu)=-\frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}\begin{cases}0, & \mu>0\\[4pt] \dfrac{e^{-x/\mu}}{\chi(c,|\mu|)}, & \mu<0\end{cases} \tag{50}$$

Na sl.4 prikazane su gustine flukseva $\phi_0^b(x)$ i $\phi_0^{(1)}(x)$ za tri vrednosti konstante umnožavanja čestica c. Izvor čestica jediničnog intenziteta (1 čestica/m^{2}s) usmeren je u pravcu $\mu_0 = 1.0$. Za ma koju vrednost konstante umnožavanja c, gustina fluksa $\phi_0^b(x)$ ima veće vrednosti od odgovarajuće gustine fluksa jednom sudarenih čestica. Njihove relativne razlike povećavaju se s porastom konstante c. Šta više, na većim rastojanjima od izvora ta se tendencija pojačava. Na primer, za $c = 0.9$ i $x = 0.0$, gustina fluksa $\phi_0^b(x)$ veća je od gustine fluksa $\phi_0^{(1)}(x)$ za 28%, dok za $x = -5.0$ njihova relativna razlika iznosi 43%.



Slika 4. Gustine flukseva $\phi_0^b(x)$ i $\phi_0^{(1)}(x)$ za izotropnu funkciju rasejanja

Za $L = 1$ rešenje je:

$$\phi^b(x,\mu) = -\frac{c}{\mu-\mu_0}\sum_{l=0}^{1}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\begin{cases}0, & \mu>0\\ \dfrac{\tilde{Q}_l^+(\mu)}{\tilde{D}^+(\mu)}e^{-x/\mu}, & \mu<0\end{cases} \tag{51}$$

u kome su

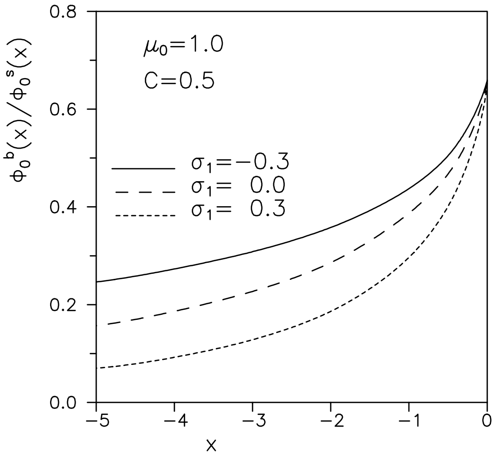
$$\tilde{D}^+(\mu)\equiv 4D^+(i/\mu)=4D^-(-i/\mu)=\tilde{D}^-(-\mu) \tag{52}$$

$$\tilde{Q}_0^+(\mu)\equiv 4Q_0^+(i/\mu)=4+3\sigma_1[2\mu_0(2-c)+c]\mu - 6\sigma_1(2-c)\mu^2+12\sigma_1\mu(\mu-\mu_0)\chi(c,|\mu|) \tag{53}$$

i

$$\tilde{Q}_1^+(\mu)\equiv 4Q_1^+(i/\mu)=2(2-c)\mu-4(\mu-\mu_0)\chi(c,|\mu|) \tag{54}$$

U slučaju linearno anizotropne funkcije rasejanja, za $\mu_0 = 1.0$ i $c = 0.5$, frakcije $\phi_0^b(x)/\phi_0^s(x)$ date su na sl.5. Udeo gustine fluksa $\phi_0^b(x)$ u gustini fluksa svih sudarenih čestica najveći je za rasejanje čestica predominantno unazad. Ova karakteristika postaje sve izrazitija s povećanjem rastojanja od izvora.



Slika 5. Frakcija $\phi_0^b(x)/\phi_0^s(x)$ za linearno anizotropnu funkciju rasejanja

Da se odgovori na pitanje, koje su čestice reprezentovane ugaonom gustinom fluksa $\phi^b(x,\mu)$ (49), treba se podsetiti da je $\phi^b(x,\mu)$ egzaktno rešenje transportne jednačine:

$$\mu\frac{\partial\phi^b(x,\mu)}{\partial x}+\phi^b(x,\mu)= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_0^1\phi^b(x,\mu')P_l(\mu')d\mu' + c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)P_l(\mu_0)\frac{e^{-x/\mu_0}}{\mu_0},\ \mu\in[-1,1] \tag{55}$$

gde je od Fourierove transformacije (39) postupak analize započeo. Granice integrala na desnoj strani jednačine (55) ukazuju da ona opisuje transport čestica u beskonačnoj sredini koje se do poslednjeg sudara rasejavaju uvek u pravcima $\mu > 0$. Poslednje rasejanje čestica zbiva se nerestriktivno u $\mu\in[-1,1]$.

Čestice u poluprostoru $x > 0$ do poslednjeg sudara rasejavane isključivo u $\mu < 0$

Prema analogiji, $\phi^a(x,\mu)$ ovde označava ugaonu gustinu fluksa bar jednom sudarenih čestica koje difunduju u poluprostoru $x > 0$, a do poslednjeg sudara rasejavaju se samo u $\mu < 0$. Transportni proces opisan je jednačinom:

$$\mu\frac{\partial\phi^a(x,\mu)}{\partial x}+\phi^a(x,\mu)= c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}\phi^a(x,\mu')P_l(\mu')d\mu' + c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)P_l(\mu_0)\frac{e^{-x/\mu_0}}{\mu_0},\ \mu\in[-1,1] \tag{56}$$

s graničnim uslovima koje ispunjava funkcija $\phi^a(x,\mu)$

$$\phi^a(+\infty,\mu)=0,\ \mu\in[-1,1] \tag{57}$$

i

$$\phi^a(0,\mu)=0,\ \mu>0 \tag{58}$$

Da bi se uspešno primenila metoda Fourierove integralne transformacije na transportni problem u poluprostoru $x>0$, potrebno je da se zameni ovaj problem ekvivalentnim zadatkom transporta čestica u beskonačnoj sredini. To se postiže rasprostiranjem medijuma (koji prvobitno ispunjava samo poluprostor $x>0$) na poluprostor $x<0$ i postavljanjem odgovarajućeg fiktivnog izvora čestica u ravan $x=0$ beskonačne sredine, upravo na mestu slobodne površine poluprostora. Dokaz ekvivalentnosti dva transportna zadatka u teoriji je poznat pod nazivom Placzekova lema [1,26]. Na osnovu nje, $\phi^a(x,\mu)$ - rešenje transportne jednačine (56) s graničnim uslovima (57) i (58) u oblasti $x\in[0,+\infty)$, jednako je rešenju transportne jednačine zapisane za beskonačnu sredinu [21]:

$$\begin{aligned}\mu\frac{\partial\phi^a(x,\mu)}{\partial x}&+\phi^a(x,\mu)=\\ &=c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}\phi^a(x,\mu')P_l(\mu')\,d\mu'+\\ &+c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)P_l(\mu_0)\frac{e^{-x/\mu_0}}{\mu_0}+\\ &+\mu\phi^a(0,\mu)\delta(x-0),\ \mu\in[-1,1]\end{aligned}\tag{59}$$

s graničnim uslovima $\phi^a(\pm\infty,\mu)=0,\ \mu\in[-1,1]$.

Primenom Fourierove transformacije po prostornoj koordinati x na jednačinu (59), dobija se:

$$\begin{aligned}(1+ik\mu)&F^a(k,\mu)=\\ &=c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}F^a(k,\mu')P_l(\mu')\,d\mu'+\\ &+c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0}+\\ &+\mu\phi^a(0,\mu),\ \mu\in[-1,1]\end{aligned}\tag{60}$$

Ako se u potpunosti ponovi razvijena procedura za formulisanje sistema jednačina po nepoznatim momentima funkcije $F^a(k,\mu)$, dobija se:

$$\begin{aligned}F_n^{a-}(k)&=c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^-(k)F_l^{a-}(k)+\\ &+c\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l A_{n,l}^-(k)\frac{P_l(\mu_0)}{1+ik\mu_0}+\\ &+\int_{-1}^{0}\frac{\mu P_n(\mu)}{1+ik\mu}\phi^a(0,\mu)d\mu,\ \ n=0,1,...,L\end{aligned}\tag{61}$$

Momenti $F_n^{a-}(k)$ i funkcije $A_{n,l}^-(k)$ ranije su definisane izrazima (24 i 25), respektivno.

Sistem jednačina (61) u matričnoj formi glasi:

$$\hat{T}^-(k)\hat{F}^{a-}(k)=\frac{c}{1+ik\mu_0}\hat{S}^-(k)+\int_{-1}^{0}\frac{\mu\phi^a(0,\mu)}{1+ik\mu}\hat{P}(\mu)\,d\mu\tag{62}$$

gde je značenje simbola $\hat{T}^-(k)$, $\hat{F}^{a-}(k)$ i $\hat{S}^-(k)$ istovetno kao u (26, 27 i 28), dok $\hat{P}(\mu)$ predstavlja vektor dimenzije $(L+1)$ čiji su elementi Legendreovi polinomi $P_l(\mu)\ (l=0,1,...L)$.

Momenti $F_n^{a-}(k)$ zapisuju se u opštem obliku kao:

$$\begin{aligned}F_n^{a-}(k)&=\\ &=\frac{c}{1+ik\mu_0}\frac{D_n^-(k)}{D^-(k)}+\int_{-1}^{0}\frac{\mu\phi^a(0,\mu)}{1+ik\mu}\frac{D_n^a(k,\mu)}{D^-(k)}d\mu,\ n=0,1,...,L\end{aligned}\tag{63}$$

pri čemu su: $D^-(k)=\det\hat{T}^-(k)$, $D_n^-(k)$ determinanta dobijena zamenom n-te kolone determinante $D^-(k)$ elementima $s_l^-(k)$ vektora $\hat{S}^-(k)$, i $D_n^a(k,\mu)$ determinanta nastala zamenom n-te kolone determinante $D^-(k)$ elementima $P_l(\mu)$ vektora $\hat{P}(\mu)$.

Kada se momenti (63) postave u jednačinu (60) dobija se rešenje u obliku Fourierove transformacije po koordinati x:

$$\begin{aligned}F^a(k,\mu)&=\frac{c}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{Q_l^-(k)}{D^-(k)}+\\ &+\frac{c}{(1+ik\mu)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}\frac{\mu'\phi^a(0,\mu')}{1+ik\mu'}\frac{D_l^a(k,\mu')}{D^-(k)}d\mu'+\\ &+\frac{\mu}{1+ik\mu}\phi^a(0,\mu),\ \ \mu\in[-1,1]\end{aligned}\tag{64}$$

s funkcijama $Q_l^-(k)$ određenim kao i u (31):

$$Q_l^-(k)=c\,D_l^-(k)+P_l(\mu_0)\,D^-(k)\tag{65}$$

U izrazu (64) valja uočiti da je rešenje $F^a(k,\mu)$ izvedeno u zavisnosti od $\phi^a(0,\mu)$, $\mu<0$, ugaone gustine fluksa čestica koje umiču kroz slobodnu ravan $x=0$. Ova veličina još uvek nije poznata, međutim to neće smetati da se konačno rešenje odredi eksplicitno.

Rešenje u realnom prostoru za $x>0$ dobija se inverznom Fourierovom transformacijom izraza (64). Budući da funkcija $F^a(k,\mu)$ u gornjoj kompleksnoj poluravni $\{\,k\,|\,Im\,k>0\,\}$ ima jedine singularitete u vidu prostih polova, inverzija se obavlja dosledno analitički prema ranije izloženom postupku.

Kada je $\mu<0$, jedino prvi član na desnoj strani izraza (64) ima prost pol $k=i/\mu_0$ ($\mu_0>0$), dok su druga dva člana analitičke funkcije bez polova u $\{k\,|\,Im\,k>0\}$. Otuda rešenje sledi neposredno:

$$\begin{aligned}\phi^a&(x,\mu)=\\ &=-\frac{c}{\mu-\mu_0}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{Q_l^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}e^{-x/\mu_0},\ x>0,\ \mu<0\end{aligned}\tag{66}$$

Dobijeni rezultat odgovara rešenju $\phi^a(x,\mu)$ (32) za beskonačnu sredinu, kada je i $\mu<0$. Zaista, posle prodora inicijalnog snopa kroz slobodnu površinu $x=0$ u pravcu $\mu_0>0$, ugaona gustina fluksa čestica koje su sve do poslednjeg sudara bile rasejane u $\mu<0$, ne zavisi od toga da li je poluprostor $x<0$ ispunjen nekom supstancom ili je vakuum. Drugim rečima, čestice koje se iz poluprostora $x<0$ vrate u poluprostor $x>0$ ne pripadaju više onom skupu koji je predstavljen rešenjem $\phi^a(x,\mu)$.

Kada se rešenje (66) unese u jednakost (64) za $\mu<0$ i primeni granični uslov (58), $\phi^a(0,\mu)=0$ za $\mu>0$, dobija se funkcija $F^a(k,\mu)$ koja je sada određena eksplicitno:

$$F^a(k,\mu)=\frac{c}{(1+ik\mu)(1+ik\mu_0)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\frac{Q_l^-(k)}{D^-(k)}+$$
$$+\frac{c}{(1+ik\mu)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\int_{-1}^{0}\frac{\mu' D_l^a(k,\mu')}{(1+ik\mu')D^-(k)}\,\mathrm{x} \tag{67}$$
$$\mathrm{x}\,[-\frac{c}{\mu'-\mu_0}\sum_{l'=0}^{L}\frac{2l'+1}{2}\sigma_{l'}P_{l'}(\mu')\frac{Q_{l'}^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}]\,d\mu',\quad \mu>0$$

U gornjoj kompleksnoj poluravni $\{k\,|\,Im\,k>0\}$, za $\mu>0$, prvi član na desnoj strani izraza (67) ima proste polove $k=i/\mu$ i $k=i/\mu_0$, dok drugi član ima samo prost pol $k=i/\mu$. Fourierova inverzija $F^a(k,\mu)$ daje:

$$\phi^a(x,\mu)=\frac{c}{\mu-\mu_0}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)[\frac{Q_l^-(i/\mu)}{D^-(i/\mu)}e^{-x/\mu}-\frac{Q_l^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}e^{-x/\mu_0}]+$$
$$+c^2\frac{e^{-x/\mu}}{D^-(i/\mu)}\sum_{l=0}^{L}\frac{2l+1}{2}\sigma_l P_l(\mu)\sum_{l'=0}^{L}\frac{2l'+1}{2}\sigma_{l'}\frac{Q_{l'}^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}\,\mathrm{x}$$
$$\mathrm{x}\int_{-1}^{0}\frac{\mu' P_{l'}(\mu')D_l^a(i/\mu,\mu')}{(\mu'-\mu)(\mu'-\mu_0)}d\mu',\quad x>0,\ \mu>0 \tag{68}$$

Prvi član na desnoj strani rešenja (68) odgovara rešenju (32) za beskonačnu sredinu, dok postojanje drugog člana ukazuje na razliku ova dva rešenja. Priroda transportnog procesa iz koga je izdvojen skup čestica koje se u poluprostoru $x>0$ do poslednjeg sudara rasejavaju isključivo u $\mu<0$, dobro razjašnjava ovaj rezultat. Naime, u beskonačnoj sredini čestice iz posmatranog skupa poslednji sudar mogu doživeti u prostoru $x<0$, rasejati se u $\mu>0$ i potom vratiti u prostor $x>0$. Zato se ugaona gustina fluksa $\phi^a(x,\mu)$, $\mu>0$, za beskonačnu sredinu razlikuje od odgovarajuće ugaone gustine fluksa $\phi^a(x,\mu)$, $\mu>0$, za poluprostor.

Za izotropnu funkciju rasejanja rešenje glasi:

$$\phi^a(x,\mu)=\frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}[\frac{Q_0^-(i/\mu)}{D^-(i/\mu)}e^{-x/\mu}-\frac{Q_0^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu_0)}e^{-x/\mu_0}]+$$
$$+(\frac{c}{2})^2\frac{e^{-x/\mu}Q_0^-(i/\mu_0)}{D^-(i/\mu)D^-(i/\mu_0)}\int_{-1}^{0}\frac{\mu' D_0^a(i/\mu,\mu')}{(\mu'-\mu)(\mu'-\mu_0)}d\mu',\quad \mu>0 \tag{69}$$

Ako se ima u vidu da za $L=0$ važi:

$$D^-(k)=t_{0,0}^-(k)=1-\frac{c}{2}A_{0,0}^-(k)=1+\frac{c}{2ik}\ln(1-ik) \tag{70}$$

$$D_0^-(k)=s_0^-(k)=\frac{1}{2}A_{0,0}^-(k)=-\frac{1}{2ik}\ln(1-ik) \tag{71}$$

$$Q_0^-(k)=cD_0^-(k)+D^-(k)=1 \tag{72}$$

i

$$D_0^a(k,\mu)=P_0(\mu)=1 \tag{73}$$

rešenje (69) postaje:

$$\phi^a(x,\mu)=\frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}[\frac{e^{-x/\mu}}{\chi(c,\mu)}-\frac{e^{-x/\mu_0}}{\chi(c,\mu_0)}]+$$
$$+\left(\frac{c}{2}\right)^2\frac{e^{-x/\mu}}{\chi(c,\mu)\chi(c,\mu_0)}\int_{-1}^{0}\frac{\mu' d\mu'}{(\mu'-\mu)(\mu'-\mu_0)},\quad \mu>0 \tag{74}$$

Kada se integral na desnoj strani jednačine (74) reši, poslednji izraz dobija jednostavniji oblik:

$$\phi^a(x,\mu)=\frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}\frac{1}{\chi(c,\mu_0)}[e^{-x/\mu}-e^{-x/\mu_0}],\quad \mu>0 \tag{75}$$

Konačno, ako se rešenju (75) za $\mu>0$ pridruži rešenje koje sledi iz jednačine (66) za $\mu<0$, ukupno rešenje će biti:

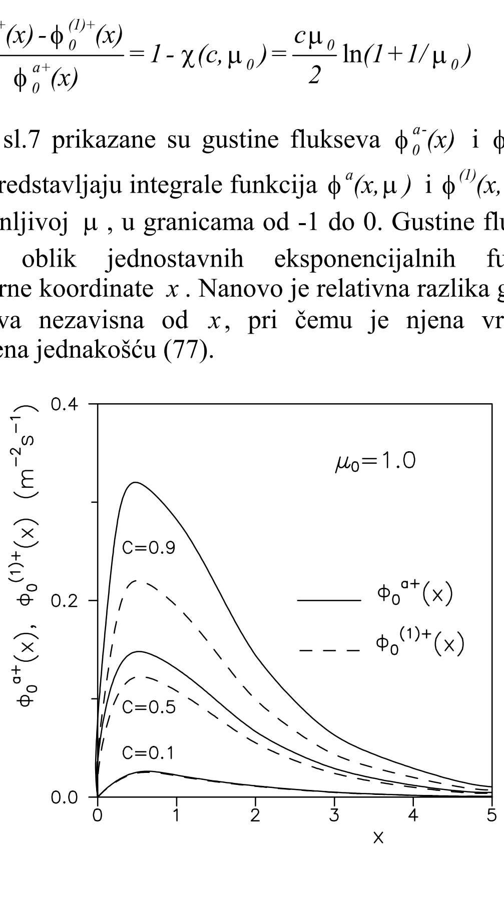
$$\phi^a(x,\mu)=\frac{c}{2}\frac{1}{\mu-\mu_0}\frac{1}{\chi(c,\mu_o)}\begin{cases}e^{-x/\mu}-e^{-x/\mu_0}, & \mu>0,\\ -e^{-x/\mu_0}, & \mu<0.\end{cases} \tag{76}$$

Rezultat (76) pokazuje da za $L=0$ ugaona gustina fluksa $\phi^a(x,\mu)$ odgovara ugaonoj gustini fluksa jednom sudarenih čestica $\phi^{(1)}(x,\mu)$ (15), za $x>0$, podeljenoj sa $\chi(c,\mu_0)$.

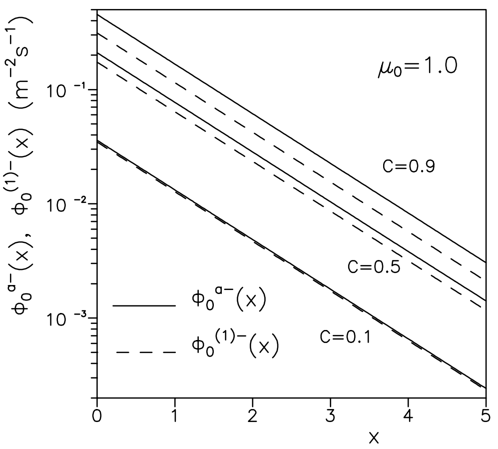
Grafici funkcija $\phi_0^{a+}(x)$ i $\phi_0^{(1)+}(x)$, koje predstavljaju integrale ugaonih gustina flukseva $\phi^a(x,\mu)$ i $\phi^{(1)}(x,\mu)$ po promenljivoj μ u granicama od 0 do 1, prikazani su na sl.6. Kao i u prethodnim slučajevima, izvor čestica je jediničnog intenziteta, usmeren u pravcu $\mu_0=1.0$. Za $x=0$ gustine flukseva $\phi_0^{a+}(x)$ i $\phi_0^{(1)+}(x)$ jednake su nuli, što odgovara graničnom uslovu (58). Relativna razlika gustina flukseva $\phi_0^{a+}(x)$ i $\phi_0^{(1)+}(x)$ ne zavisi od prostorne koordinate x:

$$\frac{\phi_0^{a+}(x)-\phi_0^{(1)+}(x)}{\phi_0^{a+}(x)}=1-\chi(c,\mu_0)=\frac{c\mu_0}{2}\ln(1+1/\mu_0) \tag{77}$$

Na sl.7 prikazane su gustine flukseva $\phi_0^{a-}(x)$ i $\phi_0^{(1)-}(x)$, koje predstavljaju integrale funkcija $\phi^a(x,\mu)$ i $\phi^{(1)}(x,\mu)$ po promenljivoj μ, u granicama od -1 do 0. Gustine flukseva imaju oblik jednostavnih eksponencijalnih funkcija prostorne koordinate x. Nanovo je relativna razlika gustina flukseva nezavisna od x, pri čemu je njena vrednost određena jednakošću (77).



Slika 6. Gustine flukseva $\phi_0^{a+}(x)$ i $\phi_0^{(1)+}(x)$ za izotropnu funkciju rasejanja i transport u poluprostoru



Slika 7. Gustine flukseva $\phi_0^{a-}(x)$ i $\phi_0^{(1)-}(x)$ za izotropnu funkciju rasejanja i transport u poluprostoru

Rešenje $\phi^a(x,\mu)$ kada je linearno anizotropna funkcija rasejanja razmatrano je detalnije u referenci [21].

Zaključak

Sprovedena analiza kompleksnih funkcija koje se pojavljuju tokom rešavanja transportne jednačine Fourierovom transformacijom, pokazala je da postoje domeni u kompleksnoj ravni (gornja kompleksna poluravan $\{k \mid Im\, k > 0\}$ i donja kompleksna poluravan $\{k \mid Im\, k < 0\}$) u kojima su one strogo analitičke ili samo meromorfne. Drugim rečima, u jednoj od ovih oblasti funkcije nemaju logaritamske singularitete. Otuda se Fourierova inverzija rešenja transformisane jednačine, komponovanog od samo analitičkih ili meromorfnih kompleksnih funkcija, može obaviti egzaktno. Rezultat je rešenje transportne jednačine u realnom prostoru koje je sačinjeno od elementarnih funkcija, bez članova sa singularnim integralima.

Na osnovu gornjeg zapažanja, po prvi put su egzaktno rešene transportne jednačine specifičnih skupova čestica koje difunduju u beskonačnoj sredini. Dobijeno je analitičko rešenje $\phi^a(x,\mu)$, za $x > 0$ - ugaona gustina fluksa čestica koje se u beskonačnoj sredini do poslednjeg sudara restriktivno rasejavaju uvek u pravcima omeđenim sa $\mu < 0$, kao i rešenje $\phi^b(x,\mu)$, za $x < 0$ - ugaona gustina fluksa čestice koje se do poslednjeg sudara rasejavaju uvek u pravcima $\mu > 0$, sa poslednjim rasejanjem koje se zbiva nerestriktivno u $\mu \in [-1,1]$. Zatim je rešena transportna jednačina čestica koje prodiru kroz poluprostor $x > 0$, pri čemu se do poslednjeg sudara rasejavaju isključivo u $\mu < 0$. Njihova ugaona gustina fluksa $\phi^a(x,\mu)$, za $x > 0$, takođe je egzaktno određena.

Nova rešenja svojim oblicima podsećaju na ugaonu gustinu fluksa jednom sudarenih čestica $\phi^{(1)}(x,\mu)$: rešenje $\phi^a(x,\mu)$ u poluprostoru $x > 0$, a rešenje $\phi^b(x,\mu)$ u poluprostoru $x < 0$. Ispitivanjem fizičkog smisla ovih veličina utvrđeno je da one zaista predstavljaju generalizaciju ugaone gustine fluksa $\phi^{(1)}(x,\mu)$.

Sva rešenja formulisana su za proizvoljnu anizotropiju funkcije rasejanja, ali su konačni izrazi izvedeni samo za izotropno i linearno anizotropno rasejanje. Nema načelnih prepreka da se uključi funkcija rasejanja višeg reda anizotropije, izuzev što konačni izrazi postaju previše glomazni.

Nova rešenja specifičnih transportnih jednačina imaju jednostavne matematičke oblike, slične ugaonoj gustini fluksa jednom sudarenih čestica. Međutim, ona uključuju širi skup od skupa jednom sudarenih čestica, znatno bliži skupu svih čestica.Izračunavanja i poređenja pokazala su da nova rešenja, nezavisno od samog heurističkog značaja, imaju nesumnjivu praktičnu vrednost. Ona dovoljno tačno zamenjuju ukupno rešenje u dominantno apsorbujućim sredinama, u graničnom području malih vrednosti konstante umnožavanja c.

Literatura

[1] CASE,K.M., DE HOFFMANN,F., PLACZEK,G. *Introduction to the Theory of Neutron Diffusion.* vol.1, Los Alamos Scientific Laboratory, 1953.

[2] KAVENOKY,A. *La méthode C_N de résolution de l'équation du transport.* Thèse de Doctorat, Orsay, 1973.

[3] WILLIAMS,M.M.R. *Mathematical Methods in Particle Transport Theory.* London, Butterworth, 1971.

[4] CASE,K.M. Elementary Solutions of the Transport Equation and Their Applications. *Ann. Phys.,* 1960, no.9, p.1-23.

[5] CASE,K.M., ZWEIFEL, P.F. *Linear Transport Theory,* Reading. Addison-Wesley Pub. Comp., 1967.

[6] LARSEN,E.W., HABETLER,G.J. A Functional-Analytic Derivation of Case's Full and Half-Range Formulas, Commun. *Pure Appl. Math.,* 1973, vol.XXVI, p.525-537.

[7] GREENBERG,W., ZWEIFEL,P.F. Tenth-International Conference on Transport Theory. *Transp. Theory Stat. Phys.,* 1987, vol.16, no.8, p.1167-1175.

[8] DUDERSTAD,J.J., MARTIN,W.R. *Transport Theory*. New York, John Wiley & Sons, 1979.

[9] LARSEN,E.W., ZWEIFEL,P.F. On the Spectrum of the Linear Transport Operator, *J.Math.Phys*., 1974, vol.15, no.11, p.1987-1997.

[10] SLAWNY,J., ZWEIFEL,P.F. A Note on the Singular Eigenfunction Method in Transport Theory. *Transp. Theory Stat. Phys*., 1988, vol.17, no.2&3, p.283-294.

[11] LARSEN,E.W., POMRANING,G.C. The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar Geometry - I: Analysis. *Nucl. Sci. Eng*., 1991, vol.109, p.49-75.

[12] RULKO,R.P., LARSEN,E.W., POMRANING,G.C. The P_N Theory as an Asymptotic Limit of Transport Theory in Planar geometry - II: Numerical Results. *Nucl. Sci. Eng*., 1991, vol.109, p.76-85.

[13] GERMOGENOVA,T.A. *Lokal'nue svoistva rešeniju uravnenija perenosa*. Moskva. Nauka,1986.

[14] BELL,G., GLASSTONE,S. *Nuclear Reactor Theory.* Van Nostrand Reinhold Company, 1970.

[15] SYROS,C. Solution of the Neutron Slowing Down Problem via a Multiple Collision Aproach. *Nucl. Sci. Eng*., 1967, vol.28, p.203-214.

[16] PAPMEHL,N., ZECH,H.J. The Order of Neutron-Scattering Method in Plane Geometry-One-Velocity Problems. *Nucl. Sci. Eng.,* 1972, vol.47, p.435-448.

[17] WOOLF,S., GARTH,J.C., FILIPPONE,W.L. Orders-of-Scattering Analysis of Particle Transport in Finite Slabs. *Nucl. Sci. Eng,*. 1977, vol.62, p.278-295.

[18] SYROS,C. A Generalization of the Multiple Collision method. *Nukleonik*, 1966, vol.8, no.8, p.467-471.

[19] SIMOVIĆ,R. A New Formulation of the Order of Scattering Method, 7th International Conference on Radiation Shielding, Bournemouth, England. *Proceedings of the 7th ICRS*, 1988, vol. I, p.125.

[20] SIMOVIĆ,R. Two Analytic Transport Equation Solutions for Particular Cases of Particle History. *Trans. Am. Nucl. Soc*., 1997, vol.77, p.196-198.

[21] SIMOVIĆ,R. *Aproksimativno analitičko rešenje transportnog problema refleksije čestica od čvrste mete*. Doktorska disertacija, Elektrotehnički fakultet, Beograd, 2001.

[22] HSU,H.P. *Applied Fourier Analysis*. San Diego, Harcourt Brace Jovanovich, 1984.

[23] MITRINOVIĆ,D.S., KEČKIĆ,J.D. *Jednačine matematičke fizike*. Beograd, Građevinska knjiga, 1972.

[24] MITRINOVIĆ,D.S., KEČKIĆ,J.D. *Cauchyjev račun ostataka sa primenama*. Beograd, Naučna knjiga, 1978.

[25] ŠIHOV,S.B., TROJANSKIJ,V.B. Teorija jadernux reaktorov,Tom 2. Moskva, Energoatomizdat, 1983.

[26] KAVENOKY,A. The C_N Method of Solving the Transport Equation: Application to plane Geometry. *Nucl. Sci. Eng.,* 1978, vol.65, p.209-225.

[27] ABRAMOWITZ,M., STEGUN,I.A. (EDS) *Handbook of Mathematical Functions*. National Bureau of Standards, 1964.

[28] SIMOVIĆ,R. *Rešavanje problema refleksije u transportnoj teoriji metodom aproksimativne Grinove funkcije.* XXX jugoslovenska konferencija ETAN-a, Herceg Novi, Zbornik radova, sv. IX, 1986, p.81-88.

[29] SIMOVIĆ,R. *Jedan iterativni metod za rešavanje transportne jednačine neutrona.* XXXII jugoslovenska konferencija ETAN-a, Sarajevo, Zbornik radova, sv. IX, 1988, p.37-44.

[30] SIMOVIĆ,R. Analytic Solutions of Some specific Transport Equations. *Nuklearna tehnologija*, 2000, vol.15, no.1&2, p.29-37.

[31] HEARN,A. *Reduce User's Manual.* Version 3.2, Rand Publication CP78, 1985.

[32] MITRINOVIĆ,D.S., ĐOKOVIĆ,D.Ž. *Polinomi i matrice*. Beograd, Naučna knjiga, 1991.

Rad primljen: 24.5.2001.god.