

## Analiza dinamike lansera na mehaničkom modelu sa elastičnim osloncima i deformabilnom rampom

Dr Vlado Đurković, dipl.inž.<sup>1)</sup>  
Dr Ratko Šelmić, dipl.inž.<sup>2)</sup>

Razmatran je dinamički model lansirnog uređaja tokom procesa lansiranja letelice i analiziran uticaj konstrukcionih parametara sistema na startne parametre letelice. Izvršena je odgovarajuća numerička analiza dinamičkih parametara važnih za start i preciznost letelice, pri čemu je za rešenje sistema nelinearnih diferencijalnih jednačina korišćen programski paket MatLab 5.2. Dobijen je niz dijagrama koji mogu da posluže kao dobra smernica konstruktoru u fazi projektovanja. Deo rezultata istraživanja je eksperimentalno verifikovan.

*Ključne reči:* Lansirna rampa, lansiranje, letelica, dinamički model, raketa, diferencijalne jednačine kretanja.

### Uvod

**R**AKETNI lanser spada u grupu artiljerijskih oruđa namenjenih za dejstvo po živoj sili, ali i po pojedinim utvrđenim tačkama duboko u pozadini neprijatelja. Vojni teoretičari ga stoga svrstavaju u grupu artiljerijskih oruđa za podršku sopstvenoj pešadiji. Raketni lanser karakteriše velika vatrena moć i manevarska sposobnost, zahvaljujući mogućnosti da se kreće s raketama na lansirnoj rampi. Spreman je da u veoma kratkom vremenu napusti neki položaj i pređe na novi, što mu omogućuje da se brzo i neočekivano pojavi na mestima na kojima ga neprijatelj najmanje očekuje.

Rakete koje se koriste na lanseru ovakvog tipa jesu nevođene rakete. Radi ostvarenja predviđenih efekata je potrebno da se rakete lansiraju pod tačno određenim uglom elevacije i azimuta. Raketni motor ovih raketa služi za pogon rakete sve dok imaju goriva, a zatim raketa nastavlja let kao projektil.

Lansirna rampa, kao vitalni deo lansera, ima zadatak da pridržava i vodi raketu pravcem željene elevacije. Lansirna rampa svojom dužinom mora da osigura toliko dugo vođenje rakete, dok vertikalna komponenta vektora potiska raketnog motora ne uravnoteži silu težine same rakete. Tom prilikom može da se dogodi prevremeno odvajanje rakete od lansirne rampe.

Da bi se izbegla dugačka lansirna rampa (pri lansiranju rakete V1 korišćena je rampa od 49 m), na konstrukciji lansera se ugrađuju uređaji za zadržavanje rakete sve dok sila potiska raketnog motora ne naraste na vrednost koja će masi rakete dati potrebno ubrzanje. Ovim rešenjem se znatno smanjuje dužina lansirne rampe, čak toliko da nije u stanju da obezbedi sigurno i stabilno prevoženje rakete u toku manevra. Zbog toga se kod izbora dužine lansirne rampe primenjuje uslov stabilnosti rakete na lansirnoj rampi u uslovima prevoženja.

Dinamički parametri lansirne rampe i same letelice pri lansiranju letelice u literaturi su dosta opisani. Ipak, u monografiji [1], koja predstavlja referentnu literaturu iz ove oblasti, lansirna rampa (strela) se razmatra kao kruto telo, što ne odgovara u potpunosti stvarnim uslovima u eksploataciji. Takođe se ne uzima u obzir elastičnost oslonca rampe i elastičnost oslonaca lansera, što je veoma značajno s obzirom na činjenicu da lanser može da dejstvuje na podlogama različite kategorije. U ovom radu postavljen je i dalje analiziran mehaničko-matematički model, kojim se u obzir uzimaju uticajni parametri u fazi lansiranja letelice. Posebno su analizirani deformacija lansirne rampe, brzina letelice, uticaj krutosti oslonca rampe i krutosti oslonaca lansera i dr. na mehaničkom modelu s elastičnim osloncima. Zatim je razrađen numerički primer konkretne konstrukcije i izvedeni zaključci od interesa za poboljšanje konstrukcije.

### Mehaničko-matematički model

Mehanički model lansera u toku lansiranja rakete (sl.1) u dobroj meri je zasnovan na mehaničkim modelima analognih objekata: auto-dizalici i teleskopskoj streli auto-dizalice [2,3,4]. Model se sastoji od krutih tela i deformabilnih elemenata s elastičnim vezama. Donji deo lansera (sl.1, pozicija 1), sastavljen je od šasije, kabine, pogonskih agregata i oslonaca (pneumatika i stabilizatora). Šasija s agregatima i elementima na njoj smatraće se krutom pločom oslonjenom na odgovarajuće opruge. Ovakva aproksimacija je dopuštena, posebno kod konstrukcijski ojačanih šasija. Krutost ovih opruga odgovara redukovanoj krutosti oslonaca i podloge.

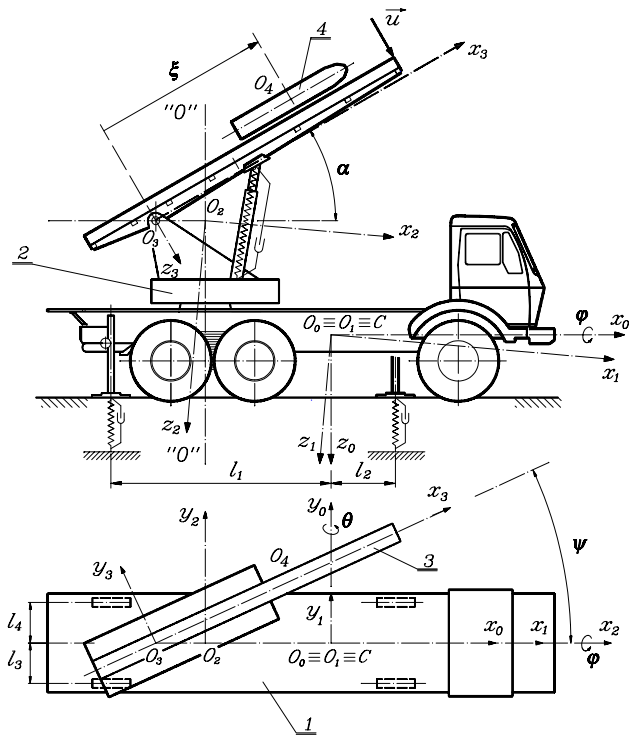
Gornji stroj lansera (sl.1, pozicija 2), koji obuhvata lafet, radialno-aksijalni ležaj, mehanizme za podizanje i okretanje rampe, smatra se krutim telom koje se oslanja na šasiju. Lansirna rampa (strela) (sl.1, pozicija 3), predstavlja gredu s prepustom (zanemaruje se manji prepust rampe), koja je

<sup>1)</sup> Vojnotehnička akademija VJ, 11000 Beograd, Ratka Resanovića 1

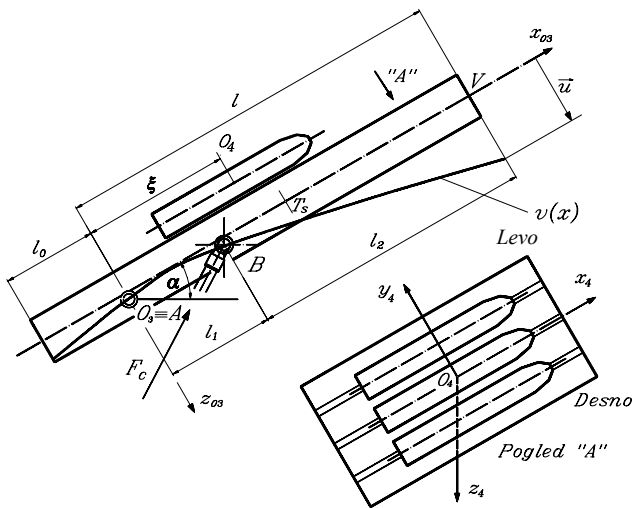
<sup>2)</sup> Saobraćajni fakultet, 11000 Beograd, Vojvode Stepe 305

elastična i deformabilna u vertikalnoj i horizontalnoj ravni (sl.2.).

Raketa – letelica (sl.1, pozicija 4,) predstavlja kruto telo mase  $m$ .



Slika 1. Mehanički model lansera



Slika 2. Mehanički model lansirne rampe s letelicama

### Generalisane koordinate

Kretanje navedenog mehaničkog sistema je definisano sledećim generalisanim koordinatama (slike 1,2,3):

- $z_c$  - vertikalno pomeranje središta masa (tačka  $C \equiv O_0$ ) donjeg stroja (šasijske),
- $\varphi$  - rotacija oko uzdužne glavne centralne ose inercije  $O_1x_1$  donjeg stroja (šasijske),
- $\theta$  - rotacija oko poprečne glavne centralne ose inercije  $O_1y_1$  donjeg stroja (šasijske),
- $u$  - deformacija vrha lansirne rampe (strele) u vertikalnoj ravni upravna na podužnu osu lansirne rampe

(strele),

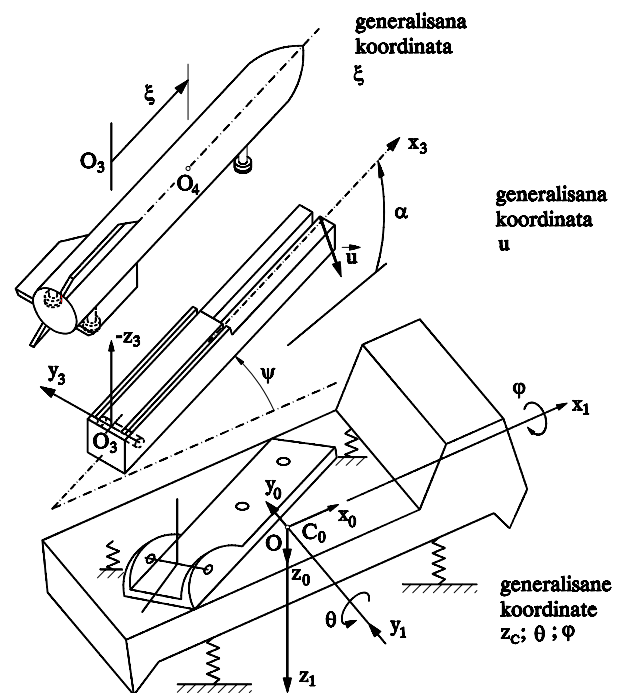
$\xi$  - pomeranje rakete (letelice) po lansirnoj rampi (strelji)

### Koordinatni sistemi

Kretanje ovako složenog mehaničkog sistema razmatrano je metodom s koordinatnim sistemima, koji je detaljno interpretiran u [2]. Koordinatni sistemi u odnosu na koje se ovde posmatra kretanje su (slike 1 i 3):

- $x_0y_0z_0$  - nepokretni koordinatni sistem sa centrom  $O_0$  u tački  $C$  usvojen za celi sistem. Osa  $Ox_0$  se poklapa sa uzdužnom, a osa  $Oy_0$  sa poprečnom glavnom centralnom osom inercije donjeg stroja u ravnotežnom položaju i osa  $Oz_0$  je usmerena vertikalno nadole,
- $x_1y_1z_1$  - pokretni koordinatni sistem sa centrom  $O_1$  u tački  $C$  (centar mase šasijske). Osa  $Ox_1$  se poklapa sa uzdužnom, a osa  $Oy_1$  sa poprečnom glavnom centralnom osom inercije šasijske u ravnotežnom položaju i osa  $Oz_1$  je usmerena vertikalno nadole,
- $x_2y_2z_2$  - pokretni koordinatni sistem usvojen za lafet i lansirnu rampu (strelu) sa centrom u tački  $O_2$  koja je u preseku uzdužne ose lafeta i horizontalne ravni koja prolazi kroz zglobov lansirne rampe,
- $x_3y_3z_3$  - pokretni koordinatni sistem sa centrom  $O_3$  u zglobov lansirne rampe (strele), dok je osa  $x_3$  usmerena ka vrhu lansirne rampe, osa  $y_3$  upravna na lansirnu rampu i osa  $z_3$  usmerena upravno na  $O_3x_3y_3$  ravan.

*Napomena:* tačke  $C$ ,  $O_1$  i  $O_0$  se poklapaju kada je mehanički sistem u mirovanju.



Slika 3. Generalisane koordinate mehaničkog sistema

### Kinetička energija sistema

Kinetička energija mehaničkog sistema je:

$$E_k = E_{k1} + E_{k2}$$

gde su:

- $E_{k1}$  – kinetička energija šasije, lafeta i pripadajućih komponentata,  
 $E_{k2}$  – kinetička energija rakete i lansirne rampe, tj.:

$$E_{k1} = \frac{1}{2} m_1 v_1^2 + \frac{1}{2} J_{1x_1} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_{1y_1} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} m_L v_L^2 + \frac{1}{2} J_{Lx_2} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_{Ly_2} \dot{\theta}^2$$

$$E_{k2} = \frac{1}{2} m_r v_r^2 + \frac{1}{2} J_{ry} \dot{\delta}_r^2 + \frac{1}{2} m_s v_{TS}^2 + \frac{1}{2} J_{sy} \dot{\delta}_s^2 + \frac{1}{2} J_{ry} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{rx} \dot{\phi}^2 + \frac{1}{2} J_{sy} \dot{\theta}^2 + \frac{1}{2} J_{sx} \dot{\phi}^2$$

pri čemu je:

- $m_1$  – masa šasije i njoj pripadajućih elemenata,  
 $\dot{z}_C = v_C = v_1$  – brzina središta masa šasije,  
 $J_{1x}$  – moment inercije šasije za podužnu  $O_1x_1$  osu, koja prolazi kroz središte mase šasije  $O_1$ ,  
 $\phi$  – ugaona brzina šasije oko njene podužne ose inercije  $O_1y_1$ ,  
 $\theta$  – ugaona brzina šasije oko njene poprečne ose inercije  $O_1x_1$ ,  
 $J_{1y}$  – moment inercije šasije za poprečnu  $y_1$  - osu koja prolazi kroz središte mase šasije  $O_1$ ,  
 $m_L$  – masa lafeta,  
 $v_L$  – brzina središta mase lafeta,  
 $J_{Lx_2}$  – moment inercije lafeta za podužnu  $x$ - osu koja prolazi kroz središte mase šasije  $O_1$ ,  
 $L_{Ly_2}$  – moment inercije lafeta za poprečnu  $y$ -osu koja prolazi kroz središte mase šasije  $O_1$ ,

$$J_{Lx_2} = J_{2x}^* \cos^2 \psi + J_{2y}^* \sin^2 \psi - J_{2xy}^* \sin 2\psi$$

$$J_{Ly_2} = J_{2x}^* \sin^2 \psi + J_{2y}^* \cos^2 \psi + J_{2xy}^* \sin 2\psi$$

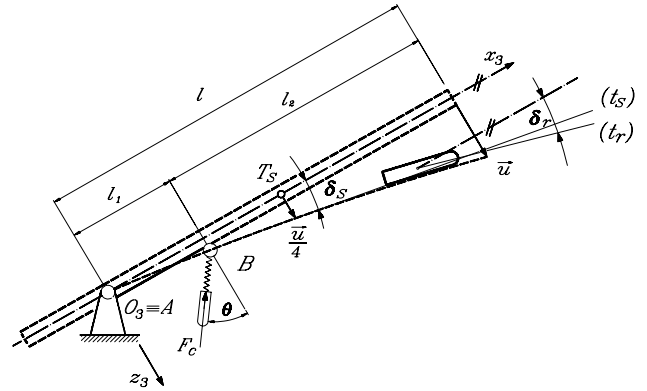
gde su:

- $J_{2x}^*, J_{2y}^*$  – momenti inercije gornjeg stroja za odgovarajuće ose u položaju prikazanom na slici 1,  
 $J_{rx}, J_{ry}$  – momenti inercije rakete za odgovarajuće ose šasije,  
 $J_{sx}, J_{sy}$  – momenti inercije strele za odgovarajuće ose šasije,  
 $m_r$  – masa rakete,  
 $v_r$  – brzina rakete,  
 $\dot{\delta}_r = 2\dot{u} \frac{\xi}{l^2} + 2u \frac{\dot{\xi}}{l^2}$  – ugaona brzina rakete oko njene težišne poprečne ose  $O_4y$ ,  
 $\dot{\delta}_s = \frac{\dot{u}}{l}$  – ugaona brzina lansirne rampe oko težišne poprečne ose rampe,  
 $m_s$  – masa lansirne rampe,  
 $v_s = v_{TS}$  – brzina pomeranja središta masa lansirne rampe (strele) usled elastičnog oslonca i deformacije lansirne rampe

Pri određivanju kinetičke i potencijalne energije pretpostavlja se kriva oblika oscilovanja  $v = v(x)$  lansirne rampe funkcijom [2,3,5-7]:

$$v(x) = u \left( \frac{x}{l} \right)^2$$

predstavljenom na sl.2, gde je  $x$ - koordinata po podužnoj težišnoj osi rampe,  $l$ - dužina rampe od oslonca – zgloba do vrha rampe.



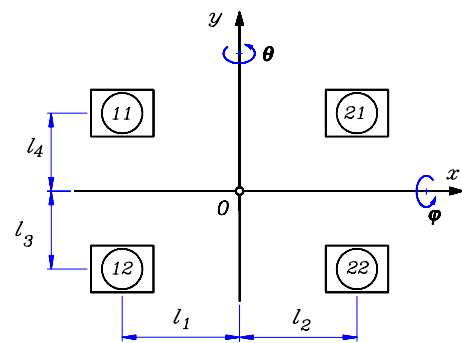
Slika 4. Uglovi rotacije rakete i centra mase lansirne rampe

Potencijalna energija usvojenog mehaničkog sistema je jednaka zbiru potencijalne energije oslonca i podloge, šasije i njoj pripadajućih elemenata i potencijalne energije deformacije lansirne rampe:

$$E_p = \frac{1}{2} c_{11} (\lambda_{11} + p_{11})^2 + \frac{1}{2} c_{12} (\lambda_{12} + p_{12})^2 + \frac{1}{2} c_{21} (\lambda_{21} + p_{21})^2 + \frac{1}{2} c_{22} (\lambda_{22} + p_{22})^2 - g \sum m_i (z_i - z_i^0) + E_{ps}$$

gde su:

- $c_{j,k}$  ( $j, k = 1, 2$ ) – redukovana krutost podloge i oslonca (stabilizatora, stopa),  
 $p_{j,k}$  ( $j, k = 1, 2$ ) – redukovana dinamička deformacija podloge i oslonca,  
 $\lambda_{j,k}$  ( $j, k = 1, 2$ ) – odgovarajuće statičke deformacije,  
 $z_i, z_i^0$  – tekuće i početne ordinatne središta masa elemenata sistema.



Slika 5. Oslona kontura i raspored stabilizatora (stopa)

Za oslonu konturu kao na sl.5 je:

$$p_{11} = z_C - l_4 \phi - l_1 \theta ; p_{21} = z_C - l_4 \phi + l_2 \theta$$

$$p_{12} = z_C + l_3 \phi - l_1 \theta ; p_{22} = z_C + l_3 \phi + l_2 \theta$$

Potencijalna energija lansirne rampe (strele) je [8, 9]:

$$E_{ps} = E_{ps1} + E_{ps2} + E_{ps3}$$

- $E_{ps1}$  – potencijalna energija elastične deformacije lansirne rampe usled savijanja (ne uzimajući u obzir smicanje),

$$E_{ps1} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{sy} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx = k_1 \cdot u^2$$

gde su:  $E$  – modul elastičnosti materijala rampe,  $I_{sy}$  – moment inercije površine poprečnog preseka lansirne rampe za osu  $y-y_i$ ,  $l$  – dužina lansirne rampe,  $u$  – ugib vrha lansirne rampe,  $k_1$  – konstanta [7], koja zavisi od parametara lansirne rampe.

- $E_{ps2}$  – potencijalna energija pritiska – istezanja lansirne rampe usled dejstva rezultujuće aksijalne sile  $N(x,t)$ : od kontinualnog opterećenja lansirne rampe (strele), opterećenja rakete, deformacije hidrauličkog cilindra i dejstva sile trenja:

$$E_{ps2} = \frac{1}{2} \int_0^l N(x,t) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx = k_2 u^2 + k_3 u^3$$

gde su:  $k_2, k_3$  – konstante koje zavise od masa strele i rakete, koeficijenta trenja, krutosti hidrocilindra i geometrije lansirne rampe i hidrocilindra.

- $E_{ps3}$  – potencijalna energija lansirne rampe usled dejstva rezultujuće transverzalne sile  $f(x)$  zbog opterećenja rakete, kontinualnog opterećenja lansirne rampe (strele) i sile u hidrauličkom cilindru (sl.4):

$$E_{ps3} = \frac{1}{2} \int_0^l f(x) v dx = k_4 u + k_5 u^2$$

pri čemu su:  $k_4, k_5$  – takođe konstante [7].

Dakle, ukupna potencijalna energija lansirne rampe iznosi:

$$E_{ps} = E_{ps1} + E_{ps2} + E_{ps3} = k_{11} u + k_{22} u^2 + k_{33} u^3$$

gde su konstante respektivno:  $k_{11} = k_4$ ,  $k_{22} = k_1 + k_2 + k_5$ ,  $k_{33} = k_3$ .

Izraz za potencijalnu energiju čitavog mehaničkog sistema konačno ima oblik:

$$E_p = \frac{1}{2} c_{11} (\lambda_{11} + p_{11})^2 + \frac{1}{2} c_{12} (\lambda_{11} + p_{12})^2 + \frac{1}{2} c_{21} (\lambda_{21} + p_{21})^2 + \frac{1}{2} c_{22} (\lambda_{22} + p_{22})^2 - g \sum m_i (z_i - z_i^0) + k_{11} u + k_{22} u^2 + k_{33} u^3$$

### Generalisane sile

Generalisane sile su prema opštem izrazu:

$$Q_r = \sum_{i=1}^n \left( X_i \frac{\partial x_i}{\partial q_r} + Y_i \frac{\partial y_i}{\partial q_r} + Z_i \frac{\partial z_i}{\partial q_r} \right)$$

Generalisane sile koje odgovaraju koordinatama  $\xi$  i  $u$  su:

$$Q_\xi = F_p - F_\mu - F_{ot.vaz.}$$

$F_p$  – sila potiska (sl.6),

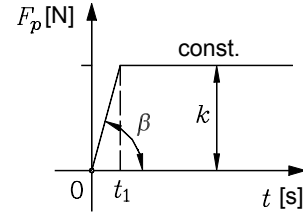
$$F_p = k \cdot t, \text{ ZA } 0 < t \leq t_1$$

$$F_p = \text{const}, \text{ ZA } t > t_1$$

(pri temperaturi vazduha  $t=15^\circ\text{C}$ , brzina narastanja potisne sile je  $k = 582130,98 \frac{\text{N}}{\text{s}}$ )

$F_\mu$  – sila trenja rakete o lansirnu rampu,

$F_{ot.vaz.}$  – sila otpora vazduha pri kretanju rakete na lansirnoj rampi.



Slika 6. Promena sile potiska u funkciji vremena

Može se smatrati da su ostale generalisane sile približno jednake nuli, tj.:

$$Q_u = 0, \quad Q_{z_c} = 0, \quad Q_\varphi = 0, \quad Q_\theta = 0$$

### Ordinate i brzine karakterističnih tačaka sistema

Određivanje radijus vektora (posebno ordinata) i brzina karakterističnih tačaka ovako složenih mehaničkih sistema klasičnim metodom je veoma složen postupak i često praktično neizvodljiv. Zbog toga se ovde primjenjuje matricni metod zasnovan na više koordinatnih sistema, najpre postavljen u [2], a zatim primenjen i u [7].

Neka je vektor položaja bilo koje tačke sistema u odnosu na nepokretni koordinatni sistem  $\rho_{n0}$ ,  $r_k$  – vektor između centara susjednih koordinatnih sistema  $O_{k-1}$  i  $O_k$  i  $\mathbf{T}_{ko}$  – matrica kosinusa uglova  $k$  – tog koordinatnog sistema u odnosu na nepokretni koordinatni sistem. Tada je:

$$\rho_{n0} = \mathbf{r}_{10} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{T}_{k0} \cdot \mathbf{r}_k$$

Tako su radijus vektori težišta lafeta ( $L$ ), težišta lansirne rampe ( $S$ ) i težišta rakete ( $R$ ), respektivno:

$$\rho_L = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{T}_{10} \mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_{20} \mathbf{b}_L$$

$$\rho_S = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{T}_{10} \mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_{20} \mathbf{r}_2 + \mathbf{T}_{30} \mathbf{r}_{3S}$$

$$\rho_R = \mathbf{r}_{10} + \mathbf{T}_{10} \mathbf{r}_1 + \mathbf{T}_{20} \mathbf{r}_2 + \mathbf{T}_{30} \mathbf{r}_{3R}$$

pri čemu su:  $b_L$ ,  $r_{3S}$ ,  $r_{3R}$  – radijus vektori težišta lafeta, rampe i rakete u odgovarajućim pokretnim koordinatnim sistemima, a odgovarajuće matrice kosinusa uglova su:

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} \cos\theta & \sin\varphi \sin\theta & \cos\varphi \sin\theta \\ 0 & \cos\varphi & -\sin\varphi \\ -\sin\theta & \sin\varphi \cos\theta & \cos\varphi \cos\theta \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{10} = \begin{bmatrix} 1 & \varphi\theta & \theta \\ 0 & 1 & -\varphi \\ -\theta & \varphi & 1 \end{bmatrix} \approx \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\varphi \\ -\theta & \varphi & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathbf{T}_{20} = \mathbf{T}_{10} \cdot \mathbf{T}_{21} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \theta \\ 0 & 1 & -\varphi \\ -\theta & \varphi & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathbf{T}_{10}$$

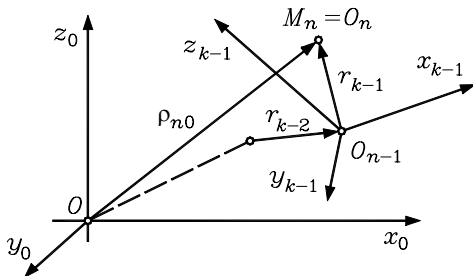
$$\mathbf{T}_{30} = \mathbf{T}_{20} \cdot \mathbf{T}_{32} =$$

$$= \begin{bmatrix} \cos\psi & & -\sin\psi & \theta \\ \sin\psi & & \cos\psi & -\varphi \\ -\theta \cdot \cos\psi + \varphi \cdot \sin\psi & & \theta \cdot \sin\psi + \varphi \cdot \cos\psi & 1 \end{bmatrix}$$

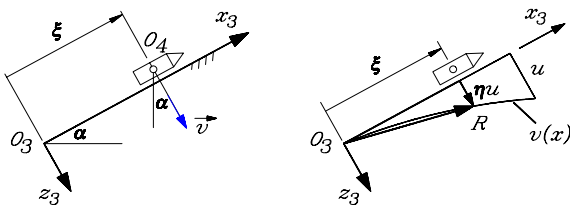
Određivanje brzina ovim postupkom [2], koji se inače sve više primjenjuje u dinamici robota, potpuno se formalizuje i svodi na izvođe matrica, vektora položaja i proizvode matrica. Brzina proizvoljne tačke sistema je:

$$\mathbf{v}_{n0} = \dot{\rho}_{n0} = \dot{\mathbf{r}}_{10} + \sum_{k=1}^{n-1} \mathbf{T}_{k0} \cdot \dot{\mathbf{r}}_k + \sum_{k=1}^{n-1} \dot{\mathbf{T}}_{k0} \cdot \mathbf{r}_k$$

gde je  $\dot{\mathbf{r}}_k$  – lokalni izvod vektora.



Slika 7. Radijus vektori proizvoljne tačke  $M_n$  u  $x_{k-1}, y_{k-1}, z_{k-1}$  koordinatnom sistemu



Slika 8. Ugib lansirne rampe u funkciji položaja rakete na lansirnoj rampi

Napišimo sada brzine tačaka,  $C, L, R$  i  $S$  u sažetom, tj. matricnom obliku, radi uprošćavanja diferencijalnih jednačina kretanja mehaničkog sistema.

– Brzina središta mase šasije vozila, tačke  $C$  :

$$\mathbf{v}_C = \dot{z}_C \cdot \bar{k}$$

– Brzina središta mase lafeta, tačke  $L$  :

$$\mathbf{v}_L = \begin{bmatrix} \dot{x}_L \\ \dot{y}_L \\ \dot{z}_L \end{bmatrix} = \mathbf{H} \cdot \dot{\mathbf{q}} = \begin{bmatrix} h_{11} & h_{12} & h_{13} & h_{14} & h_{15} \\ h_{21} & h_{22} & h_{23} & h_{24} & h_{25} \\ h_{31} & h_{32} & h_{33} & h_{34} & h_{35} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \\ \dot{\varphi} \\ \dot{\theta} \end{bmatrix}$$

– Brzina središta mase rakete (tačka  $R$ ) i brzina središta mase strele (tačka  $S$ ) je:

$$\mathbf{v}_R = \begin{bmatrix} \dot{x}_R \\ \dot{y}_R \\ \dot{z}_R \end{bmatrix} = \mathbf{F} \cdot \dot{\mathbf{q}} \quad \mathbf{v}_S = \begin{bmatrix} \dot{x}_S \\ \dot{y}_S \\ \dot{z}_S \end{bmatrix} = \mathbf{G} \cdot \dot{\mathbf{q}}$$

pri čemu su elementi matrica  $\mathbf{H}, \mathbf{F}, \mathbf{G}$  – konstante ili funkcije generalisanih koordinata ili brzina.

### Matematički model - diferencijalne jednačine kretanja mehaničkog sistema

Za izvođenje diferencijalnih jednačina kretanja korišćene su Langranžove jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = Q_r^N, \quad (r = 1, 2, \dots, 5)$$

$$q_r = z_C, \varphi, \theta, \xi, u$$

Dobijeni matematički model predstavlja sistem pet nelinearnih, nehomogenih diferencijalnih jednačina drugog reda. Dati sistem diferencijalnih jednačina je blizak sistemima Ljapunova, a rešava se razlaganjem malih parametara u vidu reda, pri čemu se od običnih diferencijalnih jednačina prelazi na sistem parcijalnih diferencijalnih jednačina po izabranim promenljivim [2].

Međutim, navedeni sistem se brže i jednostavnije rešava korišćenjem diskretnih numeričkih metoda, koje se veoma efikasno realizuju na računarima. Za ovakve sisteme diferencijalnih jednačina, preporučuje se metoda Runge-Kuta. Iz tog razloga potrebno je sistem diferencijalnih jednačina napisati u matricnom obliku:

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{q}} + \mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} = \mathbf{D}$$

gde su odgovarajuće matrice  $\mathbf{A}, \mathbf{B}, \mathbf{C}$  i  $\mathbf{D}$  funkcije generalisanih koordinata i brzina, pri čemu je: matrica  $\mathbf{A}$  - matrica inercije, matrica  $\mathbf{B}$  - matrica prigušenja,  $\mathbf{C}$  - matrica krutosti i matrica  $\mathbf{D}$  - matrica pobude.

Programski paket MatLab 5.2 omogućava rešavanje nelinearnih diferencijalnih jednačina [10]. Zbog primene programskog paketa MatLab 5.2 bilo je potrebno da se diferencijalne jednačine kretanja napišu u matricnom obliku u sledećoj formi:

$$\mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -(\mathbf{B} \cdot \dot{\mathbf{q}} + \mathbf{C} \cdot \mathbf{q} + \mathbf{D}) \quad \text{tj.} \quad \mathbf{A} \cdot \ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{S}$$

odakle se dobija:  $\ddot{\mathbf{q}} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \mathbf{S}$ , tj.:

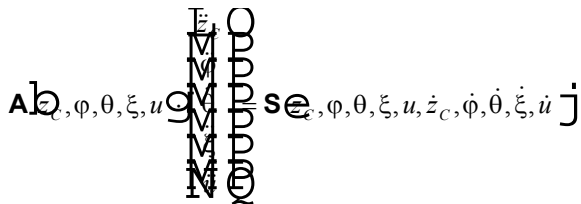
$$\begin{bmatrix} \ddot{z}_C \\ \ddot{\varphi} \\ \ddot{\theta} \\ \ddot{\xi} \\ \ddot{u} \end{bmatrix} = -\mathbf{A}^{-1} \cdot \begin{bmatrix} S_{11} \\ S_{21} \\ S_{31} \\ S_{41} \\ S_{51} \end{bmatrix}$$

Ovako pripremljene izraze za ubrzanja i brzine moguće je rešiti programskim paketom uz prethodnu zamenu promenljivih i to:

$$x_1 = z_C; x_2 = \dot{z}_C; x_3 = \varphi; x_4 = \dot{\varphi}; x_5 = \theta; x_6 = \dot{\theta};$$

$$x_7 = \xi; x_8 = \dot{\xi}; x_9 = u; x_{10} = \dot{u}.$$

Sistem diferencijalnih jednačina tada dobija oblik:



a transformiše se na sistem od 10 diferencijalnih jednačina prvog reda, pogodan za numeričko rešavanje programskim paketom MatLab 5.2. [10].

Numerička analiza ovog problema je urađena za konkretnu konstrukciju i letelicu.

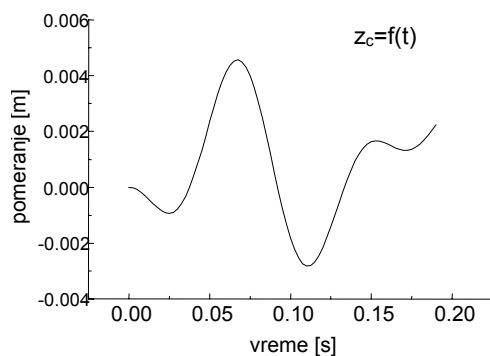
### Analiza rezultata

Numerička analiza je vršena za slučaj kada je hidrocilindar zamenjen silom otpora linearno proporcionalnom prvom stepenu brzine tačke  $B$  (sl.2), tj. sila u hidrocilindru je:

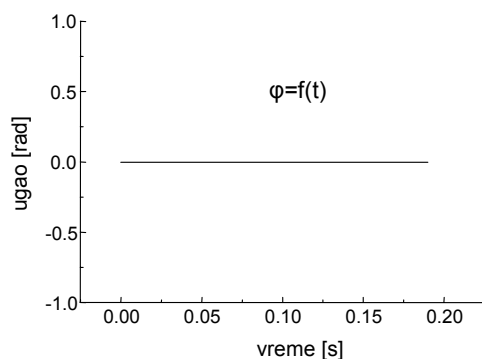
$$F_c = F_{c1} + F_{c3} = \frac{\pi}{4}(D^2 - d^2) \cdot p + b_{cil} \cdot \dot{u}(l_1) \cos\theta$$

gde su:  $D, d, \theta$  - geometrijski parametri cilindra,  $b_{cil}$  - koeficijent prigušenja u cilindru.

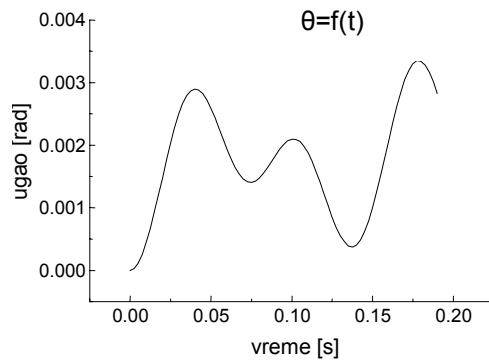
Grafički pregled karakterističnih parametara dat je na slikama 9-12:



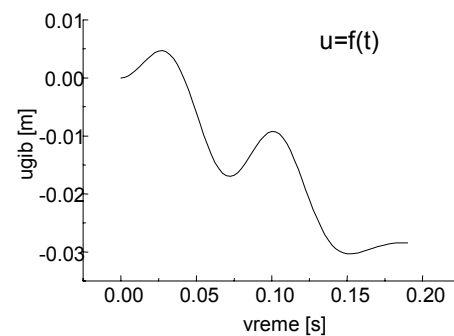
Slika 9.



Slika 10.



Slika 11.



Slika 12.

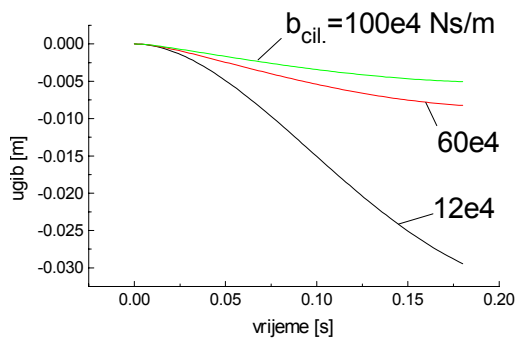
Na osnovu ulaznih podataka i dobijenih dijagrama, zaključujemo:

- pomjeranje centra mase šasije odvija se u granici do 0,009 m (sl.9),
- rotacija oko  $x$  – ose ne postoji jer su sve mase na toj osi (sl.10),
- rotacija oko  $y$  – ose postoji zbog potisne sile i momenta sila pri kretanju rakete po lansirnoj rampi, a odvija se po harmonijskoj funkciji (sl.11),
- ugib lansirne rampe je najveći na kraju lansirne rampe i nelinearnog je karaktera a iznosi 0,03 m (sl.12).

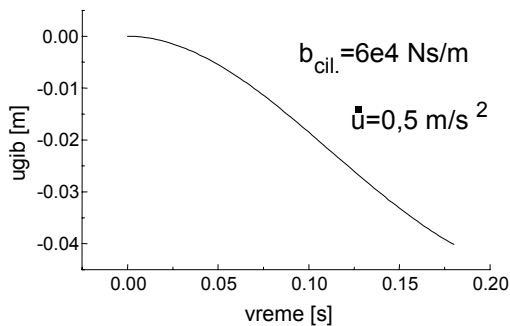
Iz priloženih dijagrama, a naročito sa sl.12, vidimo da je neophodno aproksimirati hidrocilindar prigušivačem velike krutosti. Kriva ugiba verodostojno prati krivu dobijenu merenjem. (Sva vertikalna pomeranja vrha platforme posmatrana su u vremenu kretanja rakete po lansirnoj rampi 0,19 s).

Za usvojeni mehanički model je vršena i analiza uticajnih parametara i to:  $F_p$  – sile potiska raketnog motora,  $m_s$  - mase rakete,  $\alpha$  – ugla nagiba lansirne rampe.

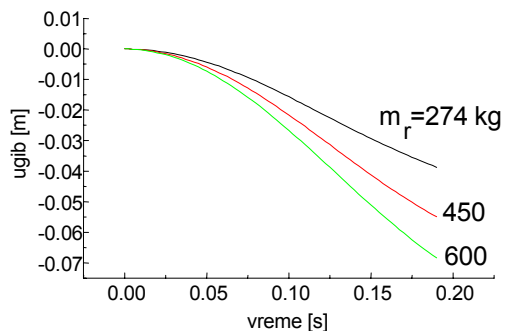
Grafički pregled tih karakterističnih parametara dat je na slikama 13-18:



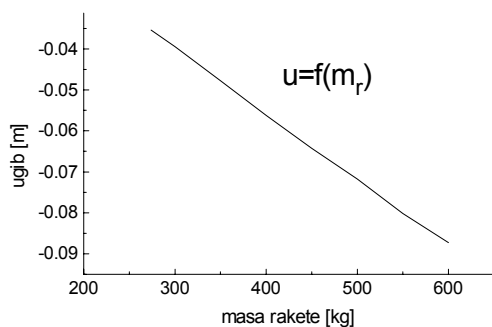
Slika 13.



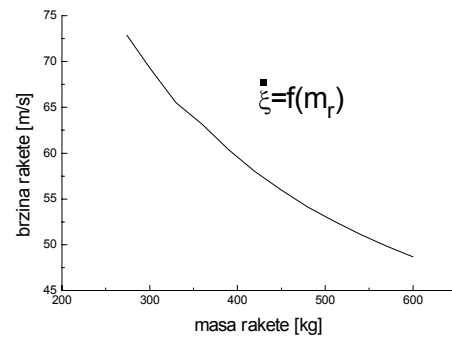
Slika 14.



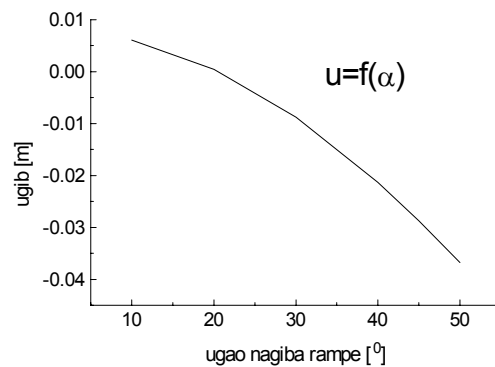
Slika 15.



Slika 16.



Slika 17.



Slika 18.

Na osnovu variranja datih parametara zaključujemo:

- smanjenjem vrednosti koeficijenta viskoznoeg trenja hidrocilindra povećava se ugib vrha lansirne rampe (sl.13.),
- zavisno od željene brzine ugiba vrha lansirne rampe moguće je izabrati vrednost koeficijenta viskoznoeg trenja hidrocilindra (sl.14),
- ugib lansirne rampe opada sa smanjenjem mase rakete skoro linearno (sl.15 i 16),
- brzina rakete na lansirnoj rampi opada s povećanjem njene mase po krivoj drugog reda (sl.17),
- ugib lansirne rampe opada s povećanjem nagibnog ugla lansirne rampe približno po paraboli (sl.18).

### Rezultati merenja i statistička obrada rezultata

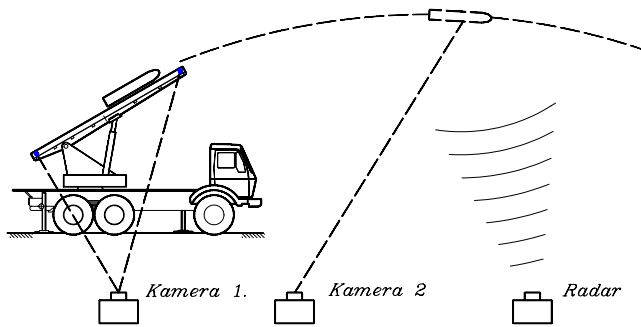
Vršena su merenja na realnom objektu, tj. na samohodnom lanseru pri lansiranju letelica. Posmatrano je pojedinačno i rafalno lansiranje.

Posmatrana je tačka i to, jedanput levo a drugi put desno (sl.2), vrha lansirne rampe i mereno njeno pomeranje u vertikalnoj ravni (ugib vrha). Za slučaj kada je merna tačka bila vrh lansirne rampe, i to desno, merena su tri opaljenja (lansiranja, sl.20). U slučaju posmatranja vrha rampe, i to levo, merena su četiri opaljenja (sl.21). Za lansiranje sve tri rakete odjednom, vršena su dva merenja (sl.22). Tokom navedenih merenja lansirna rampa je pri lansiranju bila u pravcu materijalne ose sistema sa smerom  $x_0$  – ose, tj., ugao otklona bio je  $\psi = 0$  (sl.3).

Za ugao otklona  $\psi = 20^\circ$  vršena su tri merenja (sl.23).

U svim slučajevima ugao nagiba lansirne rampe u vertikalnoj ravni je bio  $\alpha = 45^\circ$ , a posmatrani ugib vrha

rampe je u funkciji vremena kretanja rakete po rampi.



Slika 19. Položaj merne opreme u toku merenja

Pri merenjima, kao što je prikazano na sl.19, korištena je sledeća oprema: 1<sup>o</sup> kamera 1: (stacionarana), kamera tip: *HIKAM* 120mm, brzina snimanja: 500 slika/s, vremenska baza: 100 i 10 Hz; 2<sup>o</sup> kamera 2: ručno praćenje rakete na putanji (iz ruke), kamera tip *PHOTO SONIC*, brzina snimanja: 300 slika/s, vremenska baza: 100 Hz; 3<sup>o</sup> radar za

merenje brzine; 4<sup>o</sup> osmatračka oprema.

Na osnovu ulaznih podataka i dobijenih dijagrama, zaključujemo:

1. posmatrana je tačka na vrhu lansirne rampe s desne strane. Vršena su tri opaljenja (krive 1,2 i 3). Najmanje kvadratno odstupanje od srednje vrednosti ili standardna devijacija iznosi  $\sigma = 2,19$ , što znači da je obuhvaćeno 66% eksperimenta, a za slučaj  $2\sigma = 4,38$  što znači da je obuhvaćeno 95% eksperimenta. Na osnovu toga se dalje analizira kriva  $\bar{u}$  (sl.20),
2. posmatrana je tačka na vrhu lansirne rampe s leve strane. Vršena su četiri opaljenja (krive 1,2,3 i 4). Najmanje kvadratno odstupanje od srednje vrednosti ili standardna devijacija iznosi  $\sigma = 2,03$ , što znači da je obuhvaćeno 66% eksperimenta, a za slučaj  $2\sigma = 4,06$  znači da je obuhvaćeno 95% eksperimenta. Na osnovu toga u daljoj analizi se razmatra kriva  $\bar{u}$  (sl.21),



3. razmatra se tačka na vrhu lansirne rampe. Vršena su dva opaljenja sa sve tri rakete odjednom (rafalna paljba, krive 1 i 2). Najmanje kvadratno odstupanje od srednje vrednosti ili standardna devijacija iznosi  $\sigma = 1,61$ , što znači da je obuhvaćeno 66% eksperimenta, a za slučaj  $2\sigma = 3,22$  znači da je obuhvaćeno 95% eksperimenta. Na osnovu toga se dalje analizira kriva  $\bar{u}$  (sl.22),
4. posmatrana je tačka na vrhu lansirne rampe, pri zakrenutoj lansirnoj rampi od podužne ose u levu stranu za  $20^\circ$ . Vršena su tri opaljenja (krive 1,2 i 3). Najmanje kvadratno odstupanje od srednje vrednosti ili standardna devijacija iznosi  $\sigma = 1,2$ , znači da je obuhvaćeno 66% eksperimenta, a za slučaj  $2\sigma = 2,4$  znači da je obuhvaćeno 95% eksperimenta. Na osnovu toga dalje se analizira kriva  $\bar{u}$  (sl.23.),
5. poređene su sve četiri krive s krivom proračuna. Evidentno je da proračun daje zadovoljavajuće rezultate, te je nepotrebno vršiti skupa opaljenja (radi ispitivanja dinamičkog ponašanja lansera); dovoljno je vršiti numeričko eksperimentisanje na računaru za dalje analize (sl.24),
6. poređene su dve krive dobijene proračunom. Razlika između krivih 1 i 2, tj. veći ugib vrha lansirne rampe i bolje praćenje krivih dobijenih eksperimentom (kriva 2) je

posledica članova  $\theta^2$ ,  $u^2$  i  $\varphi^2$  u četvrtoj diferencijalnoj jednačini koji nisu zanemareni kao u slučaju krive 1 (sl.25).

Krive ugiba vrha rampe  $u = f(t)$  dobijene merenjem na realnom objektu (krive 1,2,3,4 sl.24.) pokazuju povećanje ugiba s vremenom, odnosno s približavanjem rakete vrhu lansirne rampe. Te krive imaju slučajni karakter, a njihova promena može da se okarakteriše kao nepravilna harmonijska promena malih amplituda. Kriva ugiba vrha rampe  $u = f(t)$  dobijena numeričkom interpretacijom usvojenog mehaničko – matematičkog modela (kriva 5) se, po vrednosti ugiba, relativno dobro slaže s krivim dobijenim merenjima (krive 1,2,3,4). Jasno izražen oscilatorni karakter krive 5, relativno većim amplitudama oscilovanja, je posledica elastičnosti rampe i elastičnosti oslonca u hidrocilindru koji se uzimaju u razmatranom modelu. Razlika u obliku krivih 1,2,3,4, s jedne strane, i krive 5, s druge strane, može da posluži i za korekciju ulaznih numeričkih podataka, npr. da se uzme veća krutost oslonca, veća krutost same lansirne rampe i sl.

### Zaključak

Matematičkim modeliranjem i simulacijom na računaru može da se utvrdi uticaj svakog konstrukcionog i eksploatacionog parametra na ponašanje raketnog sistema u fazi projektovanja ili modifikacije. Ovo je od velikog značaja, jer se time celi projekat racionalizuje.

Kako se rešenje matematičkog modela može upotrebiti u analizi uticaja konkretnih konstrukcionih parametara na određene osobine raketnog sistema, iz tog dela istraživanja mogu se izvesti sledeći zaključci:

- Poznato je da bitan uticaj na položaj slike pogodaka imaju isključivo ugaone brzine oko karakterističnih osa (poprečna i uzdužna osa). Postavljanjem lansirne rampe i letelice (rakete) u položaj koji izaziva najmanje vrednosti navedenih ugaonih brzina, dobija se najmanje rasturanje na odredištu. Simulacijom se mogu pronaći parametri najpovoljnijeg položaja sistema, s obzirom na tačnost i preciznost;
- Ugao nagiba lansirne rampe ima značajan uticaj na tok procesa oscilovanja raketnog sistema. On utiče na ugib, ali manje nego krutost oslonca.

Na osnovu analize rezultata simulacije ponašanja raznih varijanti modela, u konkretnom slučaju može se doći do optimalne varijante za pojedine faze istraživanja. Pri simulaciji je neophodno koristiti prostorne modele s nelinearnim karakteristikama određenih komponenti. Samo se na taj način može doći do kvalifikovanih zahteva proizvođačima komponenata, koje bi se ugrađivale u razvijani raketni sistem.

Daljim usavršavanjem primene ove metode u projektovanju ostvariće se uslovi za postupak optimizacije svakog od odabranih parametara, odnosno dobijanje optimalnih kombinacija svih relevantnih parametara.

- Rad daje sveobuhvatan pristup problemu oscilovanja raketnog sistema;
- Osnovna postavka dinamičkog modela je da posle izletanja rakete s lansirne rampe, raketni sistem vrši prigušeno oscilovanje. Poremećaji pri startu rakete predstavljaju početne uslove oscilovanja. Matematičko-mehanički model oscilovanja mehaničkog sistema predstavlja sistem krutih tela koncentrisanih masa i deformabilnih elemenata s elastičnim i prigušenim vezama. Oscilovanje raketnog sistema u procesu

lansiranja je definisano s pet generalisanih koordinata:

- Primenom Lagranžovih jednačina druge vrste, prikazani sistem od pet nelinearnih nehomogenih diferencijalnih jednačina s promenljivim koeficijentima napisan je u matricnom obliku.
- Verifikacija teoretskih rezultata izvršena je na brojnim primerima.
- Razrađen je i specijalni slučaj opšteg mehaničko-matematičkog modela i izvršeno je poređenje.

Zahtevi koji se postavljaju za raketni sistem po pitanju težine i dometa, zahtevaju savršenije metode proračuna cele konstrukcije, a naročito preciznije određivanje dinamičkih opterećenja.

U ovom radu, za sistem koji je izložen veoma složenim uticajima, postavlja se metod proračuna dinamičkih opterećenja. Metod omogućava određivanje dinamičkih opterećenja mehaničkih stopa (oslonaca) uzimajući u obzir elastičnost same podloge. Moguće je određivanje dinamičkih opterećenja lansirne rampe, zavisno od parametara oslonca i krutosti podloge. Metod takođe može da kvantitativno i kvalitativno ispita stabilnost raketnog sistema.

U radu se određuju dinamička opterećenja oslonaca, koja omogućuju da se postavi uslov stabilnosti raketnog sistema.

Rezultat numeričkog primera je pokazao da se uticaj elastičnosti podloge ne sme da zanemari. Uticaj se ogleda u promeni opterećenja mehaničkih stopa, a naročito u promeni rasporeda njihovih opterećenja.

Smanjenje dinamičkih opterećenja i povećanje stabilnosti čitave konstrukcije ostvaruje se korekcijom rasporeda masa, rasporedom mehaničkih stopa, izborom oblika i površine stopa.

### Literatura

- [1] SVETLICKIJ, V.A. *Dinamika starta letatel'nyh apparatov*. Moskva Nauka. Glavna redakcija fiziko-matematičeskoj literatury, 1986.
- [2] ŠELMIĆ, R.R. *Prilog istraživanju dinamičkih opterećenja noseće konstrukcije auto-dizalice sa specijalnom (ojačanom) šasijom, hidropogonom i teleskopskom strelom*, doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1979.
- [3] ŠELMIĆ, R.R. Opterećenja teleskopske strele auto-dizalice pri izvlačenju teleskopa. *Mašinstvo*, 1982, vol.31, no.5, p.727-731.
- [4] ŠELMIĆ, R. *Nekotorye voprosy dinamičeskoj ustojčivosti teleskopičeskoj strely avtokrana*. Konferenz über Fördertechnik, Zbornik radova, Miškole, 1987, p.743-750.
- [5] ŠELMIĆ, R.R., ĐURKOVIĆ, P.V. *Dinamička analiza lansirnog sistema, Istraživanje i razvoj mašinskih elemenata i sistema IRMES 2000*, Naučno-stručni skup, Kotor, 14. i 15. septembar 2000.
- [6] ŠELMIĆ, R.R., ĐURKOVIĆ, P.V. Analiza dinamičkih parametara lansirne rampe pri lansiranju letelice. *Naučnotehnički pregled*, 2000, vol.1, no.3, p.40-44.
- [7] ĐURKOVIĆ, P.V. *Doprinos iznalaženju optimalnih parametara lansiranja letelice*. doktorska disertacija. VA VJ, Beograd 2001.
- [8] BABAKOV, I.M. *Teorija kolebanju*. Nauka, Moskva 1965.
- [9] RAŠKOVIĆ, D. *Teorija oscilacija*. Naučna knjiga, Beograd, 1957.
- [10] PETKOVSKA, M., ČALASAN L. *MATLAB i dodatni moduli. Control system toolbox i simulink. Verzija 4.2 za Windows*. Mikro knjiga, Beograd, 1996.
- [11] LEBEDEV, A.A., ČERNOBROVKIN L.S. *Dinamika poleta bespilotnyh letatelnyh apparatov*. Mašinstroenie, Moskva, 1973.
- [12] DESKOVSKI, S. *Vodenje i upravljanje. Glava 2, Koordinatni sistemi, vektori i matrice*. Centar vojnotehničkih škola KoV JNA, Katedra raketne tehnike, Zagreb 1986.
- [13] MOMIRSKI, M. *Mehanika upravljivih objekata*. predavanja, Fakultet tehničkih nauka, Institut za mehanizaciju, posle diplomске studije, Novi Sad, 1985.

Rad primljen: 22.01.2002.god.

