UDK: 514.163(047)=861
COSATI: 12-01

O operatorima paralelnog pomeranja u euklidskom i neeuklidskim prostorima

Dr Zoran Drašković, dipl.meh.[1)]

Istaknuta je neophodnost (konačnog) paralelnog pomeranja u operacijama sa vektorskim (tenzorskim) poljima vezanim za različite tačke prostora. Dat je pregled nekih poznatih (u euklidskom prostoru) i nekih manje poznatih rezultata (u rimanskim prostorima) vezanih za operatore paralelnog pomeranja koji se eksplicitno pojavljuju u koordinatnom obliku tih polja.

Ključne reči: **Paralelno pomeranje, euklidski prostor, rimanski prostori, "euklidski šifteri", "rimanski šifteri".**

Uvod

I u najopštijim fizikalnim rasuđivanjima se, u suštini, bavimo utvrđivanjem raznih *podudaranja* (formalno izraženih jednakostima ili jednačinama) između izvesnih objekata u nekom prostoru, a to je povezano sa njihovim *upoređivanjem*. Međutim, budući da se uvek upoređuju samo one veličine koje se odnose na *istu tačku* prostora, dok pojedini objekti mogu biti vezani za *različite* tačke prostora (pa i trenutke vremena, ako se govori o četvorodimenzionalnom prostoru), sledi da se upoređivanje konačno udaljenih objekata (tj. objekata uočenih u konačno udaljenim tačkama prostora) može ostvariti tek posle njihovog *prenošenja* (*pomeranja*, *dovođenja*) u istu tačku prostora.

S druge strane, budući da se zakoni ma kakve fizikalne teorije predstavljaju matematičkim jednačinama i da one zapravo uspostavljaju veze između matematičkih objekata kojima se modeliraju odnosni fizikalni objekti, a znajući da je osnovni kriterijum prirodnosti nekog fizikalnog zakona njegova *invarijantnost* (*kovarijantnost*) u odnosu na promenu koordinatnog sistema — jasno je da će ti matematički objekti u najopštijem slučaju biti *tenzorska polja** i da će se pomenuto prenošenje fizikalnih objekata u istu tačku prostora u suštini odnositi na takvo prenošenje odgovarajućih tenzorskih polja. Pri tom ćemo se ovde zadržati samo na vektorskim poljima (tj. tenzorskim poljima prvog reda).

Kad je u pitanju naš opažajni prostor (za koji znamo da je euklidski!), pa dakle i klasične fizikalne teorije, to neizbežno "dovođenje u istu tačku prostora" vrši se uobičajenim *paralelnim pomeranjem* posmatrane veličine (ovde vektora) iz jedne u neku drugu tačku tog prostora. Međutim, prave poteškoće nastupaju kada se mora izvršiti prenošenje nekog vektora u neeuklidskim prostorima (koji se, po pravilu, susreću u neklasičnim teorijama), o čemu svedoče i reči Golaba (Golab): *"The fact that two quantities ... of the same species, but attached at two different points in space, cannot be compared causes serious difficulties in tensor analysis ..."* ([1], str. 157). Stoga je uputno da prvo razmotrimo paralelni prenos vektora u euklidskom prostoru, a zatim da, u posebnom odeljku, bude reči o generalizaciji tog prenosa na neeuklidske prostore (preciznije, na tzv. rimanske (Riemann) prostore).

Operatori paralelnog pomeranja u euklidskom prostoru

U (trodimenzionalnom) euklidskom prostoru uvek se može uvesti Dekartov (Descartes) sistem pravouglih koordinata** z^i. Uočimo u tački $P_o(z^i_o)$ tog prostora neki vektor s koordinatama $V^i(P_o)$, a u tački $P(z^i_P)$ neki drugi vektor s koordinatama $V^i(P)$, ali takav da je***:

$$V^i(P_o) = \delta^i_j \; V^j(P) \;\; , \text{tj.} \;\; V^i(P) = \delta^i_j \; V^j(P_o) \tag{1}$$

gde su δ^i_j koordinate Kronekerovog (Kronecker) δ-simbola. Uobičajeno je da se takva dva vektora u euklidskom prostoru smatraju *istim* vektorom. Kaže se da je vektor $V^i(P)$ u tački P dobijen *konačnim paralelnim pomeranjem* (*"šiftovanjem"*) vektora $V^i(P_o)$ iz tačke P_o u tačku P (v. npr. [2], str. 806 ili [3], str. 95).

Da bismo izrazu (1) dali invarijantan oblik, uvešćemo proizvoljni sistem krivolinijskih koordinata x^a jednačinama:

$$x^a = x^a(z^i) \tag{2}$$

pa na osnovu zakona transformacije kontravarijantnih koordinata vektora:

$$V^i = \frac{\partial z^i}{\partial x^a} v^a \tag{3}$$

gde su v^a kontravarijantne koordinate uočenog vektora u sistemu x^a. Iz (1) sledi:

**Mali latinski indeksi ($a,b,\ldots,i,j,\ldots$) će uzimati vrednosti iz skupa $\{1,2,3\}$.

***Koristi se Ajnštajnova (Einstein) konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima.

$$\left.\begin{aligned} v^a(P_o)\left.\frac{\partial z^i}{\partial x^a}\right|_{P_o} &= \delta^i_j v^b(P)\left.\frac{\partial z^j}{\partial x^b}\right|_P \\ v^a(P)\left.\frac{\partial z^i}{\partial x^a}\right|_P &= \delta^i_j v^b(P_o)\left.\frac{\partial z^j}{\partial x^b}\right|_{P_o} \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

što može da bude prepisano u obliku

$$\left.\begin{aligned} v^a(P_o) &= g^a_{.b}(P_o,P)\, v^b(P) \\ v^a(P) &= g^{.a}_b(P_o,P)\, v^b(P_o) \end{aligned}\right\} \tag{5}$$

gde je*

$$\left.\begin{aligned} g^a_{.b}(P_o,P) &\equiv \delta^i_j \left.\frac{\partial x^a}{\partial z^i}\right|_{P_o} \left.\frac{\partial z^j}{\partial x^b}\right|_P \\ g^{.a}_b(P_o,P) &\equiv \delta^i_j \left.\frac{\partial z^j}{\partial x^b}\right|_{P_o} \left.\frac{\partial x^a}{\partial z^i}\right|_P \end{aligned}\right\} \tag{6}$$

Lako se može pokazati da važe sledeće relacije

$$g^a_{.c}\, g^{.c}_b = \delta^a_b \ , \ g^c_{.b}\, g^{.a}_c = \delta^a_b \tag{7}$$

tj. da su sistemi veličina (6) međusobno inverzni. Iz (5) se vidi da ti sistemi veličina određuju kontravarijantne (a slično bi bilo i za kovarijantne) koordinate vektora pri njegovom paralelnom pomeranju iz tačke P u tačku P_o, odnosno iz tačke P_o u tačku P euklidskog prostora. Stoga se sistemi veličina (6) u stranoj literaturi najčešće nazivaju *"Euclidean shifters"* ([2], str. 806) ili samo *"shifters"* ([4], str. 313 ili [5], str. 57), ali i *"finite shifters"* ([6], str. 84)**, čime se ističe da se prenošenje vektora vrši na *konačnom* rastojanju. U našoj literaturi iz mehanike neprekidnih sredina uobičajen je naziv *operatori pomeranja* ([7], str.15) ili *operatori paralelnog pomeranja* ([8], str. 19). Međutim, u radovima iz analitičke mehanike, tenzorske analize i diferencijalne geometrije koristi se naziv *"bipunctual basic tensor"* ([9]) ili *"fundamental bipoint tensor"* ([10]), čime se pre svega podvlači da veličine (6) pripadaju kategoriji tzv. *dvostrukih tenzorskih polja*, tj. polja definisanih u dvema različitim tačkama prostora (v. npr. [2], str.805).

Iz izraza (6), budući da se u njima javljaju samo veličine određene u tačkama P_o i P, neposredno se zaključuje ono što je dobro poznato — paralelno pomeranje vektora (i uopšte tenzora) iz jedne tačke euklidskog prostora u drugu tačku na konačnom rastojanju ne zavisi od puta, tj. od krive u prostoru duž koje se vrši to pomeranje iz prve u drugu tačku. Za takav prostor se kaže da poseduje *apsolutni paralelizam* (v. npr. [11], str.152) ili *teleparalelizam* (v. npr. [3], str.127).

Pre nego što bude navedeno određivanje eksplicitnih izraza za koordinate operatora paralelnog pomeranja u nekim najčešće korišćenim sistemima krivolinijskih koordinata, zadržimo se još na iznalaženju diferencijalnog, odnosno infinitezimalnog oblika onih uslova koje moraju zadovoljavati koordinate nekog vektora ako se on paralelno pomera u euklidskom prostoru. U tom cilju uočimo, u sistemu Dekartovih koordinata z^i, neku krivu $z^i = z^i(s)$ (s je dužina luka same te krive) i pretpostavimo da je u tačkama krive zadato vektorsko polje sa koordinatama $V^i = V^i(z^j(s))$. Uslov da se radi o polju paralelnih vektora duž uočene krive glasi:

$$\frac{dV^i}{ds} = 0 \quad \text{ili} \quad dV^i = 0 \tag{8}$$

tj. koordinate V^i moraju biti konstantne duž te krive. Da bi se pronašao oblik tih uslova u odnosu na neki proizvoljni sistem koordinata x^a uveden relacijama (2), treba izraze (8) napisati u razvijenom obliku i iskoristiti zakon transformacije (3) kontravarijantnih koordinata vektora, tako da se za uslove paralelnog pomeranja u proizvoljnim krivolinijskim koordinatama x^a vektora v^a duž uočene krive dobija (v. npr. [11], str. 139-140):

$$\frac{Dv^a}{Ds} = \frac{dv^a}{ds} + \Gamma^a_{bc}\, v^b \frac{dx^c}{ds} = 0 \tag{9}$$

ili (zbog $Ds = ds$)

$$Dv^a = dv^a + \Gamma^a_{bc}\, v^b dx^c = 0 \tag{10}$$

tj. da *apsolutni izvod* ili *apsolutni diferencijal* vektora v^a mora biti jednak nuli, odnosno da je promena vektora v^a, pri pomeranju u pravcu dx^a duž krive, jednaka nuli u svakoj tački krive. Veličine Γ^a_{bc} u izrazima (9 i 10) su Kristofelovi (Christoffel) simboli druge vrste u sistemu krivolinijskih koordinata x^a i određuju se na uobičajeni način preko osnovnog (metričkog) tenzora g_{ab} u tim koordinatama (v. npr. [11], str. 99):

$$\Gamma^a_{bc} = \tfrac{1}{2} g^{ad}\left(\frac{\partial g_{cd}}{\partial x^b} + \frac{\partial g_{db}}{\partial x^c} - \frac{\partial g_{bc}}{\partial x^d}\right) \tag{11}$$

a same kovarijantne koordinate g_{ab} i kontravarijantne koordinate g^{ab} osnovnog tenzora u sistemu x^a dobijaju se na poznat način (uz korišćenje relacija (2) ili njima inverznih):

$$\left.\begin{aligned} g_{ab} &= \delta_{ij}\frac{\partial z^i}{\partial x^a}\frac{\partial z^j}{\partial x^b} \\ g^{ab} &= \delta^{ij}\frac{\partial x^a}{\partial z^i}\frac{\partial x^b}{\partial z^j} \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Prirodno je zapitati se da li se iz diferencijalnih uslova (9), odnosno (10) mogu dobiti uslovi (5) koje moraju zadovoljavati koordinate vektora u krivolinijskim koordinatama x^a pri paralelnom pomeranju na konačnom rastojanju? U tom cilju istaknimo da je V. Vujičić, u radovima [9,12], *postulirao* (u neeuklidskim prostorima) apsolutni integral tenzora kao integralnu operaciju *" ... by which it is possible to obtain the initial tensor from its absolute differential"* ([9], str. 375), a u [13] je pokazano da se ta operacija, kad se radi o apsolutnom integralu apsolutnog diferencijala neke dovoljno glatke vektorske funkcije v^a od tačke P_o do tačke P na nekoj krivoj u euklidskom prostoru svodi na:

$$\left(\overset{\nabla}{\int_{P_oP}} Dv^a \equiv\right)\int_{P_oP} g^{.a}_b(M,P)\, Dv^b(M) = v^a(P) - v^b(P_o)\, g^{.a}_b(P_o,P) \tag{13}$$

tj. na integraciju u skladu sa Eriksenovim (Ericksen) konceptom integraljenja vektorskih i tenzorskih polja u krivolinijskim koordinatama (v. str. 808 u [2]), gde je M "tekuća" tačka integracije. Ako se sad pretpostavi da je polje v^a zapravo polje paralelnih vektora duž uočene krive,

*Prvi indeks u $g^a_{.b}(P_o,P)$, bilo da je gornji ili donji, odnosi se na tačku određenu prvim argumentom, dok se drugi indeks odnosi na tačku određenu drugim argumentom.

**U teoriji ljusaka se za operatore paralelnog pomeranja upotrebljava i naziv *"tenzory perenosa"* (v. str. 24 u [22]) ili samo *"shifters"* (v. (7.38) u [23]).

tj. da je zadovoljen uslov (10), onda iz (13) neposredno sledi relacija $(5)_2$. Ovakav način rasuđivanja pokušaćemo da iskoristimo i u neeuklidskim prostorima (u sledećem odeljku), ali će prvo, kao što je i nagovešteno, biti (u sledeća dva pododeljka) izvedeni izrazi za koordinate operatora paralelnog pomeranja u dva najčešće korišćena sistema krivolinijskih koordinata u euklidskom prostoru — u cilindarskom polarnom sistemu i u sfernom polarnom sistemu.

Operatori paralelnog pomeranja u cilindarskim polarnim koordinatama

Ako se iskoriste poznate veze između Dekartovih koordinata z^i i cilindarskih polarnih koordinata $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv z$:

$$\left.\begin{aligned} z^1 &= r\cos\varphi \\ z^2 &= r\sin\varphi \\ z^3 &= z \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(z^1\right)^2+\left(z^2\right)^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= z^2/z^1 \\ z &= z^3 \end{aligned}\right\} \tag{14}$$

slede relacije

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial z^1}{\partial r}=\cos\varphi\ , & \dfrac{\partial z^1}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\ , & \dfrac{\partial z^1}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial z^2}{\partial r}=\sin\varphi\ , & \dfrac{\partial z^2}{\partial\varphi}=\ \mathrm{r}\cos\varphi\ , & \dfrac{\partial z^2}{\partial z}=0 \\ \dfrac{\partial z^3}{\partial r}=0\ , & \dfrac{\partial z^3}{\partial\varphi}=\ 0\ , & \dfrac{\partial z^3}{\partial z}=1 \end{array}\right\} \tag{15}$$

i njima inverzne

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial r}{\partial z^1}=\ \cos\varphi\ , & \dfrac{\partial r}{\partial z^2}=\ \sin\varphi\ , & \dfrac{\partial r}{\partial z^3}=0 \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^1}=-\dfrac{\sin\varphi}{r}\ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^2}=\ \dfrac{\cos\varphi}{r}\ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^3}=0 \\ \dfrac{\partial z}{\partial z^1}=\ 0\ , & \dfrac{\partial z}{\partial z^2}=\ 0\ , & \dfrac{\partial z}{\partial z^3}=1 \end{array}\right\} \tag{16}$$

tako da se, prema (6), za koordinate operatora paralelnog pomeranja $\left\{g_b^a(P_o,P)\right\}$ između tačaka P_o i P u cilindarskim polarnim koordinatama dobija:

$$\left\{\begin{array}{ccc} \cos(\varphi_P-\varphi_o) & r_o\sin(\varphi_P-\varphi_o) & 0 \\ -1/r_P\sin(\varphi_P-\varphi_o) & r_o/r_P\cos(\varphi_P-\varphi_o) & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{array}\right\} \tag{17}$$

Operatori paralelnog pomeranja u sfernim polarnim koordinatama

Slično kao i u prethodnom primeru, s obzirom na to da su poznate veze između Dekartovih koordinata z^i i sfernih polarnih koordinata $x^1 \equiv r$, $x^2 \equiv \varphi$, $x^3 \equiv \vartheta$:

$$\left.\begin{aligned} z^1 &= r\cos\varphi\cos\vartheta \\ z^2 &= r\sin\varphi\cos\vartheta \\ z^3 &= r\sin\vartheta \end{aligned}\right\} \quad \left.\begin{aligned} r &= \sqrt{\left(z^1\right)^2+\left(z^2\right)^2+\left(z^3\right)^2} \\ \operatorname{tg}\varphi &= z^2/z^1 \\ \operatorname{tg}\vartheta &= z^3\Big/\sqrt{\left(z^1\right)^2+\left(z^2\right)^2} \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

pa samim tim i relacije

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial z^1}{\partial r}=\cos\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial z^1}{\partial\varphi}=-r\sin\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial z^1}{\partial\vartheta}=-r\cos\varphi\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial z^2}{\partial r}=\sin\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial z^2}{\partial\varphi}=\ r\cos\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial z^2}{\partial\vartheta}=-r\sin\varphi\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial z^3}{\partial r}=\sin\vartheta\ , & \dfrac{\partial z^3}{\partial\varphi}=\ 0\ , & \dfrac{\partial z^3}{\partial\vartheta}=\ r\cos\vartheta \end{array}\right\} \tag{19}$$

i njima inverzne

$$\left.\begin{array}{lll} \dfrac{\partial r}{\partial z^1}=\ \cos\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial r}{\partial z^2}=\ \sin\varphi\cos\vartheta\ , & \dfrac{\partial r}{\partial z^3}=\sin\vartheta \\ \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^1}=-\dfrac{\sin\varphi}{r\cos\vartheta}\ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^2}=\ \dfrac{\cos\varphi}{r\cos\vartheta}\ , & \dfrac{\partial\varphi}{\partial z^3}=0 \\ \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z^1}=-\dfrac{\cos\varphi\sin\vartheta}{r}\ , & \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z^2}=-\dfrac{\sin\varphi\sin\vartheta}{r}\ , & \dfrac{\partial\vartheta}{\partial z^3}=\dfrac{\cos\vartheta}{r} \end{array}\right\} \tag{20}$$

Iako se, prema (6), za koordinate operatora paralelnog pomeranja $\left\{g_b^a(P_o,P)\right\}$ između tačaka P_o i P u sfernim polarnim koordinatama dobija (v. npr. str. 401 u [14]):

Napomena 1. U radu [14] može se videti čitava kolekcija izraza za operatore paralelnog pomeranja dobijenih i u drugim krivolinijskim koordinatama (elipsoidalnim, bipolarnim, ...). Sve veća glomaznost tih izraza u slučaju ređe korišćenih krivolinijskih sistema (kada su složenije i relacije kojima se uvode odnosne krivolinijske koordinate) upućuje na korisnost eventualne upotrebe nekog od programa za simboličko diferenciranje.

$$\left\{\begin{array}{lll} \begin{array}{l}\cos\vartheta_P\cos\vartheta_o\cos(\varphi_P-\varphi_o)+ \\ +\sin\vartheta_P\sin\vartheta_o\end{array} & -r_o\cos\vartheta_P\cos\vartheta_o\sin(\varphi_P-\varphi_o) & \begin{array}{l}-r_o\cos\vartheta_P\sin\vartheta_o\cos(\varphi_P-\varphi_o)+ \\ +r_o\sin\vartheta_P\cos\vartheta_o\end{array} \\ -\dfrac{\cos\vartheta_o}{r_P\cos\vartheta_P}\sin(\varphi_P-\varphi_o) & \dfrac{r_o\cos\vartheta_o}{r_P\cos\vartheta_P}\cos(\varphi_P-\varphi_o) & \dfrac{r_o\sin\vartheta_o}{r_P\cos\vartheta_P}\sin(\varphi_P-\varphi_o) \\ \begin{array}{l}-\dfrac{1}{r_P}\sin\vartheta_P\cos\vartheta_o\cos(\varphi_P-\varphi_o)+ \\ +\dfrac{1}{r_P}\cos\vartheta_P\sin\vartheta_o\end{array} & -\dfrac{r_o}{r_P}\sin\vartheta_P\cos\vartheta_o\sin(\varphi_P-\varphi_o) & \begin{array}{l}\dfrac{r_o}{r_P}\sin\vartheta_P\sin\vartheta_o\cos(\varphi_P-\varphi_o)+ \\ +\dfrac{r_o}{r_P}\cos\vartheta_P\cos\vartheta_o\end{array} \end{array}\right\} \tag{21}$$

Operatori paralelnog pomeranja u neeuklidskim prostorima

U neeuklidskim prostorima se kao uslov paralelnog pomeranja vektora v^α duž neke krive $u^\alpha=u^\alpha(s)$ u tom prostoru, u analogiji sa (9 i 10), *po definiciji* uzima (v. npr. [11], str. 142 ili [3], str. 118 i 123):

$$\frac{Dv^\alpha}{Ds}=\frac{dv^\alpha}{ds}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,v^\beta\,\frac{du^\gamma}{ds}=0 \tag{22}$$

odnosno

$$Dv^\alpha=dv^\alpha+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}\,v^\beta\,du^\gamma=0 \tag{23}$$

pri čemu su $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ tzv. koeficijenti koneksije u prostorima afine koneksije. Međutim, ovde će biti reči samo o rimanskim prostorima, odnosno (budući da se zadržavamo na dvodimenzionalnom* takvom prostoru) o površima, pa će u^α biti krivolinijske koordinate na posmatranoj površi (tzv. Gausovi (Gauss) parametri), a $\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}$ su Kristofelovi simboli druge vrste određeni za tu površ u sistemu u^α po obrascima analognim obrascima (11) (v. npr. str. 142 u [11]):

$$\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}=\tfrac{1}{2}a^{\alpha\delta}\left(\frac{\partial a_{\gamma\delta}}{\partial u^\beta}+\frac{\partial a_{\delta\beta}}{\partial u^\gamma}-\frac{\partial a_{\beta\gamma}}{\partial u^\delta}\right) \tag{24}$$

ali u odnosu na metrički tenzor $a_{\alpha\beta}$ te površi koji se, ako je površ u obvojnom trodimenzionalnom euklidskom prostoru određena jednačinama $z^i=z^i(u^\alpha)$, izračunava po obrascu:

$$a_{\alpha\beta}=\delta_{ij}\frac{\partial z^i}{\partial u^\alpha}\frac{\partial z^j}{\partial u^\beta} \tag{25}$$

dok je odnosni kontravarijantni metrički tenzor površi definisan jednačinama:

$$a^{\alpha\beta}a_{\beta\gamma}=\delta^\alpha_\gamma \tag{26}$$

Više je nego očigledno da se na prethodni način uvedena definicija paralelnog pomeranja vektora duž krive po površi (tj. u rimanskom prostoru) svodi, u slučaju krive u ravni, na uobičajeni paralelizam u euklidskom prostoru.

Međutim, da bi se odgovorilo na pitanje o geometrijskom smislu takvog uopštenja u odnosu na uobičajeno paralelno pomeranje**, treba prvo primetiti da se kao vektor u uočenoj tački neke površi *po definiciji* smatra onaj vektor koji je čitav u tangentnoj ravni te površi u toj tački (v. [11], str. 144). Prema tome, paralelnim pomeranjem u površi taj vektor ne bi smeo da "napušta" površ, tj. u svakoj tački u koju je prenet morao bi da leži u tangentnoj ravni površi u toj tački. Primetimo još da u (23) figurišu *infinitezimalne* promene vektora dv^α pri *infinitezimalnom (elementarnom)* pomeranju du^α. Sada se može reći da uslovi (23) u stvari predstavljaju analitički izraz definicije paralelnog pomeranja u površi predložene od strane Levi-Čivite (Levi-Civita), a koja bi se mogla ovako iskazati (v. [11], str. 151): infinitezimalno paralelno pomeranje vektora po površi sastoji se u tome da se prvo izvrši uobičajeno paralelno pomeranje tog vektora u beskonačno blisku tačku površi, a zatim da se tako preneti vektor projektovanjem "spusti" u tangentnu ravan u novoj tački. Razume se, vektor bi se ovako mogao pomerati u sledeću beskonačno blisku tačku uočene krive na površi itd., pa bi se tim *integralnim* postupkom izvršilo paralelno prenošenje vektora po površi na konačnom rastojanju. U analitičkom smislu, tom postupku odgovara integraljenje uslova (23), tj. rešavanje sistema diferencijalnih jednačina:

$$\frac{dv^\alpha}{ds}+\Gamma^\alpha_{\beta\gamma}v^\beta\frac{du^\gamma}{ds}=0 \tag{27}$$

radi određivanja koordinata koje neki vektor v^α zadat u tački P_o ima posle paralelnog pomeranja u konačno udaljenu tačku P duž neke krive $u^\alpha=u^\alpha(s)$ na posmatranoj površi. Odmah treba napomenuti da se pri takvom pomeranju vektora iz tačke P_o u neku tačku P, na uočenoj površi, dobijaju po pravilu različiti vektori, ako su u pitanju različite krive duž kojih se vrši prenos, tj. da konačno paralelno pomeranje vektora po površi u opštem slučaju *zavisi od puta.* To će najbolje ilustrovati sledeći primer.

Paralelno pomeranje duž uporednika na sfernoj površi

Sistem diferencijalnih jednačina (27) za određivanje koordinata paralelno pomerenog vektora duž neke krive na sfernoj površi, ako su u pitanju geografske koordinate $u^1\equiv\varphi$, $u^2\equiv\vartheta$ (pa su od nule različite samo sledeće koordinate Kristofelovih simbola druge vrste: $\Gamma^1_{12}=\Gamma^1_{21}=-\operatorname{tg}\vartheta$, $\Gamma^2_{11}=\sin\vartheta\,\cos\vartheta$), svodi se na:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv^1}{ds}-\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{d\vartheta}{ds}v^1-\operatorname{tg}\vartheta\,\frac{d\varphi}{ds}v^2&=0\\ \frac{dv^2}{ds}+\sin\vartheta\,\cos\vartheta\,\frac{d\varphi}{ds}v^1&=0\end{aligned}\right\} \tag{28}$$

Međutim, u slučaju paralelnog pomeranja duž paralele φ na sfernoj površi (poluprečnika a) biće $u^1\equiv\varphi=s/a\cos\vartheta_o$, $u^2\equiv\vartheta=\vartheta_o=const.$, pa se prethodni sistem (posle prelaska na promenljivu φ) svodi na:

$$\left.\begin{aligned}\frac{dv^1}{d\varphi}&=v^2\operatorname{tg}\vartheta_o\\ \frac{dv^2}{d\varphi}&=-v^1\sin\vartheta_o\,\cos\vartheta_o\end{aligned}\right\} \tag{29}$$

Karakteristična jednačina tog sistema diferencijalnih jednačina glasi:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & \operatorname{tg}\vartheta_o\\ -\sin\vartheta_o\cos\vartheta_o & -\lambda\end{vmatrix}=0 \tag{30}$$

pa je $\lambda=\pm\sin\vartheta_o\,i$, tako da se opšte rešenje može napisati u obliku:

$$\left.\begin{aligned}v^1&=C_1\operatorname{tg}\vartheta_o\cos(\varphi\sin\vartheta_o)+C_2\operatorname{tg}\vartheta_o\sin(\varphi\sin\vartheta_o)\\ v^2&=-C_1\sin\vartheta_o\sin(\varphi\sin\vartheta_o)+C_2\sin\vartheta_o\cos(\varphi\sin\vartheta_o)\end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Konstante C_1 i C_2 potražićemo iz uslova da je $v^1=v^1_o$ i $v^2=v^2_o$ za $\varphi=\varphi_o$. Dobija se da je***

$$\left.\begin{aligned}v^1&=v^1_o\cos\left[(\varphi-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right]+v^2_o\frac{\sin\left[(\varphi-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right]}{\cos\vartheta_o}\\ v^2&=-v^1_o\cos\vartheta_o\sin\left[(\varphi-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right]+v^2_o\cos\left[(\varphi-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right]\end{aligned}\right\} \tag{32}$$

*Stoga će mali grčki indeksi uzimati vrednosti iz skupa {1,2}.

**Koje se, kao što je poznato, odlikuje činjenicom da nema promene pravca tog vektora duž posmatrane krive.

***Up. npr. sa izrazima na str. 208 u [24]; v. i str. 185 u [1].

Sada kad su dobijeni ti eksplicitni izrazi za kovarijantne koordinate vektora paralelno pomeranog po sfernoj površi iz tačke P_o u tačku P, a po luku uporednika koji ih spaja, lako je i grafički predstaviti sâm proces paralelnog prenošenja nekog vektora duž takve krive na sfernoj površi. Naime, na uobičajeni način se mogu odrediti i Dekartove koordinate tog vektora u tačkama P_o i P:

$$\left.\begin{aligned} V^i(P_o) &= \left.\frac{\partial z^i}{\partial \varphi}\right|_{P_o} v^{\varphi}(P_o) + \left.\frac{\partial z^i}{\partial \vartheta}\right|_{P_o} v^{\vartheta}(P_o) \\ V^i(P) &= \left.\frac{\partial z^i}{\partial \varphi}\right|_{P} v^{\varphi}(P) + \left.\frac{\partial z^i}{\partial \vartheta}\right|_{P} v^{\vartheta}(P) \end{aligned}\right\} \tag{33}$$

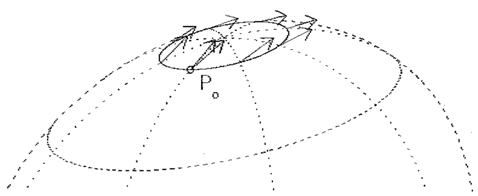
(pri čemu je $v^1 \equiv v^{\varphi}$, $v^2 \equiv v^{\vartheta}$ i $V^1 \equiv V^x \equiv V^{z^1}$, $V^2 \equiv V^y \equiv V^{z^2}$, $V^3 \equiv V^z \equiv V^{z^3}$), a potom se lako može sprovesti postupak vizuelizacije vektora pre i posle paralelnog pomeranja. Neka je npr. u pitanju vektorsko polje čije su koordinate:

$$\left.\begin{aligned} v^1 &= v^1_o = 0 \\ v^2 &= v^2_o = const. \neq 0 \end{aligned}\right\} \tag{34}$$

i neka se ono iz tačke P_o prenosi u tačku $P \equiv P_o$ duž paralele koja ih spaja i koja je, očigledno, zatvorena kriva ($\varphi_P = \varphi_o + 2\pi$!). Tada se (32) svodi na:

$$\left.\begin{aligned} v^1_P &= v^2_o \frac{\sin\left[2\pi \ \sin\vartheta_o\right]}{\cos\vartheta_o} \\ v^2_P &= v^2_o \cos\left[2\pi \ \sin\vartheta_o\right] \end{aligned}\right\} \tag{35}$$

pa je očigledno da će se jednakost vektora posle obilaska konture, tj. ispunjenje uslova $v^1_P = v^1_o = 0$ i $v^2_P = v^2_o$, imati samo u slučaju kad je $\vartheta_o = 0$, tj. kad se radi o ekvatorijalnom krugu. Taj dobro poznati rezultat da se pri paralelnom pomeranju duž neke konture na sfernoj površi vektor u opštem slučaju vraća u polaznu tačku sa pravcem drugačijim od onoga koji je imao u početku prenosa, prikazana je na sl.1 (što odgovara čuvenoj slici iz vremena Levi-Čivite, koja je reprodukovana na str.185 u [1]).



Slika 1.

No, to znači da paralelno pomeranje po površi u opštem slučaju zavisi od puta; naime, mogli smo na konturi uvesti proizvoljnu međutačku P' i uočiti vektor koji je tu paralelno prenet iz P_o, pa onda smatrati da je taj vektor transportovan prvo nazad duž luka $P'P_o$ i zatim duž luka $P'P$ do zajedničke tačke $P \equiv P_o$; činjenica da se paralelnim pomeranjem nekog vektora na istoj površi duž različitih lukova između dveju tačaka došlo do različitih vektora samo potvrđuje pomenutu zavisnost od puta.

Međutim, ono što bi sad (kad je uvedeno paralelno pomeranje i u neeuklidske prostore) verovatno najviše zanimalo čitaoca,koji se sa svim ovim prvi put susreće, jeste, da li se i u neeuklidskim, odnosno rimanskim prostorima može govoriti o nekim operatorima paralelnog pomeranja analognim onima uvedenim u euklidskom prostoru? Odgovor na to pitanje je pozitivan. Naime, o operatorima paralelnog pomeranja duž uočene krive u rimanskom prostoru govorilo se još npr. u [15] (str.59)*, ali bez njihovog pobližeg određivanja; takvi operatori se pominju i u [5] (str.58), ali se odmah napominje: *"However, shifters have been used primarily in the* $\mathcal{E}^n$ *[Euclidean n-space] context."*.

Radoznaliji čitalac učinio bi i korak dalje — zapitao bi se da li se i u rimanskim prostorima iz diferencijalnog oblika (22) uslova paralelnog pomeranja mogu dobiti neki uslovi paralelnog pomeranja na konačnom rastojanju koji bi bili analogni izrazima (5)? To bi u suštini značilo da se vrši integraljenje apsolutnog diferencijala koji se javlja u (23) i to od tačke P_o do tačke P na uočenoj krivoj. Međutim, upravo je u pomenutim radovima V. Vujičića *postulirana* takva operacija (tzv. apsolutni integral) formulom oblika:

$$\overset{\nabla}{\int\limits_{P_oP}} Dv^{\alpha} = v^{\alpha}(P) - A^{\alpha}(P_o, P) \tag{36}$$

gde je **A** konstantno vektorsko polje, ali njegovo određivanje u opštem slučaju nije bilo rešeno: " ... *the problem of the covariantly constant tensor* [...**A**...] *in Riemannian spaces is not solved generally"* ([16], str. 1307). Na način kako da se odredi to polje, a samim tim i apsolutni integral uveden u (36), ukazano je u radu [17], uz pozivanje na rad [18]** i neka utanačenja. Naime, u [18] se razmatralo određivanje vektorskog polja v^{α} takvog da je duž neke krive K, zadane sa $u^{\alpha}=u^{\alpha}(s)$ u neeuklidskom prostoru, apsolutni diferencijal tog polja jednak:

$$\frac{Dv^{\alpha}}{Ds} = \frac{dv^{\alpha}}{ds} + \Gamma^{\alpha}_{\beta\gamma} v^{\beta} \frac{du^{\gamma}}{ds} = w^{\alpha} \tag{37}$$

gde je $w^{\alpha}(s)$ polje zadato u tačkama krive K. Ispostavilo se da se za apsolutni integral može napisati:

$$\overset{\nabla}{\int\limits_{P_oP}} Dv^{\alpha} = v^{\alpha}(P) - K^{\alpha}_{\beta}(P_o, P)\, v^{\beta}(P_o) \tag{38}$$

gde koeficijenti*** K^{α}_{β} predstavljaju *fundamentalni sistem rešenja* homogenog sistema koji odgovara sistemu (37); važi

$$K^{\alpha}_{\gamma} K^{\gamma}_{.\beta} = \delta^{\alpha}_{\beta}, \ K^{.\gamma}_{\beta} K^{\alpha}_{.\gamma} = \delta^{\alpha}_{\beta} \tag{39}$$

i $\left|K^{\alpha}_{.\beta}(P_o, P)\right| \neq 0$, $\left|K^{\alpha}_{\beta}(P_o, P)\right| \neq 0$ (v. npr. str. 73 u [19]).

Ako se sad pretpostavi da je v^{α} polje paralelnih vektora duž krive K, tj. da je zadovoljen uslov (23), onda iz (38) sledi:

$$v^{\alpha}(P) = K^{\alpha}_{\beta}(P_o, P)\, v^{\beta}(P_o) \tag{40}$$

a to upravo znači da je pomoću koeficijenata K^{α}_{β} uspostavljena veza između koordinata vektora paralelno

---

*Doduše kao o *propagatorima* paralelnog pomeranja (*"the parallel propagator"*), pri čemu je kriva koja spaja uočene tačke bila geodezijska linija!

**Taj rad predstavlja saopštenje na jednoj od sednica Francuske akademije nauka kojim je zapravo predloženo uvođenje pojma apsolutnog integrala još daleke 1929. godine!

***I sada se prvi indeks u $K^{\alpha}_{\beta}(P_o, P)$, bilo da je gornji ili donji, odnosi na tačku krive K određenu prvim argumentom, dok se drugi indeks odnosi na tačku određenu drugim argumentom.

pomerenog po površi. Stoga ti koeficijenti imaju ulogu operatora paralelnog pomeranja po površi i uopšte u rimanskom prostoru (pa ih možemo zvati *"Riemannian shifters"*). Kernel **K** je zadržan za te koeficijente da istakne njihovu zavisnost od krive duž koje se vektor pomera, a koja je još u [18] označavana sa *K*. Međutim, na tu zavisnost od puta paralelnog pomeranja po površi već je ranije bilo ukazano, što je samo očekivana posledica činjenice da se paralelno pomeranje u rimanskom prostoru definiše uvek *duž krivih linija* (v. str. 143 u [11]).

Ovde treba istaći sledeće: činjenica da se može pokazati da za sistem (23) pod određenim uslovima postoji fundamentalni sistem rešenja duž zadate krive — odnosno da postoje operatori paralelnog pomeranja duž te krive — ne znači da ga je i lako naći. Ipak, iz ranije navedenog primera se može videti da su ti operatori (bar u jednostavnijim slučajevima) odavno bili na dohvat ruke, samo ih je trebalo prepoznati.

Operatori paralelnog pomeranja duž uporednika na sfernoj površi

Ako se uporede izrazi (32) sa izrazima (40), odmah se vidi da će koordinate $K_\beta^\alpha(P,P_o)$ operatora paralelnog pomeranja *duž uporednika* između tačaka $P_o(\varphi_o,\vartheta_o)$ i $P(\varphi_P,\vartheta_P=\vartheta_o)$ na sfernoj površi biti:

$$\begin{Bmatrix} K_1^1 & K_2^1 \\ K_1^2 & K_2^2 \end{Bmatrix} = \tag{41}$$
$$= \begin{Bmatrix} \cos\left[(\varphi_P-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right] & \dfrac{\sin\left[(\varphi_P-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right]}{\cos\vartheta_o} \\ -\cos\vartheta_o\sin\left[(\varphi_P-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right] & \cos\left[(\varphi_P-\varphi_o)\sin\vartheta_o\right] \end{Bmatrix}$$

Primetimo da se takav oblik koeficijenata **K** mogao i naslutiti, jer se moglo uočiti da sledeća dva rešenja sistema (29):

$$\begin{Bmatrix} v_{(1)}^1 \\ v_{(1)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{tg}\vartheta_o \cos(\varphi\sin\vartheta_o) \\ -\sin\vartheta_o \sin(\varphi\sin\vartheta_o) \end{Bmatrix}$$
i (42)
$$\begin{Bmatrix} v_{(2)}^1 \\ v_{(2)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \operatorname{tg}\vartheta_o \sin(\varphi\sin\vartheta_o) \\ \sin\vartheta_o \cos(\varphi\sin\vartheta_o) \end{Bmatrix}$$

obrazuju njegov fundamentalni sistem rešenja, jer je:

$$Det\begin{Bmatrix} v_{(1)}^1 & v_{(2)}^1 \\ v_{(1)}^2 & v_{(2)}^2 \end{Bmatrix} \neq 0 \quad (\vartheta_o \neq 0)\,!$$

Ako je u pitanju paralelno pomeranje duž nekih naročitih linija na sfernoj površi, operatori paralelnog pomeranja mogu se i brže dobiti. Naime, neka su u pitanju

Operatori paralelnog pomeranja duž meridijana na sfernoj površi

Sada je $\varphi = const.$, pa se sistem (28) svodi na:

$$\left.\begin{aligned} dV^1/V^1 &= \operatorname{tg}\vartheta\, d\vartheta \\ dV^2/ds &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{43}$$

Sledeća dva rešenja tog sistema:

$$\begin{Bmatrix} V_{(1)}^1 \\ V_{(1)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos\vartheta_o/\cos\vartheta \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{Bmatrix} V_{(2)}^1 \\ V_{(2)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{44}$$

obrazuju njegov fundamentalni sistem jer je:

$$Det\begin{Bmatrix} V_{(1)}^1 & V_{(2)}^1 \\ V_{(1)}^2 & V_{(2)}^2 \end{Bmatrix} = Det\begin{Bmatrix} \dfrac{\cos\vartheta_o}{\cos\vartheta} & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \neq 0 \tag{45}$$

pa se za operatore K_β^α dobija:

$$\left\{K_\beta^\alpha\right\} = \begin{Bmatrix} \dfrac{\cos\vartheta_o}{\cos\vartheta_P} & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{46}$$

(pri tom smatramo da je tačka *P* promenljiva, tj. da je $\vartheta_P \equiv \vartheta$).

Operatori paralelnog pomeranja mogu, u slučajevima nekih površi, imati i jednostavniji oblik, kao u sledećem primeru.

Operatori paralelnog pomeranja na cilindarskoj površi

Budući da su u sistemu koordinata $u^1 \equiv \varphi$, $u^2 \equiv z$ na površi cilindra sve koordinate Kristofelovih simbola druge vrste jednake nuli, sistem (27) se svodi na:

$$\left.\begin{aligned} dv^1/ds &= 0 \\ dv^2/ds &= 0 \end{aligned}\right\} \tag{47}$$

pa je očigledno da sledeća dva rešenja tog sistema:

$$\begin{Bmatrix} v_{(1)}^1 \\ v_{(1)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 1 \\ 0 \end{Bmatrix} \quad \text{i} \quad \begin{Bmatrix} v_{(2)}^1 \\ v_{(2)}^2 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} 0 \\ 1 \end{Bmatrix} \tag{48}$$

obrazuju fundamentalni sistem njegovih rešenja, jer je:

$$Det\begin{Bmatrix} v_{(1)}^1 & v_{(2)}^1 \\ v_{(1)}^2 & v_{(2)}^2 \end{Bmatrix} = Det\begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \neq 0 \tag{49}$$

tako da se operatori paralelnog pomeranja svode na Kronekerov simbol, tj.:

$$\left\{K_\beta^\alpha\right\} = \begin{Bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{Bmatrix} \tag{50}$$

Odmah se uočava da u prethodnom primeru, da bi se izvršila integracija sistema (47), nije bilo potrebno precizirati duž koje krive se vrši paralelno pomeranje. To nije nimalo slučajno, jer je u pitanju cilindarska površ koja spada u klasu tzv. razvojnih površi, a za takve površi se pokazuje da poseduju *apsolutni paralelizam*, tj. paralelno pomeranje iz jedne tačke u neku drugu tačku na konačnom rastojanju na takvim površima ne zavisi od puta, odnosno od krive duž koje se vrši paralelno prenošenje vektora (v. npr. str. 152-154 u [11]). Dodajmo da se, s gledišta unutrašnje geometrije takvih površi, radi zapravo o tzv. *ravnim* (*"flat"*) prostorima ([3], str.127,[11], str.193-194).

Ipak, treba još jednom naglasiti da se integraljenje jednačina (27) uvek vrši duž neke *zadate* krive i da ono u opštem slučaju nije rešeno, a ovde će biti reči samo još o određivanju operatora paralelnog pomeranja duž jedne naročite klase linija u rimanskim prostorima.

O određivanju operatora paralelnog pomeranja duž geodezijskih linija u rimanskim prostorima

Pošto je već rečeno da se zadržavamo na dvodimenzionalnim takvim prostorima, biće u stvari reči o paralelnom pomeranju duž geodezijskih linija na površima u trodimenzionalnom euklidskom prostoru (o čemu se govori i u [20]). No, kao što su vektori $\mathbf{v}(P_o)$ i $\mathbf{v}(P)$ u nekoj ravni paralelni ako zaklapaju isti ugao sa pravom koja spaja tačke P_o i P, može se reći da su i vektori $\mathbf{v}(P_o)$ i $\mathbf{v}(P)$ u tangentnim ravnima u tačkama P_o i P neke površi paralelni, ako zatvaraju isti ugao s tangentama u P_o i P na geodezijsku liniju na toj površi kroz te dve tačke (v. str.143 u [11]).

Stoga, da bismo našli vezu između koordinata ovog vektora pri njegovom paralelnom pomeranju po površi *duž geodezijske linije* koja spaja tačke P_o i P na konačnom rastojanju, postupićemo na sledeći način: uvedimo sistem koordinata $\overline{u}^\alpha$ na površi, ali takav da pomenuta geodezijska linija pripada npr. familiji koordinatnih linija $\overline{u}^1$, a da su linije familije $\overline{u}^2$ *upravne* na $\overline{u}^1$; pošto vektori po pretpostavci imaju iste module i zaklapaju iste uglove s koordinatnim linijama $\overline{u}^1$ i $\overline{u}^2$ u tačkama P_o i P, to će i njihove projekcije na ose tih krivolinijskih koordinata biti jednake u P_o i P:

$$\mathbf{v}(P_o)\cdot\overline{\mathbf{t}}_\alpha(P_o)=\mathbf{v}(P)\cdot\overline{\mathbf{t}}_\alpha(P) \tag{51}$$

gde je:

$$\overline{\mathbf{t}}_\alpha=\frac{\overline{\mathbf{a}}_\alpha}{|\overline{\mathbf{a}}_\alpha|}\quad,\quad \overline{\mathbf{a}}_\alpha=\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\overline{u}^\alpha}$$
$$|\overline{\mathbf{a}}_\alpha|=\sqrt{\overline{\mathbf{a}}_\alpha\cdot\overline{\mathbf{a}}_\alpha}=\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}} \tag{52}$$

dalje je:

$$\frac{\overline{v}_\alpha(P_o)}{\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}(P_o)}}=\frac{\overline{v}_\alpha(P)}{\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}(P)}}\quad(\,non\ \Sigma_\alpha\,) \tag{53}$$

Ako sad uvedemo neke druge, proizvoljne krivolinijske koordinate u^α na površi:

$$\left.\begin{aligned} u^\alpha &= u^\alpha(\overline{u}^\beta)\\ \overline{u}^\alpha &= \overline{u}^\alpha(u^\beta)\end{aligned}\right\} \tag{54}$$

bilo bi:

$$\overline{v}_\alpha=\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}v_\beta \tag{55}$$

razume se u tački u kojoj se transformacija vrši; stoga dalje sledi

$$\frac{v_\beta(P_o)}{\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}(P_o)}}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P_o}=\frac{v_\beta(P)}{\sqrt{\overline{a}_{\alpha\alpha}(P)}}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P}\quad(\,non\ \Sigma_\alpha\,) \tag{56}$$

Kako je α slobodan indeks, može se izvršiti kompozicija sa $\left.\frac{\partial\overline{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right|_{P_o}$, tako da se dobija*:

$$v_\gamma(P_o)=\sqrt{\frac{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P_o)}{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P)}}\left.\frac{\partial\overline{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P}v_\beta(P) \tag{57}$$

Taj izraz možemo da prepišemo u obliku:

$$v_\gamma(P_o)=K_{\gamma}^{\cdot\beta}(P_o,P)\,v_\beta(P) \tag{58}$$

pa je očigledno da je pomoću veličina

$$K_{\gamma}^{\cdot\beta}(P_o,P)=\sqrt{\frac{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P_o)}{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P)}}\left.\frac{\partial\overline{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P} \tag{59}$$

uspostavljena veza između koordinata paralelnih vektora na površi u odnosu na proizvoljni sistem u^α, tj. da one imaju ulogu ranije uvedenih operatora paralelnog pomeranja** po površi, koji su tako dobili i svoje analitičko određenje – razume se, pod uslovom da su *poznate* geodezijske linije na posmatranoj površi (u sledećem pododeljku će ti izrazi biti iskorišćeni za određivanje operatora paralelnog pomeranja na sfernoj površi).

Dodajmo da se lako može pokazati da za inverzne operatore važi:

$$K_{\cdot\gamma}^{\beta}(P_o,P)=\sqrt{\frac{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P)}{\overline{a}_{(\alpha)(\alpha)}(P_o)}}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\overline{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right|_{P} \tag{60}$$

i da je npr.

$$K_{\gamma}^{\cdot\beta}(P_o,P)\ K_{\cdot\beta}^{\alpha}(P_o,P)=\delta_\gamma^\alpha \tag{61}$$

Operatori paralelnog pomeranja duž geodezijske linije na sfernoj površi

S obzirom na to da se zna da su geodezijske linije na sfernoj površi njeni *veliki krugovi*, izabraćemo koordinate $\overline{u}^\alpha$, koje se javljaju u izrazu (59), za koordinate operatora paralelnog pomeranja, tako da to budu geografske koordinate ($\overline{u}^1\equiv\varphi,\ \overline{u}^2\equiv\vartheta$) u sfernom polarnom sistemu $\{\overline{r},\varphi,\vartheta\}$ koji odgovara Dekartovom sistemu $\overline{z}^i$ ($\overline{z}^1\equiv\overline{x},\ \overline{z}^2\equiv\overline{y},\ \overline{z}^3\equiv\overline{z}$), čija se ravan $O\overline{z}^1\overline{z}^2$ (tj. $O\overline{xy}$) podudara sa ravni OP_oP, gde su P_o i P dve proizvoljne tačke na sfernoj površi. Na taj način je postignuto da geodezijska linija, tj. veliki krug kroz tačke P_o i P pripada familiji koordinatnih linija $\overline{u}^1\equiv\varphi$ (tačnije, da leži na ekvatoru), pa se mogu iskoristiti izrazi (59), s tim da se oni, budući da su u sistemu $\{\varphi,\vartheta\}$ dijagonalne koordinate osnovnog metričkog tenzora jednake $\overline{a}_{11}=\overline{r}^2\cos^2\vartheta,\ \overline{a}_{22}=\overline{r}^2$ i pri tome je $\vartheta_P=\vartheta_o=0$, svode na:

$$K_{\gamma}^{\cdot\beta}(P_o,P)=\left.\frac{\partial\overline{u}^\alpha}{\partial u^\gamma}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial u^\beta}{\partial\overline{u}^\alpha}\right|_{P} \tag{62}$$

Međutim, da bi se dobili efektivni izrazi za operatore paralelnog pomeranja po sfernoj površi (a duž velikih krugova), tj. da bi se odredili parcijalni izvodi u (62),

*Stavljanje indeksa α u zagradu znači da se konvencija o sabiranju ne primenjuje na član s takvim indeksom — pri sabiranju po indeksu α taj se član jednostavno pridružuje drugim članovima s istim indeksom.

**Uočava se da je dobijeni oblik (23) za operatore paralelnog pomeranja duž geodezijskih linija na nekoj površi analogan onom za "euklidske šiftere", s tim da su ulogu Dekartovih koordinata ovde preuzele na opisani način uvedene koordinate $\overline{u}^\alpha$.

trebalo bi znati veze oblika (54) između krivolinijskih koordinata u^α i $\overline{u}^\alpha$ na površi. U tom cilju, a budući da su $\overline{u}^\alpha$ (tj. $\{\overline{\varphi},\overline{\vartheta}\}$) geografske koordinate na sfernoj površi, opredelimo se da i u^α budu geografske koordinate na toj površi (tj. da je $u^1 \equiv \varphi,\ u^2 \equiv \vartheta$), ali uvedene u nekom drugom (a zapravo "fiksnom", jer se P_o i P u odnosu na njega zadaju!) Dekartovom sistemu z^i ($z^1 \equiv x,\ z^2 \equiv y,\ z^3 \equiv z$). Izrazi (62) mogu onda u razvijenom obliku da se napišu na sledeći način (stavljajući, dakle, da je $u^1 \equiv \varphi,\ u^2 \equiv \vartheta,\ \ \overline{u}^1 \equiv \overline{\varphi},\ \ \overline{u}^2 \equiv \overline{\vartheta}$):

$$\left.\begin{aligned}
K_1^{\cdot 1}(P_o,P) &= \left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varphi}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P} + \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\varphi}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P}\\
K_2^{\cdot 1}(P_o,P) &= \left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P} + \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P}\\
K_1^{\cdot 2}(P_o,P) &= \left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varphi}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P} + \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\varphi}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P}\\
K_2^{\cdot 2}(P_o,P) &= \left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P} + \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o}\left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P}
\end{aligned}\right. \qquad (63)$$

No, da bi se odredili parcijalni izvodi koji se tu javljaju:

$$\left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varphi}\right|_{P_o},\ \left.\frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o},\ \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\varphi}\right|_{P_o},\ \left.\frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\vartheta}\right|_{P_o}$$

i (64)

$$\left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P},\ \left.\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P},\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\varphi}}\right|_{P},\ \left.\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\vartheta}}\right|_{P}$$

a ne znajući eksplicitne izraze za veze između sistema $\{r,\varphi,\vartheta\}$ i $\{\overline{r},\overline{\varphi},\overline{\vartheta}\}$, tačnije (zbog $r=\overline{r}$) sistema $\{\varphi,\vartheta\}$ i $\{\overline{\varphi},\overline{\vartheta}\}$, trebalo bi iskoristiti relacije:

$$\left.\begin{aligned}
\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\varphi}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial\overline{z}^j}\frac{\partial\overline{z}^j}{\partial\overline{\varphi}} \qquad & \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}^i}\frac{\partial\overline{z}^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial\varphi}{\partial\overline{\vartheta}} &= \frac{\partial\varphi}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial\overline{z}^j}\frac{\partial\overline{z}^j}{\partial\overline{\vartheta}} & \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\vartheta} &= \frac{\partial\overline{\varphi}}{\partial\overline{z}^i}\frac{\partial\overline{z}^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial\vartheta}\\
\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\varphi}} &= \frac{\partial\vartheta}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial\overline{z}^j}\frac{\partial\overline{z}^j}{\partial\overline{\varphi}} & \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\varphi} &= \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\overline{z}^i}\frac{\partial\overline{z}^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial\varphi}\\
\frac{\partial\vartheta}{\partial\overline{\vartheta}} &= \frac{\partial\vartheta}{\partial z^i}\frac{\partial z^i}{\partial\overline{z}^j}\frac{\partial\overline{z}^j}{\partial\overline{\vartheta}} & \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\vartheta} &= \frac{\partial\overline{\vartheta}}{\partial\overline{z}^i}\frac{\partial\overline{z}^i}{\partial z^j}\frac{\partial z^j}{\partial\vartheta}
\end{aligned}\right\} \qquad (65)$$

budući da su, s jedne strane, poznate veze (18) između Dekartovih i sfernih polarnih koordinata (pa samim tim i relacije (19) i njima inverzne relacije (20))*, a da, s druge strane, između Dekartovih sistema z^i i $\overline{z}^i$ postoje veze:

$$z^i = a^i_{\cdot j}\overline{z}^j,\quad \overline{z}^i = a^{\cdot i}_{j} z^j \ \ (a^{\cdot i}_{j} \equiv a^j_{\cdot i}) \qquad (66)$$

gde su $a^i_{\cdot j}$ kosinusi uglova među osama tih sistema i pri tom je

$$\frac{\partial z^i}{\partial\overline{z}^j} = a^i_{\cdot j},\quad \frac{\partial\overline{z}^i}{\partial z^j} = a^{\cdot i}_{j} \qquad (67)$$

Kao što je poznato, kosinusi uglova $a^i_{\cdot j}$ mogu da se izraze preko Ojlerovih (Euler) uglova, s tim što se uobičajene relacije ovde, zbog naročitog izbora ugla sopstvene rotacije tako da je $\varphi_{Eu}=0$ (tj. da osa $\overline{z}^1$ leži u ravni Oz^1z^2), pojednostavljuju i glase:

$$\begin{aligned}
&a^1_{\cdot 1} = \cos\psi_{Eu} && a^1_{\cdot 2} = -\sin\psi_{Eu}\cos\vartheta_{Eu} && a^1_{\cdot 3} = \sin\psi_{Eu}\sin\vartheta_{Eu}\\
&a^2_{\cdot 1} = \sin\psi_{Eu} && a^2_{\cdot 2} = \cos\psi_{Eu}\cos\vartheta_{Eu} && a^2_{\cdot 3} = -\cos\psi_{Eu}\sin\vartheta_{Eu}\\
&a^3_{\cdot 1} = 0 && a^3_{\cdot 2} = \sin\vartheta_{Eu} && a^3_{\cdot 3} = \cos\vartheta_{Eu}
\end{aligned} \qquad (68)$$

Što se tiče uglova precesije ψ_{Eu} i nutacije ϑ_{Eu}, prvi od njih se (kao nagibni ugao prave po kojoj ravan OP_oP seče koordinatnu ravan Oz^1z^2) može izraziti u obliku:

$$\mathrm{tg}\psi_{Eu} = \frac{\sin\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\vartheta_P - \sin\vartheta_o\sin\varphi_P\cos\vartheta_P}{\cos\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\vartheta_P - \sin\vartheta_o\cos\varphi_P\cos\vartheta_P} \qquad (69)$$

a drugi (kao ugao između normala na ravni Oz^1z^2 i OP_oP) u obliku:

$$\begin{aligned}
&\cos\vartheta_{Eu} =\\
&= \frac{\cos\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\varphi_P\cos\vartheta_P - \sin\varphi_o\cos\vartheta_o\cos\varphi_P\cos\vartheta_P}{\sqrt{\begin{aligned}&(\sin\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\vartheta_P - \sin\vartheta_o\sin\varphi_P\cos\vartheta_P)^2 +\\ &+(\sin\vartheta_o\cos\varphi_P\cos\vartheta_P - \cos\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\vartheta_P)^2 +\\ &+(\cos\varphi_o\cos\vartheta_o\sin\varphi_P\cos\vartheta_P - \sin\varphi_o\cos\vartheta_o\cos\varphi_P\cos\vartheta_P)^2\end{aligned}}}
\end{aligned} \qquad (70)$$

pa je očigledno da su oni prikazani u zavisnosti od koordinata (φ_o,ϑ_o) i (φ_P,ϑ_P) tačaka P_o i P, respektivno.

Uzimajući u obzir izraze (19, 20, 67 i 68), zamenjujući ih u (65) i određujući izvode (64) koji se javljaju u (63), dobijamo sledeće eksplicitne izraze u geografskim koordinatama za operatore paralelnog pomeranja po sfernoj površi duž geodezijske linije (velikog kruga) između tačaka P_o i P:

$$\begin{aligned}
&K_1^{\cdot 1}(P_o,P) =\\
&= \frac{\cos\vartheta_o}{\cos\vartheta_P}\{[\sin\overline{\varphi}_P\sin(\varphi_P-\psi_{Eu}) + \cos\overline{\varphi}_P\cos(\varphi_P-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}]\times\\
&\times[\sin\overline{\varphi}_o\sin(\varphi_o-\psi_{Eu}) + \cos\overline{\varphi}_o\cos(\varphi_o-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] +\\
&+\cos(\varphi_P-\psi_{Eu})\cos(\varphi_o-\psi_{Eu})\sin^2\vartheta_{Eu}\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_2^{\cdot 1}(P_o,P) =\\
&= \frac{1}{\cos\vartheta_P}\{[\sin\overline{\varphi}_P\sin(\varphi_P-\psi_{Eu}) + \cos\overline{\varphi}_P\cos(\varphi_P-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}]\times\\
&\times\{\sin\vartheta_o[\sin\overline{\varphi}_o\cos(\varphi_o-\psi_{Eu}) - \cos\overline{\varphi}_o\sin(\varphi_o-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] +\\
&+\cos\vartheta_o\sin\vartheta_{Eu}\cos\overline{\varphi}_o\} -\\
&-\cos(\varphi_P-\psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu}[\sin\vartheta_o\sin(\varphi_o-\psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu} + \cos\vartheta_o\cos\vartheta_{Eu}]\}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&K_1^{\cdot 2}(P_o,P) =\\
&= \cos\vartheta_o\{\{\sin\vartheta_P[\sin\overline{\varphi}_P\cos(\varphi_P-\psi_{Eu}) - \cos\overline{\varphi}_P\sin(\varphi_P-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] +\\
&+\cos\vartheta_P\sin\vartheta_{Eu}\cos\overline{\varphi}_P\}\times\\
&\times[\sin\overline{\varphi}_o\sin(\varphi_o-\psi_{Eu}) + \cos\overline{\varphi}_o\cos(\varphi_o-\psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] -\\
&-\cos(\varphi_o-\psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu}[\sin\vartheta_P\sin(\varphi_P-\psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu} + \cos\vartheta_P\cos\vartheta_{Eu}]\}
\end{aligned}$$

*Analogno je za vezu između $\overline{z}^i$ i $\{\overline{r},\overline{\varphi},\overline{\vartheta}\}$!

$$
\begin{aligned}
&K_2^{\cdot 2}(P_o, P) = \\
&= \{\sin\vartheta_P[\sin\overline{\varphi}_P \cos(\varphi_P - \psi_{Eu}) - \cos\overline{\varphi}_P \sin(\varphi_P - \psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] + \\
&+ \cos\vartheta_P \sin\vartheta_{Eu} \cos\overline{\varphi}_P\} \times \\
&\times\{\sin\vartheta_o[\sin\overline{\varphi}_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) - \cos\overline{\varphi}_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu})\cos\vartheta_{Eu}] + \\
&+ \cos\vartheta_o \sin\vartheta_{Eu} \cos\overline{\varphi}_o\} \; + \\
&+ [\sin\vartheta_P \sin(\varphi_P - \psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu} + \cos\vartheta_P \cos\vartheta_{Eu}] \times \\
&\times[\sin\vartheta_o \sin(\varphi_o - \psi_{Eu})\sin\vartheta_{Eu} + \cos\vartheta_o \cos\vartheta_{Eu}]
\end{aligned} \tag{71}
$$

Treba naglasiti da su ti operatori zaista funkcije samo tačaka P_o i P, tj. koordinata (φ_o, ϑ_o) i (φ_P, ϑ_P), jer se to za ψ_{Eu} i ϑ_{Eu} vidi odmah iz (69 i 70), dok se za $\overline{\varphi}_o$, odnosno $\overline{\varphi}_P$ lako uspostavljaju odnosi:

$$
\left.\begin{aligned}
\cos\overline{\varphi}_o &= \cos\vartheta_o \cos(\varphi_o - \psi_{Eu}) \\
\cos\overline{\varphi}_P &= \cos\vartheta_P \cos(\varphi_P - \psi_{Eu})
\end{aligned}\right\} \tag{72}
$$

pa je prethodna konstatacija zaista ispravna (podsetimo da je $\overline{\vartheta}_P = \overline{\vartheta}_o = 0$).

Lako se može videti da se izrazi (71), u slučaju paralelnog pomeranja vektora duž ekvatora ($\vartheta_P = \vartheta_o = 0$, $\varphi_P \neq \varphi_o$), svode na izraze (41) kada se i u njima stavi da je $\vartheta_o = 0$, tj. na Kronekerov simbol. U slučaju paralelnog pomeranja vektora po sfernoj površi, ali sada duž meridijana ($\varphi_P = \varphi_o$, $\vartheta_P \neq \vartheta_o$), za operatore (71) se pokazuje da se svode na izraze (46). Ovakva provera izraza (71) u tim naročitim slučajevima paralelnog pomeranja vektora po sfernoj površi, trebalo bi bar donekle da umanji bojazan u pogledu korektnosti tako određenih operatora (budući da su oni u suštini dobijeni *heurističkim* postupkom, a ne rešavanjem odgovarajućeg homogenog sistema diferencijalnih jednačina).

Napomena 2. Korisno je da se dobijeni rezultati (71) za operatore $\{K_\beta^{\cdot\alpha}\}$ uporede sa izrazom (21) za "euklidske šiftere" $\{g_j^{\cdot i}\}$ u sfernim polarnim koordinatama, odnosno s odgovarajućom submatricom koja se odnosi na površ sfere (r_o=r_P):

$$
\begin{Bmatrix}
\dfrac{\cos\vartheta_o}{\cos\vartheta_P}\cos(\varphi_P - \varphi_o) & \dfrac{\sin\vartheta_o}{\cos\vartheta_P}\sin(\varphi_P - \varphi_o) \\
-\sin\vartheta_P \cos\vartheta_o \sin(\varphi_P - \varphi_o) & \sin\vartheta_P \sin\vartheta_o \cos(\varphi_P - \varphi_o) + \cos\vartheta_P \cos\vartheta_o
\end{Bmatrix} \tag{73}
$$

Već na prvi pogled bi se reklo da se (71) razlikuje od (73). Ipak, ako to podozrivijem čitaocu (zbog složenosti izraza (71) koji bi se možda mogli pojednostaviti) ne izgleda baš očigledno, mogu se posmatrati dva naročita slučaja. Neka se prvo tačke P_o i P nalaze na ekvatoru ($\vartheta_P = \vartheta_o = 0$, $\varphi_P \neq \varphi_o$), tada se (73) svodi na:

$$
\begin{Bmatrix}
\cos(\varphi_P - \varphi_o) & 0 \\
0 & 1
\end{Bmatrix} \tag{74}
$$

što se svakako razlikuje od Kronekerovog simbola koji odgovara operatorima $K_\beta^{\cdot\alpha}$ u tom slučaju. Ako se, pak, tačke P_o i P nalaze na meridijanu ($\varphi_P = \varphi_o$, $\vartheta_P \neq \vartheta_o$), tada se (73) svodi na

$$
\begin{Bmatrix}
\dfrac{\cos\vartheta_o}{\cos\vartheta_P} & 0 \\
0 & \cos(\vartheta_P - \vartheta_o)
\end{Bmatrix} \tag{75}
$$

što se takođe razlikuje od matrice (46) koja se tada ima za operatore $K_\beta^{\cdot\alpha}$. Prema tome, može se reći da se operatori paralelnog pomeranja po površi (i uopšte u rimanskom prostoru) u principu razlikuju od "euklidskih šiftera" za odnosni obvojni prostor, preciznije od njihovog "površinskog" dela; to samo potvrđuje tačnost opaske na str. 130 u [21] da se operatori paralelnog pomeranja po površi ne mogu dobiti izdvajanjem "površinskog" dela iz operatora paralelnog pomeranja u odgovarajućem obvojnom euklidskom prostoru.

Napomena 3. Kada su dobijeni *analitički izrazi* za operatore paralelnog pomeranja $K_\beta^{\cdot\alpha}$ duž velikih krugova na sfernoj površi, kovarijantne koordinate vektora paralelno pomeranog po toj površi iz tačke P_o u tačku P (a po luku velikog kruga koji ih spaja) bi se izračunavale po obrascu:

$$
v^\alpha(P) = K_\beta^{\cdot\alpha}(P_o, P)\, v^\beta(P_o) \tag{76}
$$

(pri čemu je $v^1 \equiv v^\varphi$, $v^2 \equiv v^\vartheta$), a onda se, kao u (33), mogu odrediti i Dekartove koordinate tog vektora u tački P.

To je i iskorišćeno da bi se izračunale Dekartove koordinate zadatog jediničnog vektora **v** posle paralelnog pomeranja po sfernoj površi (poluprečnika r) iz tačke P_o u tačku P duž velikog kruga; same tačke P_o i P su zadavane svojim geografskim koordinatama $\{\varphi_o, \vartheta_o\}$ i $\{\varphi_P, \vartheta_P\}$, s tim da je u tački P_o zadavan i ugao α_o koji jedinični vektor zaklapa s uporednikom u toj tački. Rezultati za nekoliko proizvoljno izabranih parova

Tabela 1.

P_o	P
φ_o=3°	φ_P=76°
ϑ_o=15°	ϑ_P=79°
α_o=23°	

	Dekartove koordinate zadatog jediničnog vektora **v** posle paralelnog pomeranja po sfernoj površi (r = 5) iz tačke P_o u tačku P duž velikog kruga	
$\mathbf{v}_P$	(*analitički pristup*)	(*numerički pristup*)
v_P^x:	-0.5609105726399270	-0.5609105726399270
v_P^y:	0.8179382961038478	0.8179382961038477
v_P^z:	-0.1278916465899297	-0.1278916465899297

P_o	P
φ_o=10°	φ_P=80°
ϑ_o=15°	ϑ_P=85°
α_o=60°	

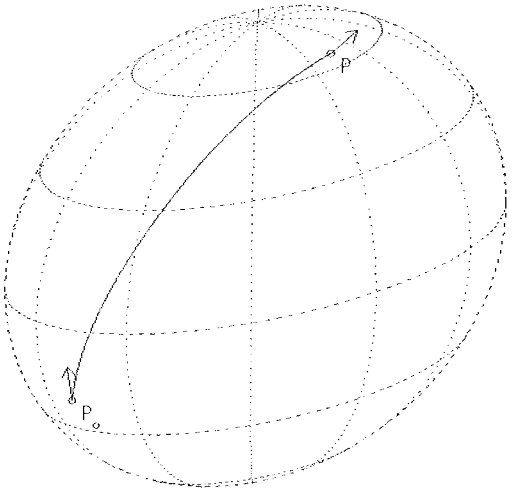
	Dekartove koordinate zadatog jediničnog vektora **v** posle paralelnog pomeranja po sfernoj površi (r = 10) iz tačke P_o u tačku P duž velikog kruga	
$\mathbf{v}_P$	(*analitički pristup*)	(*numerički pristup*)
v_P^x:	-0.9592179801699705	-0.9592179801699705
v_P^y:	0.2824986141850212	0.2824986141850212
v_P^z:	-9.7672668738299610E-3	-9.7672668738299595E-3

P_o	P
φ_o=17°	φ_P=66°
ϑ_o=10°	ϑ_P=77°
α_o=30°	

	Dekartove koordinate zadatog jediničnog vektora **v** posle paralelnog pomeranja po sfernoj površi (r = 10) iz tačke P_o u tačku P duž velikog kruga	
$\mathbf{v}_P$	(*analitički pristup*)	(*numerički pristup*)
v_P^x:	-0.8188552843021616	-0.8188552843021616
v_P^y:	0.5723252631531620	0.5723252631531620
v_P^z:	-4.3815710961823556E-2	-4.3815710961823552E-2

tačaka na sfernoj površi navedeni su u tabeli 1, s tim da su u tabeli date i Dekartove koordinate tog vektora **v** određivane neposredno (bez uvođenja pojma operatora paralelnog pomeranja po površi), iz ranije pomenutog uslova da vektor koji se paralelno pomera duž geodezijske linije mora biti nagnut pod konstantnim uglom prema toj krivoj u svakoj njenoj tački, a što je ostvareno računarskim programom kojim je generisana i situcija prikazana na sl.2.

Izuzetno dobro slaganje rezultata predstavlja *numeričko* potkrepljenje ispravnosti dobijenih *analitičkih* izraza (71) za operatore paralelnog pomeranja duž geodezijske linije po sfernoj površi. Smatrali smo da nije na odmet da se izvrši i takva njihova provera, kako zato što su ti izrazi, kao i način na koji su dobijeni (bar prema dostupnoj literaturi) – novi, tako i zbog njihove glomaznosti, koja neosporno uvećava mogućnost greške.



Slika 2.

Zaključak

U radu je dat pregled nekih poznatih (u euklidskom prostoru) i nekih manje poznatih rezultata (u rimanskim prostorima) vezanih za *paralelno pomeranje* vektorskih (i uopšte tenzorskih) polja. U suštini, istaknuta je činjenica da se pri pojedinim operacijama (sabiranje, integracija, ...) s tim poljima, ukoliko su ona definisana *u različitim tačkama* prostora, mora prvo izvršiti njihovo pomeranje, prenošenje, propagacija, ... *u zajedničku tačku*, a neposredna posledica te činjenice jeste da se u koordinatnom obliku polja u takvim operacijama, kada se dosledno izvršavaju u krivolinijskim koordinatama, pojavljuju *operatori paralelnog pomeranja* (*"shifting operators"*).

Obaveštenje. Autor izražava zahvalnost prof. dr Veljku Vujičiću, akademiku ANN (Matematički institut SANU, Beograd) na kritičkom pregledu ovog rada.

Literatura

[1] GOLAB,S. *Tensor Calculus*. Elsevier, Amsterdam – London – New York, 1974.

[2] ERICKSEN,L.J. *Tensor Fields*, Handbuch der Physik, Bd. III/1, Springer–Verlag, Berlin – Göttingen – Heidelberg, l960.

[3] ANĐELIĆ,P.T. *A Survey of Tensor Calculus*, International Centre for Mechanical Sciences, Udine, 1970.

[4] ERINGEN,A.C., SUHUBI,E.S. *Elastodynamics*, *I,* Academic Press, New York, l974.

[5] MARSDEN,J.E., HUGHES,T.J.R. *Mathematical Foundations of Elasticity*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, l983.

[6] RUTTEN,H.S. *Theory and Design of Shells on the Basis of Asymptotic Analysis*, Rutten+Kruisman, Consulting Engineers, Voorburg, 1973.

[7] STOJANOVIĆ,R. *Uvod u nelinearnu mehaniku kontinuuma*. Zavod za izdavanje udžbenika, Beograd, 1965.

[8] JARIĆ,J. *Mehanika kontinuuma*, Građevinska knjiga, Beograd, 1988.

[9] VUJIČIĆ,V.A. A contribution to tensor calculus. *Tensor (N. S.),* 1972, 25, p.375-382.

[10] BOKAN,N. Some properties of fundamental bipoint tensor. *Matematički vesnik*, 1971, vol.8, no.23, p.367-371.

[11] ANĐELIĆ,T.P. *Tenzorski račun*. Naučna knjiga, Beograd, 1967.

[12] VUJICHICH,V.A. Absolyutnyj integral tenzora. *Publ. Inst. Math.,* 1970, vol.10, no.24, p.199-202.

[13] DRAŠKOVIĆ,Z. On invariance of integration in Euclidean space. *Tensor (N. S.),* 1981, vol.35, p.21-24.

[14] VUJIČIĆ,V.A. Kovarijantne jednačine geodezijskih linija na nekim površima. *Matematički vesnik*, 1975, vol.12, no.27, p.399-409.

[15] SYNGE,J.L. *Relativity: The General Theory.* North-Holland, Amsterdam, 1960.

[16] VUJIČIĆ,V.A. *On the absolute integral in an n-dimensional configuration space,* Colloquia Mathematica Societatis János Bolyai, 46. Topics in differential geometry, 1984, p.1297-1308.

[17] DRAŠKOVIĆ,Z. *Again on the absolute integral*, Facta Universitatis, Series "Mechanics, Automatic Control and Robotics", 1998, vol.2, no.8, p.649-654.

[18] HORÁK,Z. *Sur le problème fondamental du calcul intégral absolu*. C. R. Ac. Sci., 1929, 189, p.19-21.

[19] KAMKE,E. *Spravochnik po obyknovennym differentsial'nym uravneniyam.* Nauka, Moskva, 1971.

[20] DRAŠKOVIĆ,Z. *Contribution to the discussion on absolute integration of differential equations of geodesics in non-Euclidean space*, Facta Universitatis, Series "Mechanics, Automatic Control and Robotics", 2001, vol.3, no.11, p.55-70.

[21] VUJIČIĆ,V.A. *Kovarijantna dinamika.* Matematički institut, Beograd, 1981.

[22] VEKUA,I.N. *Nekotorye obshchie metody postroeniya razlichnykh variantov teorii obolochek*, Nauka, Moskva, l982.

[23] NAGHDI,P.M. *The Theory of Shells and Plates,* Handbuch der Physik, Bd. VIa/2, Springer-Verlag, Berlin, l972.

[24] ARIS,R. *Vectors, Tensors and the Basic Equations of Fluid Mechanics.* Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey, l962.

Rad primljen: 5.12.2001.god.