UDK: 681.511.2:517.938(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Generalisane inverzije u teoriji i primenama u linearnim singularnim sistemima automatskog upravljanja

I DEO: Teorijske osnove

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]
Vesna Drakulić, dipl.inž.[1)]

Singularni sistemi predstavljeni su u matematičkom smislu kombinacijom diferencijalnih i algebarskih jednačina, pri čemu ove druge predstavljaju ograničenje, koje opšte rešenje mora da zadovolji u svakom trenutku. Primera singularnih sistema ima skoro u svim granama nauke i tehnike. Javljaju se često u elektromagnetnim kolima, dinamici robota i savremenih letelica, optimizacionim problemima i kao granični slučaj singularno-perturbovanih sistema. Dinamička analiza ove klase sistema u vremenskom domenu podrazumeva poznavanje rešenja sistema diferencijalno-algebarskih jednačina. Zbog specifičnosti koje nosi sa sobom matrični zapis ovih sistema, neophodno je primeniti nestandardne inverzije odgovarajućih matrica. Ovi postupci pozanati su u literaturi kao generalisane ili pseudoinverzije. Imajući u vidu obimnost ove problematike, celokupni prikaz ovog problema podeljen je u dva dela. U prvom delu rada izložene su matematičke osnove psudoinverzija, a u drugom njihova primena u rešavanju linearnog singularnog sistema jednačina. Izložene procedure propraćene su odgovarajućim primerima.

Ključne reči: **Linearni sistemi, singularni sistemi, generalisane inverzije, Moore-Penroseova inverzija, Drazinova inverzija.**

Uvod

KONTINUALNI singularni sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane *kombinacijom algebarskih i diferencijalnih jednačina,* što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja, a samim tim onemogućava njihovo rešavanje uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje "*normalnih*" sistema.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju, odnosno rešavanju dela sistema koji sadrži diferencijalni deo.

Složena priroda singularnih sistema prouzrokuje mnoge poteškoće u njihovom analitičkom i numeričkom proučavanju, a koje se ne javljuju kada su u pitanju tzv. *normalni sistemi*. Pitanje postojanja rešenja, njegove jedinstvenosti, konzistentnih početnih uslova i impulsnog ponašanja, kao i direktno određivanje fundamentalne matrice, znatno otežava njihovu analizu i sintezu.

Neka od ovih pitanja, kao i prednosti u korišćenju matematičkih modela iskazanih singularnom i/ili deskriptivnom formom, bila su predmet razmatranja u radu *Lazarević et al. (2001)* Pregled najnovijih rezultata i iscrpan uvid u do sada publikovane radove, kada su u pitanju i kontinualni singularni i diskretni deskriptivni sistemi može se naći u sledećim referencama: *Bajić (1992), Campbell (1980b, 1982), Lewis (1986, 1987), Debeljković at el. (1996a, 1996b, 1998)* i u dva tematska broja časopisa *Circuits, Systems and Signal Procesing (1986, 1989).*

Preliminarna razmatranja

Posmatrajmo matričnu jednačinu oblika:

$$A\mathbf{x} = \mathbf{b} \tag{1}$$

gde su $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, $\mathbf{x} \in \mathrm{C}^{n}$, $\mathbf{b} \in \mathrm{C}^{m}$. Ako je matrica A regularna, onda je lako rešiti jed. (1). Njeno jedinstveno rešenje je u tom slučaju:

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b} \tag{2}$$

Međutim, ako je matrica A proizvoljna (npr. ako je matrica A pravougaona ili kada je singularna) onda nastaju teškoće pri rešavanju matrične jednačine. Ona tada može imati *jedno, beskonačno ili nijedno rešenje,* u zavisnosti od toga da li je $\mathbf{b} \in \Re(A)$ i da li je $n - \mathrm{rang}(A) > 0$.

U slučajevima kada je nemoguće naći A^{-1}, ili kada A^{-1} ne postoji, koriste se tzv. *generalisane inverze.*

Moore - Penroseova generalisana inverzija

Definicija 1. Ako je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, onda se matrica $A^{\#}$ koja je definisana sa:

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

$$A^{\#}\mathbf{x} = 0, \text{ ako je } \mathbf{x} \in \hat{A} \tag{3}$$

$$A^{\#}\mathbf{x} = [A|_{\Re(A^*)}]^{-1}\mathbf{x}, \quad \text{ako je} \quad \mathbf{x} \in \Re(A) \tag{4}$$

naziva generalisanom inverzijom matrice A.

Na osnovu prethodne definicije lako se može proveriti da je*):

$$AA^{\#}\mathbf{x} = 0, \ \mathbf{x} \in \Re\left(A\right)^{1} \tag{5}$$

$$AA^{\#}\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Re(A) \tag{6}$$

$$A^{\#}A\mathbf{x} = \mathbf{0}, \quad \mathbf{x} \in \aleph(A) = \Re(A^*)^{\perp} \tag{7}$$

$$A^{\#}A\mathbf{x} = \mathbf{x}, \quad \mathbf{x} \in \Re(A^*) = \Re(A^{\#}) \tag{8}$$

Dakle, može se zaključiti da je $AA^{\#}$ ortogonalni projektor** od C^n na $\Re(A)$, dok je $A^{\#}A$ ortogonalni projektor od C^n na $\Re(A^*) = \Re(A^{\#})$.

Prethodna razmatranja navode na drugu definiciju generalisanih inverzi, koju je dao *Moore* 1935. godine.

Definicija 2. Ako je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, onda je jedinstvena matrica $A^{\#}$ definisana sa:

$$AA^{\#} = P_{\Re(A)} \tag{9a}$$

$$A^{\#}A = P_{\Re(A^{\#})} \tag{9b}$$

generalisana inverzija matrice A.

Sledeću definiciju generalisanih inverzija matrica dao je *Penrose* 1955. godine.

Definicija 3. Ako je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, onda je jedinstvena matrica $A^{\#}$, $A^{\#} \in \mathrm{C}^{n\times m}$ definisana sa:

$$\begin{aligned} &AA^{\#}A = A \\ &A^{\#}AA^{\#} = A^{\#} \\ &\left(AA^{\#}\right)* = AA^{\#} \\ &\left(A^{\#}A\right)* = A^{\#}A \end{aligned} \tag{10}$$

generalisana inverzija matrice A.

Teorema 1. Funkcionalna, *Mooreova* i *Penroseova* definicija generalisanih inverzija su ekvivalentne.

U nastavku se izlažu osnovne osobine generalisanih inverzija.

Osnovne osobine generalisanih inverzija

Stav 1. Ako su $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, $B \in \mathrm{C}^{n\times p}$, onda je:

$$(AB)^{\#} \neq B^{\#}A^{\#} \tag{11}$$

$$(A^{\#})^2 \neq (A^2)^{\#} \tag{12}$$

Teorema 2. Neka je matrica A definisana nad poljem kompleksnih brojeva, $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$.

Tada je:

a) $(A^{\#})^{\#} = A$

b) $(A^{\#})^* = (A^*)^{\perp}$

c) Ako je $\lambda \in \mathrm{C}$, onda je:

$(\lambda \quad A)^{\#} = \lambda^{\ \#} A^{\#}$, gde je $\lambda^{\#} = \dfrac{1}{\lambda}$ ako je $\lambda \neq 0$, i $\lambda^{\#} = 0$ ako je $\lambda = 0$

d) $A^* = A^*AA^{\#} = A^{\#}AA^*$

e) $(A^*A)^{\#} = A^{\#}(A^*)^{\#}$

f) $A^{\#} = (A^{\#}A)^{\#}A^* = A^*(AA^*)$

g) $(UAV)^{\#} = V^*A^{\#}U^*$

Teorema 3. Ako je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, onda je:

a) $\Re(A) = \Re(AA^{\#}) = \Re(AA^*)$

b) $\Re(A^{\#}) = \Re(A^*) = \Re(A^{\#}A) = \Re(A^*A)$

c) $\Re(I - AA^{\#}) = \aleph(AA^{\#}) = \aleph(A^*) = \aleph(A^{\#}) = \Re(A)^{\perp}$

d) $\Re(I - A^{\#}A) = \aleph(A^{\#}A) = \aleph(A) = \Re(A^*)^{\perp}$

Izračunavanje Moore - Penroseove inverzije

Za izračunavanje $A^{\#}$ neke matrice postoji više načina. U ovom poglavlju ćemo se upoznati sa dva najčešće upotrebljavana načina.

Teorema 4. Neka je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, i neka je $\mathrm{rang}(A) = r$. Ako je $\{\mathbf{v}_1, \ \mathbf{v}_2, \ \dots \ \mathbf{v}_r\}$ bazis za prostor vrsta $\Re(A^*)$ i $\{\mathbf{w}_1, \ \mathbf{w}_2, \ \dots \ \mathbf{w}_{n-r}\}$ bazis za preostali nulti prostor $\aleph(A^*)$ matrice A, tada je:

$$A^{\#} = \left[\mathbf{v}_1 \mid \mathbf{v}_2 \mid .. \mid \mathbf{v}_r \mid \mathbf{0} \mid .. \mid \mathbf{0}\right] \left[A\mathbf{v}_1 \mid A\mathbf{v}_2 \mid .. \mid A\mathbf{v}_r \mid \mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid .. \mid \mathbf{w}_{n-r}\right]^{-1}$$

Pre iskaza teoreme za drugi način izračunavanja generalisane inverze neke matrice, daje se jedan stav koji uvek važi:

Stav 2. Ako je $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$ onda postoje matrice $B \in \mathrm{C}^{m\times r}, C \in \mathrm{C}^{r\times n}$ takve da je r=rang(A)=rang(B)= $=\mathrm{rang}(C)$.

Teorema 4. Ako je $A = BC$, gde su $A \in \mathrm{C}^{m\times n}$, $B \in \mathrm{C}^{m\times r}$, $C \in \mathrm{C}^{r\times n}$ i :

$$r = \mathrm{rang}(A) = \mathrm{rang}(B) = \mathrm{rang}(C)\,\mathbf{,}$$

tada je:

$$A^{\#} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*.$$

Često se u literaturi načini izračunavanja generalisanih inverzija na osnovu prethodne dve teoreme daju u vidu algoritama. Prvi algoritam je proistekao iz *Teoreme 3* i on se primenjuje samo u slučajevima ako je matrica čija se generalisana inverzija traži *kvadratna,* dok se drugi algoritam može primenjivati nezavisno od formata matrice.

Algoritam MP1.

Kada je $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, generalisana inverzija $A^{\#}$ se može izračunati po sledećem algoritmu:

*Spisak svih oznaka i neki neophodni izvodi iz linearne algebre dati su u *Dodatku A*

**Izvodi iz teorije projektora dati su u *Dodatku B*

a) Prvo se odredi konjugovano transponovana matrica A^*, pa se tako dobijena matrica elementarnim operacijama nad vrstama svede na *Hermite echalon form**, H_{A^*}.
b) Odrede se, na osnovu matrice H_{A^*}, karakteristične kolone matrice A^*, označavaju se sa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots, \mathbf{v}_r$ i one predstavljaju kolone matrice *L*.
c) Izračuna se matrica AL
d) Izračuna se matrica $I - H_{A^*}$, zatim se određuju njene nenulte kolone koje se označavaju sa $\mathbf{w}_1, \mathbf{w}_2, \ldots, \mathbf{w}_{n-r}$
e) Odredi se matrica M na sledeći način:
$M = \left[AL \mid \mathbf{w}_1 \mid \mathbf{w}_2 \mid \ldots \mid \mathbf{w}_{n-r} \right]$,
pa se zatim izračuna M^{-1}.
e) Formira se matrica R tako što se prvih r vrsta matrice M^{-1} prepišu u istom redosledu kao u matrici M^{-1}.
f) Generalisana inverzija matrice izračunava se na sledeći način:

$$A^{\#} = LR$$

Algoritam MP2.

Za bilo koju matricu $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$, generalisana inverzija $A^{\#}$ može se izračunati po sledećem algoritmu:
a) Matrica A se elementarnim operacijama nad vrstama svede na *row echalon form* E_A
b) Na osnovu matrice E_A odrede se karakteristične kolone matrice *A*, a zatim se one upisuju kao kolone matrice *B* u istom redosledu u kome se pojavljuju matrici *A*
c) Odrede se nenulte vrste matrice E_A, a zatim se one upisuju kao vrste matrice C u istom redosledu u kome se pojavljuju u matrici E_A
d) Izračuna se :

$$(CC^*)^{-1} \quad \text{i} \quad (B^*B)^{-1}$$

e) Generalisana inverza $A^{\#}$ se računa kao:

$$A^{\#} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

Generalisane inverzije proizvoda i sume matrica

Generalisana inverzija proizvoda matrica

Kao što je već ranije bilo napomenuto u opštem slučaju važi da je $(AB)^{\#} \neq B^{\#}A^{\#}$. U nastavku ćemo se pozabaviti pitanjem čemu je jednako $(AB)^{\#}$, kao i uslovima pod kojima važi $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}$.

Dokaze svih Teorema iz prethodnih izlaganja, a koji su izostavljani zbog svoje obimnosti, zainteresovani čitalac može naći u izvornom radu *Campbell (1980b)* ili u lit. *Đurić(1987)*.

Teorema 5. Ako je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ tada je:

$$(AB)^{\#} = (P_{\Re(A^*)}B)^{\#}(A \quad P_{\Re(B)})^{\#} = (A^{\#}AB)^{\#}(ABB^{\#})^{\#} \tag{13}$$

Česti su slučajevi kada je:

$$P_{\Re(A^*)} = I \quad \text{ili} \quad P_{\Re(B)} = I \tag{14}$$

*Videti *Dodatak C*

pa se prethodna formula znatno pojednostavljuje. Takođe, u nekim posebnim slučajevima izrazi za $(AB)^{\#}$ su znatno jednostavniji, što se može videti iz sledećeg:

Posledica 1. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$.
a) Ako je $\text{rang}(A) = n$, tada je:

$$(AB)^{\#} = B^{\#}(AP_{\Re(B)})^{\#} \tag{14}$$

b) Ako je $\text{rang}(B) = n$, tada je:

$$(AB)^{\#} = (P_{\Re(A^*)}B)^{\#}A^{\#} \tag{15}$$

Posledica 2. Neka je $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$ $\text{rang}(A) = \text{rang}(B) = n$.

Tada:

$$(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}, \text{ uz } A^{\#} = A^*(AA^*)^{-1} \text{ i } B^* = (B^*B)^{-1}B^* \tag{16}$$

Na osnovu prethodne teoreme, vrlo lako se može doći do sledeće posledice:

Posledica 3. Ako je:

$$A^*ABB^* = BB^*A^*A \tag{17}$$

tada je:

$$(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#} \tag{18}$$

Teorema 6. Neka su $A \in \mathbb{C}^{m \times n}$ i $B \in \mathbb{C}^{n \times p}$. Sledeći izrazi su ekvivalentni:
a) $(AB)^{\#} = B^{\#}A^{\#}$
b) $\Re(A^*)$ je invarijantni prostor za BB^*, a $\Re(B)$ invarijantni prostor za A^*A
c) $BB^*A^{\#}A$ i $AA^*BB^{\#}$ su ermitovske matrice
d) $A^{\#}ABB^*A^* = BB^*A^*$ i $BB^{\#}A^*AB = A^*AB$

Generalisana inverzija sume matrica

Za regularne matrice *A*, *B* u opštem slučaju, je $(A+B)^{-1} \neq A^{-1} + B^{-1}$. Drugim rečima, ne postoji adekvatan izraz za alternativno izračunavanje $(A+B)^{-1}$, već se prvo izračuna $A+B$, pa se za tako dobijenu matricu traži njena inverzna matrica.

Prethodna razmatranja nas navode na zaključak da se nema mnogo šta reći o $(A+B)^{\#}$. Međutim, postoje neki posebni slučajevi za koje postoje alternativni izrazi za $(A+B)^{\#}$. Jedan od njih je dat u vidu sledeće teoreme, koja direktno proističe iz *Penroseove* definicije generalisane inverzje.

Teorema 7. Neka je $A, B \in \mathbb{C}^{m \times n}$. Izraz:

$$(A+B)^{\#} = A^{\#} + B^{\#} \tag{19}$$

važi ako, i samo ako je:

$$AB^* = 0 \text{ i } BA^* = 0 \tag{20}$$

Uslovi **Teoreme 7** su ekvivalentni uslovima da je $\Re(A^*) \perp \Re(B^*)$ i $\Re(A) \perp \Re(B)$. Jasno je da su ovi uslovi vrlo strogi, tj, da su slučajevi u kojima su ispunjeni uslovi prethodne teoreme retki.

Jasno je dakle, da u nekom opštem slučaju uvek prvo treba izračunati ($A+B$), pa onda za tako dobijenu matricu naći njenu generalisanu inverzu.

Drazinova generalisana inverzija

Drazinova inverzija praktično predstavlja nezaobilazni alat pri rešavanju problema egzistencije i jedinstvenosti kretanja kako kod kontinualnih, tako i kod diskretnih linearnih singularnih sistema. U nastavku će se razmatrati ova inverzija sa čisto matematičkog stanovišta.

Definicija 2. Neka je data kvadratna matrica A čiji su elementi definisani nad poljem kompleksnih brojeva. Tada je indeks matrice A, u oznaci $k = \text{Ind}\ (A)$, najmanji nenegativan broj takav da je:

$$\text{rang}\, A^k = \text{rang}\, A^{k+1} \tag{21}$$

Pokazano je u *Campbell (1980b),* da je uslov dat jed. (21) ekvivalentan sa:

$$\aleph(A^k) = \aleph(A^{k+1}) \Leftrightarrow \quad \Re(A^k) = \Re(A^{k+1}) \tag{22}$$

s obzirom da je:

$$\aleph(A^0) = \{\mathbf{0}\} \subset \aleph(A) \subset \aleph(A^2) \subset \ldots \subset \aleph(A^j) \subset \mathrm{C}^n \tag{23}$$

pri $A^0 = I$.

Jasno je da za svaku nesingularnu matricu A važi $k = \text{Ind}(A) = 0$, kao i da za svaku nilpotentnu matricu N indeksa nilpotentnosti v $(N^v = 0,\ N^v \neq 0)$ važi $k = \text{Ind}(N) = v$.

Sledeća teorema uspostavlja vezu između karakterističnih prostora matrice i indeksa matrice, *Campbell (1980b).*

Teorema 8. Ako je $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, a Ind $(A) = k$, tada su $\Re(A^k)$ i $\aleph(A^k)$ invarijantni prostori matrice A, a takođe je:

$$\mathrm{C}^n = \Re(A^k) \oplus \aleph\left(A^k\right) \tag{24}$$

Definicija 3. Neka je data kvadratna matrica A čiji su elementi definisani nad poljem kompleksnih brojeva. Njena Drazinova inverzija, u oznaci A^D, jeste matrica koja predstavlja *jedinstveno* rešenje sledećih matričnih jednačina:

$$AA^D = A^D A \tag{25}$$

$$A^D A A^D = A^D \tag{26}$$

$$A^{k+1} A^D = A^k \tag{27}$$

Drazinova inverzija matrice uvek postoji i ona je jedinstvena. Alternativno, ako se matrica A napiše u svojoj *Jordanovoj* formi kao:

$$A = T \begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} T^{-1},\ \det T \neq 0, \tag{28}$$

gde je Q_0 regularna, a N nilpotentna matrica sa indeksom nilpotentnosti v, tada je njena Drazinova inverzija data sa:

$$A^D = T \begin{bmatrix} Q_0^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} T^{-1} \tag{29}$$

pri čemu je v najmanji nenegativan broj za koji je $N^v = 0$.

Treba uočiti da, ako je matrica A regularna, tada u jed. (28) nema nilpotentnog bloka N, pa je u tom slučaju $A^D = A^{-1}$.

S druge strane, ako je A nilpotentna matrica, tada u jednačini (28) nedostaje blok Q_0, i tada je $A^D = 0$.

Dokazi narednih teorema ne izlažu se zbog svoje obimnosti i mogu se naći u lit. *Campbell (1980b).*

Teorema 9. Ako je $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, a $\text{Ind}(A) = k$, tada je:

$$A^j (I - AA^D) = 0\ ,\quad j \geq k \tag{30}$$

$$A^j (I - AA^D) \neq 0\ ,\quad j < k \tag{31}$$

Teorema 10. Ako je $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, a 0 je sopstvena vrednost matrice A višestrukosti z_1, tada je 0 sopstvena vrednost matrice A^D iste višestrukosti. Ako je $\lambda \neq 0$ sopstvena vrednost matrice A višestrukosti z_2, tada je λ^{-1} sopstvena vrednost matrice A^D višestrukosti z_2.

Teorema 11. Ako je $A \in \mathrm{C}^{n\times n}$, tada se matrica A^D može izraziti kao polinom po A stepena jednakog ili manjeg od $(n-1)$.

Izračunavanje Drazinove inverzije

Neka je data kvadratna matrica A reda n. Pretpostavimo da je 0 sopstvena vrednost matrice A višestrukosti z, a sopstvene vrednosti matrice A, različite od nule, su λ_i višestrukosti v_i, $i = 1, 2, \ldots, r$. Tada, ako je $m = v_1 + v_2 + \ldots + v_r$, sledi da je $n = z + m$.

Razmotrimo sada polinom stepena $(n-1)$ oblika:

$$p(\lambda) = \lambda^z (p_o + p_1\ \lambda + \ldots + p_{m-1}\ \lambda^{m-1}) \tag{32}$$

Koeficijenti polinoma $p(\lambda)$ se mogu odrediti rešavajući sistem od m jednačina:

$$\begin{aligned} \frac{1}{\lambda_i} &= p\ \ (\lambda_i) \\ -\frac{1}{\lambda_i^{\,2}} &= p'\ \ (\lambda_i) \\ &\vdots \\ \frac{(-1)^{v_i-1}(v_i-1)!}{(\lambda_i)^{v_i}} &= p^{v_i-1}\ \ (\lambda_i) \end{aligned} \tag{33}$$

gde je $p'(\lambda_i) = \dfrac{d\ \ p(\lambda)}{d\lambda}$.

Teorema 12. Ako je $p(\lambda)$ definisano jednačinama (32 i 33), tada je:

$$p(A) = A^D \tag{34}$$

Campbell et al. (1976).

Kao posebna osobina Drazinove inverzije, navode se sledeći rezultati:

$$\aleph(A^k) = \aleph(A^D) \tag{35}$$

$$\Re(A^k) = \Re(A^D) \tag{36}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{x} \in \aleph(A^k) &\Leftrightarrow FF^D\mathbf{x} = \mathbf{0} \\ &\Leftrightarrow \mathbf{x} = (I - AA^D)\mathbf{x} \end{aligned} \tag{37}$$

Za izračunavanje Drazinove inverzije postoji mnogo načina. Dalje se daje algiritam za njeno izračunavanje koji je zasnovan na razmatranjima datom jednačinom (34).

Algoritam D1

Neka je A matrica čiji su elemanti definisani nad poljem kompleksnih brojeva, $A \in \mathbb{C}^{n\times n}$ i neka je $\mathrm{Ind}(A) = k$. Drazinova inverzija A^D može se izračunati na osnovu sledećeg algoritma:

a) Izabere se ceo broj p takav da je $p \geq k$ (uvek se može izabrati da je $p = n$ ako se manja vrednost ne može utvrditi). Ako je $A^p = 0$, onda je $A^D = 0$, pa se u daljem toku algoritma smatra da je $A^p \neq 0$.

b) Matrica A^p se elementarnim operacijama nad vrstama svede na svoju *Hermite echalon form* H_{A^p}.

c) Obeleže se nenulti dijagonalni elementi u matrici H_{A^p}, odaberu se karakteristične kolone matrice A^p koje se označavaju sa $\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, ..., \mathbf{v}_r$ (ove kolone formiraju bazis za $\Re(A^k)$)

d) Formira se matrica $I - H_{A^p}$, označe se njene nenulte kolone kao $\mathbf{v}_{r+1}, \mathbf{v}_{r+2}, ..., \mathbf{v}_n$ (ove kolone predstavljaju bazis za $\aleph(A^k)$).

e) Matrica P se formira na sledeći način:

$$P = \left[\mathbf{v}_1 \;\vdots \cdots \vdots\; \mathbf{v}_r \;\vdots\; \mathbf{v}_{r+1} \;\vdots \cdots \vdots\; \mathbf{v}_n\right]$$

f) Izračuna se P^{-1}

g) Izračuna se proizvod $P^{-1}AP$. Tako dobijena matrica biće u formi:

$$P^{-1}AP = P^{-1}\begin{bmatrix} Q_0 & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix} P$$

gde je Q_0 nesingularna matrica, a N nilpotentna matrica.

h) Izračuna se C^{-1}

h) Izračuna se A^D po sledećoj formuli:

$$A^D = P \begin{bmatrix} C^{-1} & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1}$$

Primena drugog algoritma, koji se zasniva isključivo na primeni jed. (32 i 33), biće ilustrovana kroz primer.

Zaključak

U ovom delu rada izložene su teorijske (matematičke) osnove generalisanih inverzija. U tom smislu su razmotrene Moore - Penroseova i Drazinova inverzija. Radi lakšeg razumevanja izložene materije, u posebnom dodatku data su i četiri numerička primera, dovoljno eklatantna da se ovlada ovde izloženim postupcima.

Dodatak A - Osnovne oznake i neki izvodi iz linearne algebre

Označimo sa R i C skup svih realnih i kompleksnih brojeva, sledstveno.

Sa $\aleph(A)$ i $\Re(A)$ označavaju se nulti prostor (jezgro) i domen ili područje vrednosti operatora F, sledstveno*,tj.:

$$\aleph(A) = \{\mathbf{x}: A\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \forall\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\} \tag{A1}$$

$$\Re(A) = \{\mathbf{y} \in \mathrm{R}^m,\ \mathbf{y} = A\mathbf{x},\ \mathbf{x} \in \mathrm{R}^n\} \tag{A2}$$

pri čemu važi:

$$\dim \aleph(A) + \dim \Re(A) = n \tag{A3}$$

Fundamentalne teoreme linearne algebre

Pravi efekat uvođenja matrice A kao linearne transformacije vidi se iz sledeće dve teoreme.

Teorema A1. Za svaku $m \times n$ matricu mogu se definisati četiri fundamentalna potprostora:

1. $\Re(A^T)$ - prostor vrsta, dimenzije r
2. $\aleph(A)$ - nulti prostor, dimenzije $n - r$
3. $\Re(A)$ - prostor kolona, dimenzije r
4. $\aleph(A^T)$ - preostali nulti prostor, dimenzije $m - r$

$\Re(A^T)$ i $\aleph(A)$ su ortogonalni i određuju prostor $\mathbf{R}^n$;
$\Re(A)$ i $\aleph(A^T)$ su ortogonalni i određuju prostor $\mathbf{R}^m$.

U lit. *Debeljković et al. (1996)* data je grafička interpretacija veze ova četiri fundamentalna prostora.

Teorema A2. Za svaku m x n matricu važi:

$$\aleph(A) = (\Re(A^T))^{\perp},\ \Re(A^T) = (\aleph(A))^{\perp}, \tag{A4}$$

$$\aleph(A^T) = (\Re(A))^{\perp},\ \Re(A) = (\aleph(A^T))^{\perp} \tag{A5}$$

Određivanje potprostora

1. *Prostor vrsta* (*row space*). Dimenzija ovog potprostora je jednaka rangu matrice A. Predstavljen je u prostoru sa svojih r nenultih, linearno nezavisnih vrsta. Ponekad je teško među vrstama date matrice, razabrati one koje su linearno nezavisne, pa je u tom slučaju pogodno transformisati matricu A, korišćenjem elementarnih operacija, na trougaonu formu. Tada se vrlo lako određuje bazis prostora vrsta.
2. *Nulti prostor* (*null space*). Dimenzija ovog potprostora je $(n - r)$. Dobija se rešavanjem sistema jednačina $A\mathbf{x} = \mathbf{0}$. U ovom sistemu će se pojaviti $(n - r)$ slobodnih promenljivih. Tada se redom dodeljuje svakoj slobodnoj promenljivoj vrednost 1, a ostalim 0 i rešava prethodni sistem. Tako se dobija $(n - r)$ vektora koji predstavljaju bazis nultog prostora.
3. *Prostor kolona* (*column space*). Ovaj potprostor predstavlja već pomenuti skup slika $\Re(A)$. Dimenzija ovog prostora je r, a predstavljen je u prostoru pomoću svojih r linearno nezavisnih kolona. Ovde se mora naglasiti da matrica A nema isti prostor kolona kao i njen trougaoni oblik U, ali postoji određena zavisnost. Ako, na primer, prva i treća kolona matrice U razapinju prostor kolona $\Re(U)$, onda će i prva i treća kolona matrice A razapinjati prostor $\Re(A)$
4. *Preostali nulti prostor* (*left null space*). Dimenzija ovog potprostora je $(m - r)$. Dobija se rešavanjem sistema jednačina $A^T\mathbf{y} = \mathbf{0}$, slično kao i nulti prostor.

Za kvadratnu matricu A, reda n, važi jednačina (A3).

*Na engleskom jeziku: Range or Image: $\Re(A)$ = Im(A); Null space or Kernel; $\aleph(A)$ = Ker (A).

Dodatak B - Izvodi iz teorije projektora

U ovom dodatku se izlažu osnove *projektora* koji sami za sebe predstavljaju važnu klasu operatora posebnih osobina. Pored niza značajnih uopštavanja koje nose sa sobom, u prvi plan uvek pada *njihova generalizacija ideje izražavanja trodimenzionalnog vektora preko svojih projekcija na skup koordinatnih osa*, što ima poseban značaj u matričnom računu.

Ovi opereratori su našli značajnu primenu u teoriji singularnih sistema. Oni se najčešće primenjuju u operacijama dekomponovanja prostora, tamo gde je to celishodno.

Posebnu klasu projektora čine tzv. *idempotentni projektori*, tj. operatori koji zadovoljavaju $P = P^2$, gde je P razmatrani operator.

Definicija B1. Neka je prostor S dekomponovan na svoje potprostore S_1 i S_2 tako da je:

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}_1 + \mathbf{x}_2 : \ \mathbf{x}_1 \in S_1 \ , \mathbf{x}_2 \in S_2$$
$$S = S_1 \oplus S_2 \tag{B1}$$

Operator P koji prevodi vektor $\mathbf{x}$ u vektor $\mathbf{x}_1$ zove se *projektor* na S_1 duž S_2. Valja napomenuti da projektor P zavisi i od S_1 i od S_2.

Teorema B1. Projektor je linearni homogeni operator.

Teorema B2. Linearni operator P je projektor ako, i samo ako je on *idempotentan*.

Teorema B3. Ako je P projektor na S_1 duž S_2, onda je $(I-P)$ projektor na S_2 duž S_1.

Teorema 4. Ako je potprostor S_1 invarijantan u odnosu na A, onda je:

$$PAP = AP \tag{B2}$$

za svaki projektor na S_1.

U *singularnim sistemima* dati su potprostori određeni sledećim jednačinama:

$$\Omega = \aleph(I - \hat{E}\hat{E}^D), \quad \Lambda = \aleph(\hat{E}\hat{E}^D)$$

za koje još važi:

$$\Omega = \aleph(I - \hat{E}\hat{E}^D) = \Re(\hat{E}) = \Re(\hat{E}\hat{E}^D)$$
$$\Lambda = \aleph(\hat{E}\hat{E}^D) = \aleph(\hat{E}) = \Re(I - \hat{E}\hat{E}^D)$$

Ovde je $(\hat{E}\hat{E}^D)$ projekcija R^n na potprostor Ω. Štaviše, i $(I - \hat{E}\hat{E}^D)$ je projekcija R^n na potprostor Λ, pa je:

$$\mathrm{R}^n = \Omega \oplus \Lambda$$

tj. n-dimenzionalni prostor je predstavljen drektnom sumom oba potprostora.

Prema tome za projektor P važi:

$$P = \hat{E}\hat{E}^D = (\hat{E}\hat{E}^D)^2$$

što je posebno značajno pri proučavanju singularnih sistema, videti *Debeljković, Drakulić (2001).*

Dodatak C - Posebne matrične strukture

Definicija C1. Matrica je u obliku *row echalon form* ukoliko zadovoljava sledeće uslove:

1. Sve nulte vrste su ispod vrsta sa nenultim elementima
2. Prvi nenulti element u svakoj vrsti javlja se u koloni desno od prvog elementa prethodnih vrsta.

Za matricu u ovoj formi, prvi nenulti element u vrsti se zove pivot, tj. marker za tu vrstu.

Definicija C2. Matrica je u obliku *reduced row echalon form* ako je:

1. u obliku *row echalon form*
2. svaki pivot je jednak 1
3. pivot je *jedini nenulti element* kolone u kojoj se nalazi

Svaka matrica ima svoju jedinstvenu *reduced row echalon form*.

Definicija C3. Matrica, čiji su elementi h_{ij}, u obliku je *hermite echalon form* ako su ispunjeni sledeći uslovi:

1. $h_{ij} = 0$, kada je $i>j$.

2. Elementi matrice h_{ii} su ili 0 ili 1.

3. Ako je $h_{ii} = 0$, tada je $h_{ik} = 0$ za svako k, $1 \le k \le n$.

4. Ako je $h_{ii} = 1$, tada je $h_{ki} = 0$ za svako $k \ne i$.

Svaka matrica ima svoju jedinstvenu *hermite echalon form*.

Dodatak D - Numerički primeri

Primer D1. Odrediti *Moore - Penroseovu* inverziju date matrice, koristeći algoritam *MP1*, *Coćić (2000).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 \\ 2 & 4 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

a) Na osnovu A sledi da je:

$$A^* = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 4 & 6 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

Elementarnim operacijama nad vrstama matrica A^* se svodi na svoju *hermite echalon form*:

$$H_{A^*} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & -1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

b) Prva, druga i četvrta kolona su karakteristične. Matrica L je zbog toga:

$$L = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Sada je:

$$AL = \begin{bmatrix} 22 & 34 & 4 \\ 34 & 56 & 6 \\ 5 & 6 & 1 \\ 4 & 6 & 1 \end{bmatrix}$$

c) Matrica $I - H_{A*}$ je jednaka:

$$I - H_{A*} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

Njena nenulta kolona je:

$$\mathbf{w}_1^T = \begin{bmatrix} -1 & -1/2 & 0 & 0 \end{bmatrix}^T$$

d) Od matrice AL i od nenulte kolone matrice $I - H_{A*}$ formira se matrica M:

$$M = \begin{bmatrix} 22 & 34 & 4 & -1 \\ 34 & 56 & 6 & 1/2 \\ 5 & 6 & 1 & 1 \\ 4 & 6 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

Na osnovu matrice M lako se određuje M^{-1}:

$$M^{-1} = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 40 & -20 & 50 & -90 \\ -19 & 14 & -26 & 18 \\ -46 & -4 & -44 & 342 \\ -40 & 20 & -50 & 0 \end{bmatrix}$$

e) Kako je $\mathrm{rang}(A) = 3$, dobija se:

$$R = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 40 & -20 & 50 & -90 \\ -19 & 14 & -26 & 18 \\ -46 & -4 & -44 & 342 \end{bmatrix}$$

f) Konačno je:

$$A^{\#} = LR = \frac{1}{90}\begin{bmatrix} 1 & 4 & -1 & -27 \\ 2 & 8 & -2 & -54 \\ 20 & -10 & 25 & -45 \\ 0 & 0 & 0 & 45 \end{bmatrix}$$

Sledeći algoritam je opštiji, tj. može se primenjivati i za pravougaone matrice.

Primer D2. Odrediti *Moore - Penroseovu* inverziju date matrice, koristeći algoritam *MP2*, *Coćić (2000).*

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 1 & 4 & 1 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \\ 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 2 & 4 & 0 & 6 & 6 \end{bmatrix}$$

a) Elementarnim operacijama nad vrstama matrica A se svodi na svoju *row echalon form*:

$$E_A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Prva i treća kolona su karakteristične, pa je:

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 0 \\ 1 & 0 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Matrica C se formira od nenultih kolona matrice, pa je:

d) $$C = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & -2 \end{bmatrix}$$

e) Na osnovu B i C lako se određuje B^* i C^*, pa se izračunavanjem dobija:

$$CC^* = \begin{bmatrix} 23 & -3 \\ 3 & 6 \end{bmatrix}, \qquad B^*B = \begin{bmatrix} 10 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(CC^*)^{-1} = \frac{1}{129}\begin{bmatrix} 6 & 3 \\ 3 & 23 \end{bmatrix}$$

$$(B^*B)^{-1} = \frac{1}{9}\begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 10 \end{bmatrix}$$

g) Sada se $A^{\#}$ računa po obrascu:

$$A^{\#} = C^*(CC^*)^{-1}(B^*B)^{-1}B^*$$

Zamenom odgovarajućih vrednosti se dobija:

$$A^{\#} = \frac{1}{1161}\begin{bmatrix} 27 & 6 & 3 & 6 \\ 54 & 12 & 6 & 12 \\ 207 & -40 & -20 & -40 \\ 288 & -22 & -11 & -22 \\ -333 & 98 & 49 & 98 \end{bmatrix}$$

Primer D3. Odrediti *Drazinovu* inverziju date matrice, koristeći formule date jed. (32 i 33), *Coćić (2000).*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 5 & 4 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -3 & -3 \end{bmatrix}$$

Za datu matricu skup njenih sopstvenih vrednosti je:

$$\sigma\ \{A\} = \{0\ ,\ 0\ ,\ 1\ ,\ 1\}$$

Sada se može videti da je $m = 2$, a da je $z = 2$. Na osnovu izložene Teoreme 12, A^D može biti izraženo kao:

$$A^D = p(A) = A^2(d_0 I + d_1 A)$$

gde su d_0 i d_1 rešenja sistema jednačina:

$$I = d_0 + d_1\ , \qquad -I = 2d_0 + 3d_1$$
$$d_0 = 4\ , \qquad d_1 = 3$$

pa je:

$$A^D = A^2(4I - 3A) = \begin{bmatrix} 3 & -1 & 2 & 2 \\ 2 & 1 & 3 & 3 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

Primer D4. Odrediti *Drazinovu* inverziju date matrice, koristeći algoritam D1, *Coćić (2000).*

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix}$$

a) Pošto nije poznat $\mathrm{Ind}(A)$, neka je $p = 3$, pa je:

$$A^3 = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

b) Dalje je:

$$H_{A^3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

c) Na osnovu matrice H_{A^3} bazis za $\Re(A^k)$ je

$$\mathbf{v}_1 = \begin{bmatrix} 8 & -8 & 0 \end{bmatrix}^T$$

d) Sada je:

$$I - H_{A^3} = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

tako da je bazis za $\aleph(A^k)$:

$$\mathbf{v}_2 = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}^T \quad \text{i} \quad \mathbf{v}_3 = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}^T$$

e) Matrica P je:

$$P = \begin{bmatrix} 8 & 0 & 0 \\ -8 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

e) Dalje je:

$$P^{-1} = \frac{1}{8}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 8 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

f) Proizvod matrica $P^{-1}AP$ je jednak:

$$P^{-1}AP = \left[\begin{array}{c|cc} 2 & 0 & 0 \\ \hline 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & -1 \end{array}\right]$$

g) Na osnovu prethodne matrice je:

$$Q_0 = 2, \quad \text{tj.} \quad Q_0^{-1} = \frac{1}{2}$$

h) Konačno je:

$$A^D = P \begin{bmatrix} 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} P^{-1} = \frac{1}{2}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Literatura

[1] BAJIĆ,V.B. *Lyapunov's Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*. ShadesTechnical Publications. Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[2] CAMPBELL,S.L., MEYER,C.D., ROSE,N.J. Application of Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations. *SIAM J. Appl. Math.*, 1976, vol.31, p.411-425.

[3] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman, Marshfield, Mass., 1980a.

[4] CAMPBELL,S.L., MAYER,D.JR. *Generalized Inverses of Linear Transformation*. Pitman, London, 1980b.

[5] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations II*. Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[6] COĆIĆ,A. *Primena generalisanih Inverza u teoriji singularnih sistema.* Diplomski rad, Mašinski fakultet, Beograd, 2000.

[7] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue on Semistate Systems, 1986, vol.5, no.1.

[8] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, 1989, vo.8, no.3.

[9] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*, MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic, 1996a.

[10] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Continuous Singular Control Systems.* GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[11] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A. *Discrete Singular Control Systems.* GIP Kultura, Beograd, 1998.

[12] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., DRAKULIĆ,V. Stabilnost linearnih autonomnih singularnih sistema u smislu Ljapunova: Retrospektiva rezultata. Naučnotehnički pregled, (YU), 2001. (u štampi).

[13] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., JOVANOVIĆ,M.B., DRAKULIĆ,V. Stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova: Retrospektiva rezultata", Naučnotehnički pregled, (YU), 2001 (u štampi).

[14] ĐURIĆ,V.M. *Generalisani inverzi i primene.* Magistarska teza, Univerzitet u Nišu, Filozofski fakultet, Niš, 1987.

[15] LAZAREVIĆ,P.M., DEBELJKOVIĆ,LJ.D., JOVANOVIĆ,M.B. i dr. Optimalno upravljanje singularnim sistemima sa čistim vremenskim kašnjenjem", Naučnotehnički pregled, (YU) (2001), (u štampi).

[16] LEWIS,F.L. A Survey of Linear Singular Systems. *Circ. Syst. Sig. Proc.*, 1986, vol.5, no.1, p.3-36.

[17] LEWIS,F.L. *Recent Work in Singular Systems.* Proc. Int. Symp. on Sing. Syst., Atlanta, GA 1987, p.20.24.

[18] PAVKOVIĆ,M.B. *Primena generalisanih Inverzija u dinamičkoj analizi singularnih sistema,* Mašinski fakultet, Beograd, 1998.

Rad primljen: 22.5.2001.god.