UDK: 621.833.6(047)=861
COSATI: 13-09,13-06

Planetarni prenosnici s rasterećenim nosačem satelita

Dr Milorad Radetić,dipl.inž. 1)

Obrađene su kinematika i dinamika posebne grupe planetarnih prenosnika kojima nosač satelita služi samo za uležištenje satelita i ne prenosi obrtni moment. Opisana je nova metoda pomoću koje se olakšava i skraćuje postupak kinematske i dinamičke analize ovog tipa prenosnika.

Ključne reči: **Planetarni prenosnik, rasterećeni nosač satelita, nova metoda, kinematska analiza, dinamička analiza.**

Uvod

POSEBNU grupu planetarnih prenosnika čine prenosnici koji kao osnovne elemente imaju tri centralna zupčanika, od kojih je jedan nepokretan, dok nosač satelita služi samo za uležištenje satelita i nije izložen uticaju spoljašnjih momenata. Ovi prenosnici, zbog svoja tri centralna zupčanika, poznati su u literaturi i pod nazivom 3K prenosnici [1].

Prenosioci mogu da budu s jednim, dva ili više satelita na jednoj osovini, kao i sa parnim satelitima.

Najčešće se komponuju od cilindričnih zupčanika sa spoljašnjim i unutrašnjim ozubljenjem, ređe samo sa zupčanicima sa spoljašnjim ozubljenjem. U drugom slučaju gabariti takvih prenosnika su znatno veći, a stepen korisnosti niži.

U realizaciji ovih prenosnika mogu da se koriste i konični zupčanici. Međutim, složenija tehnologija izrade ovih zupčanika i zahtev da se pri zameni jednog zupčanika zamenjuju i zupčanici koji se nalaze s njim u zahvatu, čine njihovu primenu neracionalnom i pogrešnom.

Sa ovim tipom planetarnih prenosnika mogu da se ostvare, uz male gabarite, veoma veliki prenosni odnosi, dok je u slučaju reduktora njihova vrednost limitirana mogućnošću pojave samokočenja.

Kako ovaj tip planetarnih prenosnika nije dovoljno proučen u literaturi, u radu je obrađena kinematika i dinamika više tipova ovakvih prenosnika. Za ove potrebe razvijena je i posebna metoda kojom se znatno pojednostavljuje postu-pak pri analizi i najsloženijih prenosnika ovoga tipa.

Kinematika i dinamika planetarnih prenosnika s rasterećenim nosačem satelita

Pre nego se pređe na analizu kinematike ovog tipa planetarnih prenosnika, podsetićemo se na neke osnovne izraze iz opšte teorije kinematike planetarnih prenosnika, koji su neophodni za proučavanje kinematike i dinamike ovog tipa planetarnih prenosnika.

Prenosni odnos dva zupčanika “a” i “b”, koji se nalaze u zahvatu, određuje se prema poznatom izrazu:

$$i_{ab} = \frac{\omega_a}{\omega_b}, \text{ odnosno } i_{ba} = \frac{\omega_b}{\omega_a}$$

gde su:

ω_a, ω_b - ugaone brzine zupčanika ″a″ (z_a), odnosno ″b″ (z_b),

i_{ab}, i_{ba} - prenosni odnos kada se prenos vrši od zupčanika ″a″ na zupčanik ″b″, odnosno od zupčanika ″b″ na zupčanik ″a″.

Na osnovu prethodnih izraza, jednostavno se dobijaju sledeće relacije:

$$i_{ab} = \frac{1}{i_{ba}}, \text{ odnosno } i_{ba} = \frac{1}{i_{ab}} \tag{1}$$

Za kinematsku analizu je potrebno poznavanje funkcionalne veze između ugaonih brzina elemenata.

Ako planetarni prenosnik ima tri osnovna elementa označena kao ″a″, ″b″ i ″c″, koji se obrću odgovarajućim ugaonim brzinama ω_a, ω_b i ω_c, ugaone brzine elemenata “a“ i “b“ u odnosu na “c“ izražavaju se pomoću izraza ω_a - ω_c i ω_b- ω_c. Pomoću ovih izraza i izraza za prenosni odnos, odnosi ugaonih brzina elemenata “a“ i “c“ u odnosu na “b“, i “a“ i “b“ u odnosu na “c“, mogu da se definišu sledećim izrazima:

$$\frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_c - \omega_b} = i_{ac}^{b} \tag{2}$$

$$\frac{\omega_a - \omega_c}{\omega_b - \omega_c} = i_{ab}^{c} \tag{3}$$

gde je:

i^b_{ac}, i^c_{ab} - relativni prenosni odnos između elemenata “a“ i “c“ u odnosu na element “b“, odnosno između “a“ i “b“ u odnosu na “c“.

Sređivanjem (2) i (3) dobija se jednačina veze između prenosnih odnosa:

$$i_{ab}^{c} + i_{ac}^{b} = 1, \text{ odnosno } i_{ab}^{c} = 1 - i_{ac}^{b} \tag{4}$$

1) Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

Jednačina (4) ima širu primenu u kinematici planetarnih prenosnika. Na osnovu izraza (2), (3) i (4) dolazi se do izraza za određivanje ugaone brzine jednog od osnovnih elemenata, ako su poznate ugaone brzine i relativni prenosni odnosi druga dva elementa. Tako se na osnovu (2) i (4) dobija sledeći izraz:

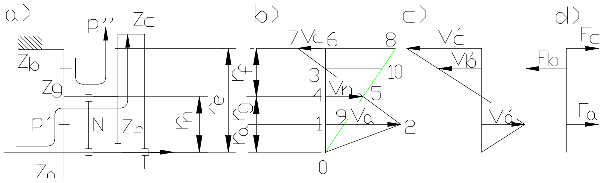
$$\omega_a = i^c_{ab}\omega_b + i^b_{ac}\omega_c$$

Ovaj izraz se lako pamti po tome što se u donjem indeksu kod prenosnih odnosa sa desne strane izraza, kao prva nalazi ista oznaka kao uz ugaonu brzinu sa leve strane izraza (a), a drugi član istog indeksa je isti kao i indeks uz ugaonu brzinu sa kojom se množi taj član (b), odnosno (c), dok se oznaka trećeg člana nalazi kao element (c), odnosno (b).

Za kinematsku analizu planetarnih prenosnika s rasterećenim nosačem satelita, kao i kod drugih planetarnih prenosnika, mogu da se primene sledeće metode: *analitička, grafička (odnosno geometrijska) i energetska.*

Međutim, u ovom slučaju se problem usložnjava jer se radi o složenim planetarnim prenosnicima, koji najčešće mogu da se posmatraju kao da su nastali sintezom dva jednoreda planetarna prenosnika.

Da bi se lakše uočile prednosti određene metode, sve tri metode su primenjene na jednom istom planetarnom prenosniku, čija je kinematska šema data na sl.1a.



Slika 1. Planetarni prenosnik sa slobodnim (rasterećenim) nosačem satelita: a– kinematska šema, b– plan brzina, c– plan relativnih brzina u odnosu na nosač satelita kada je zaustavljen, d– plan sila koje opterećuju osnovne elemente

Prikazani prenosnik može da se smatra dvoredi s nepotpunim drugim planetarnim redom s tri centralna zupčanika z_a, z_b i z_c, od kojih je z_b nepokretan.

Korišćenjem analitičke metode prenosni odnos planetarnog prenosnika (i^b_{ac}) može da se odrediti kao odnos relativnih ugaonih brzina:

$$i^b_{ac} = \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_c - \omega_b} \tag{5}$$

Ako se izraz (5) pomnoži sa izrazom $\frac{\omega_N - \omega_b}{\omega_N - \omega_b}$, vrednost se ne menja i dobija se sledeći izraz:

$$i^b_{ac} = \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_c - \omega_b}\frac{\omega_N - \omega_b}{\omega_N - \omega_b} = \frac{\omega_a - \omega_b}{\omega_N - \omega_b}\frac{\omega_N - \omega_b}{\omega_c - \omega_b} = i^b_{aN} i^b_{Nc} \tag{6}$$

gde su:

ω_a, ω_b, ω_c, ω_N - ugaone brzine zupčanika z_a, z_b, z_c i nosača satelita N

i^b_{aN} - prenosni odnos od zupčanika z_a do nosača satelita N, pri nepokretnom zupčaniku z_b,

i^b_{Nc} - prenosni odnos od nosača satelita do zupčanika z_c pri nepokretnom zupčaniku z_b.

Na ovaj način rastavljen je složeni planetarni prenosnik na dva jednoreda planetarna prenosnika. Daljom se transformacijom izraza (5) pomoću transformacija (1) i (4) dobija:

$$i^b_{ac} = \frac{i^b_{aN}}{i^b_{cN}} = \frac{1 - i^N_{ab}}{1 - i^N_{cb}}$$

gde su:

i^N_{ab}, i^N_{cb} - prenosni odnos od zupčanika z_a do zupčanika z_b, odnosno od zupčanika z_c do zupčanika z_b, pri nepokretnom nosaču satelita (N).

Na osnovu sl.1a mogu da se odrede parcijalni prenosni odnosi:

$$i^N_{ab} = -\frac{z_g}{z_a}\frac{z_b}{z_g} = -\frac{z_b}{z_a}$$

$$i^N_{cb} = \frac{z_f}{z_c}\frac{z_b}{z_g}$$

Smenom ovih izraza u izrazu za i^b_{ac} dobija se:

$$i^b_{ac} = \frac{z_c z_g \left(z_a + z_b\right)}{z_a\left(z_c z_g - z_f z_b\right)} \tag{7}$$

Prenosni odnosi i^N_{ab} i i^N_{cb} mogu da se izraze pomoću ugaonih brzina:

$$i^N_{ab} = \frac{\omega_a - \omega_N}{\omega_b - \omega_N} = -\frac{z_b}{z_a}$$

$$i^N_{cb} = \frac{\omega_c - \omega_N}{\omega_b - \omega_N} = \frac{z_f z_b}{z_c z_g}$$

Daljim se transformacijama i smenama dobiju izrazi za ugaone brzine ω_N i ω_c:

$$\omega_N = \frac{\omega_a}{1 + \frac{z_b}{z_a}}; \omega_c = \omega_a \frac{1 - \frac{z_f z_b}{z_c z_g}}{1 + \frac{z_b}{z_a}}$$

Da bi se primenila grafička metoda za određivanje prenosnih odnosa i ugaonih brzina, potrebno je da se grafički prikaže plan obimnih brzina planetarnog prenosnika. Kod crtanja ovoga plana, najčešće se polazi od brzine pogonskog elementa, a može i od bilo kog drugog elementa, čija se brzina zna ili može da se pretpostavi. Međutim, pravilo je da se počinje s brzinom onog elementa, koji je u direktnoj kinematskoj vezi s nepokretnim elementom. Na vertikalnu osu se nanose kinematski poluprečnici zupčanika (r_a, r_b, r_g…), umesto kojih se češće koriste brojevi zubaca (z_a, z_b, z_g…), jer su najčešće moduli zupčanika isti, a na horizontalnu osu njihove obimne brzine u određenoj razmeri.

Na sl.1 se vidi da je pogonski element zupčanik z_a preko satelita z_g u direktnoj vezi s nepokretnim zupčanikom z_b, tako da formiranje plana brzina treba početi brzinom zupčanika z_a. Iz tačke 1, koja odgovara poluprečniku r_a, horizontalno se nanosi obimna brzina v_a u izabranoj razmeri (zrak 1-2). Spajanjem tačke 2 i 0, dobija se trougao 0,1,2 koji predstavlja promenu obimne brzine v_a, zupčanika z_a, u funkciji poluprečnika. Zrak 1-2 istovremeno predstavlja obi-mnu brzinu satelita z_g, koji je u sprezi sa zupčanikom z_a. Pošto je zupčanik z_a preko satelita z_g u neposrednoj vezi s nepokretnim zupčanikom z_b, spaja se tačka 2 s tačkom 3, koja leži na vertikalnoj osi (pošto je obimna brzina zupčanika z_b jednaka nuli) i odgovara poluprečniku r_b. Trougao 1,2,3 predstavlja plan brzina satelita z_g. Ose satelita z_g i z_f imaju istu obimnu brzinu kao i nosač satelita.

Kada se iz tačke 4, koja odgovara rastojanju ose satelita z_g i z_f od ose planetarnog prenosnika, povuče horizontalna linija, ona seče zrak 2-3 u tački 5. Odsečak 4-5 predstavlja intenzitet obimne brzine nosača satelita. Produženjem zraka 2-3 do preseka s horizontalom povučenom iz tačke 6 dobija se tačka 7. Odsečak 6-7 odgovara obimnoj brzini gonjenog elementa z_c. Ako se spoje tačke 0 i 5, dobija se trougao 4,5,0 koji predstavlja plan brzina nosača satelita. Produženjem ovog zraka do preseka s horizontalom povučenom iz tačke 6, dobija se tačka 8. Trougao 0,6,8 predstavlja plan redukovanih brzina nosača satelita. Zrak 0-8 seče zrak 1-2 u tački 9.

Uočava se da su trouglovi 9,2,5 i 3,10,5 podudarni. Na osnovu podudarnosti sledi da je stranica 9-2 jednaka stranici 3-7. Ako se ova jednakost izrazi preko obimnih brzina, dobija se:

$$\omega_N z_b = (\omega_a - \omega_N) z_a \tag{8}$$

Na osnovu sličnosti trouglova 3,6,7 i 3,4,5 dobija se:

$$\frac{\omega_c z_c}{\omega_N (z_c - z_f)} = \frac{z_f - z_g}{z_g} \tag{9}$$

Eliminisanjem ω_N iz izraza (8) i (9) dobija se izraz za kinematski prenosni odnos planetarnog prenosnika:

$$i_{ac}^{b} = \frac{-\omega_a}{\omega_c} = \frac{z_c z_g (z_a + z_b)}{z_a (z_c z_g - z_f z_b)}$$

što je identično izrazu (7).

Za energetsku metodu potrebno je nacrtati plan sila, kao i plan brzina za slučaj kada se za sve elemente nopiše ugaona brzina jednaka ugaonoj brzini nosača satelita ali suprotnog smera, tj. za slučaj kada je nosač satelita nepokretan. Planovi brzina i sila su potrebni radi određivanja tokova snage.

U opštem slučaju, kod ovih tipova prenosnika, pošto postoje tri centralna zupčanika, mogu nastati dva slučaja:

- da je jedan od njih pogonski a druga dva gonjena, ili
- da su dva pogonska a jedan gonjeni.

Postojanje dva gonjena zupčanika, odnosno dva pogonska ukazuje da se postojeći planetarni prenosnik sastoji od dva jednostavna planetarna prenosnika. U prvom slučaju, veza između prenosnika je redna, a u drugom paralelna.

Osnovna dinamička jednačina glasi da je suma spoljašnjih momenata, koji deluju na centralne zupčanike, jednaka nuli:

$$M_a + M_b + M_c = 0 \tag{10}$$

gde su M_a, M_b i M_c spoljašnji momenti koji deluju na centralne zupčanike. Zatim se, na osnovu sila i brzina, određuju tokovi snage da bi se utvrdilo da li prenosnik ima jedan ili dva pogonska elementa. U slučaju kada ima dva gonjena elementa, moment na pogonskom elementu se razlaže na dva momenta čiji je zbir jednak momentu pogonskog elementa. U slučaju dva pogonska (z_a i z_c) i jednog gonjenog elementa (z_b), moment na gonjenom elementu razlaže se na dva momenta:

$$M_b = M_b' + M_b'' \tag{11}$$

gde su:

M_b' - moment koji se prenosi od zupčanika z_a na zupčanik z_b,

M_b'' - moment koji se prenosi od zupčanika z_c na zupčanik z_b.

Tako određen moment unosi se u (10) i definiše se dinamički prenosni odnos kao odnos momenata na pogonskom i gonjenom zupčaniku.

U ovom slučaju je:

$$i_{ac(D)}^{b} = \frac{-M_c}{M_a} \eta_{ac}^{b} \tag{12}$$

Ako je η^b_{ac}=1, dobija se izraz za kinematski prenosni odnos:

$$i_{ac(K)}^{b} = \frac{M_c}{M_a} \tag{13}$$

Dinamički prenosni odnos može da se odredi rešavanjem dve jednačine [2]. Prvu čini jednačina (10), a drugu momentna jednačina svih sila za osu satelita. Rešavanjem ove dve jednačine se dobija dinamički prenosni odnos planetarnog prenosnika, a smenom η^b_{ac}=1 se dobija izraz za kinematski prenosni odnos.

Primenimo ovo na planetarni prenosnik dat na sl.1. Na osnovu planova sila i obimnih brzina (sl.1c i d) se vidi da su zupčanici z_a i z_b pogonski (smerovi obimnih brzina i obimnih sila isti), a zupčanik z_c gonjeni (smerovi obimne brzine i obimne sile suprotni). Tok snage, dobijen na osnovu ovoga, prikazan je na sl.1 isprekidanom linijom. Na osnovu toka snage se vidi da zupčanik z_c dobija snagu od zupčanika z_a (P') i zupčanika z_b (P'').

Ako se napiše momentna jednačina za osu planetarnog prenosnika 0, dobija se:

$$F_a r_a - F_b r_b + F_c r_c = 0$$

odnosno:

$$M_a - M_b + M_c = 0 \tag{14}$$

Kako je z_c gonjeni element biće:

$$M_c = M_c' + M_c'' \tag{15}$$

gde je:

M_c' - moment koji se od zupčanika z_a prenosi na zupčanik z_c, pri nepokretnom nosaču satelita (N):

$$M_c' = M_a \frac{z_g z_c}{z_a z_f} \eta_{ca}^{N} \tag{16}$$

M_c'' - moment koji se od zupčanika z_b prenosi na zupčanik z_c, pri nepokretnom nosaču satelita:

$$M_c'' = M_b \frac{z_g z_c}{z_b z_f} \eta_{bc}^{N} \tag{17}$$

η^N_{ca} - stepen korisnosti prenosa snage od zupčanika z_c do zupčanika z_a, pri nepokretnom nosaču satelita,

η^N_{bc} - stepen korisnosti prenosa snage od zupčanika z_c do zupčanika z_a, pri nepokretnom nosaču satelita

Kada se pomoću izraza (16) i (17) izvrši smena u (15), pa zatim u (14), dobija se konačan izraz za dinamički prenosni odnos planetarnog prenosnika:

$$i^b_{ac(D)} = \frac{-M_c}{M_a} = \frac{1 - i^N_{ab}\dfrac{\eta^N_{ac}}{\eta^N_{bc}}}{1 - \dfrac{i^N_{cb}}{\eta^N_{bc}}} = \frac{1 + \dfrac{z_b}{z_a}\dfrac{\eta^N_{ac}}{\eta^N_{bc}}}{1 - \dfrac{z_f z_b}{z_c z_g}\dfrac{1}{\eta^N_{bc}}} \tag{18}$$

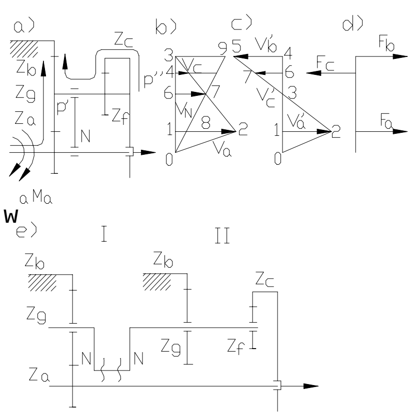
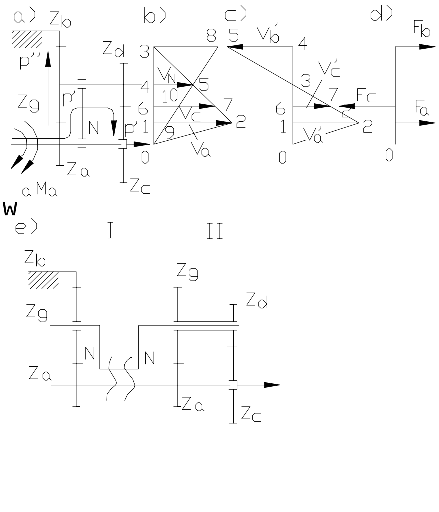
Kada se u izrazu (18) napiše da je $\eta^N_{ac}=\eta^N_{bc}=1$, dobija se izraz za kinematski prenosni odnos. U slučaju kada su poznati kinematski i dinamički prenosni odnosi, ugaona brzina i obrtni moment pogonskog elementa z_a, kao i dimenzije zupčanika, jednostavno je da se odrede ugaone brzine i obrtni momenti ostalih elemenata. Isto tako, lako je odrediti ukupni stepen korisnosti prenosnika korišćenjem poznatog izraza:

$$\eta^b_{ac} = \frac{i^b_{ac(D)}}{i^b_{ac(K)}} = i^b_{ac(D)}\left(i^b_{ac(K)}\right)^{-1} \tag{19}$$

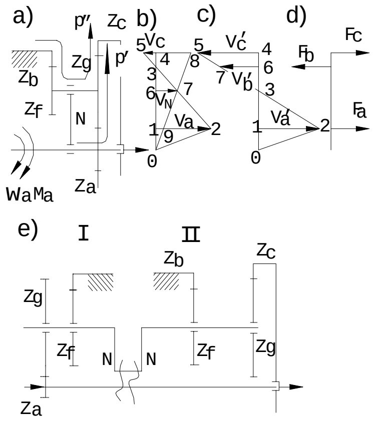
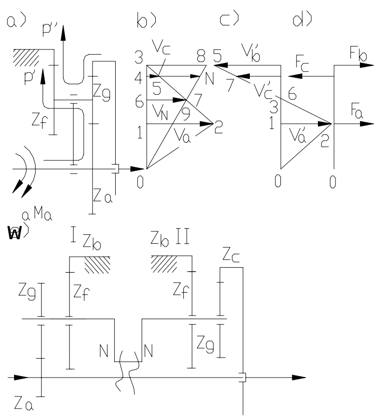
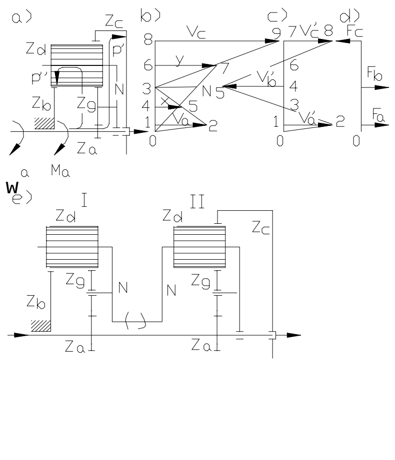
Do istih izraza za prenosni odnos se dolazi, ako se pored jednačine (14) postavi momentna jednačina spoljašnjih sila za osu satelita [2]. Rešavanjem ove dve jednačine mogu da se odrede kinematski i dinamički prenosni odnos i ukupni stepen korisnosti prenosnika.

Tabela 1 sadrži osam kinematskih stanja ovog tipa prenosnika (a), planove obimnih brzina elemenata (b), planove brzina pri zaustavljenom nosaču satelita (c), plan obimnih sila (d), kinematsku šemu raščlanjenog prenosnika na dva prosta (e) i izvedene izraze za kinematski (20) i (21) i dinamički prenosni odnos (25).

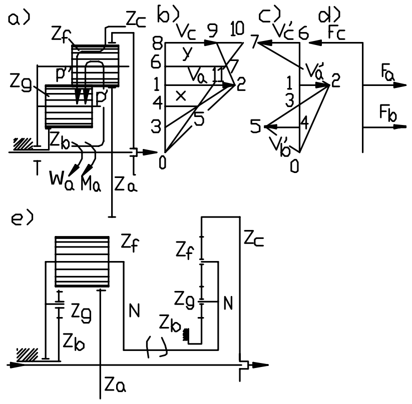
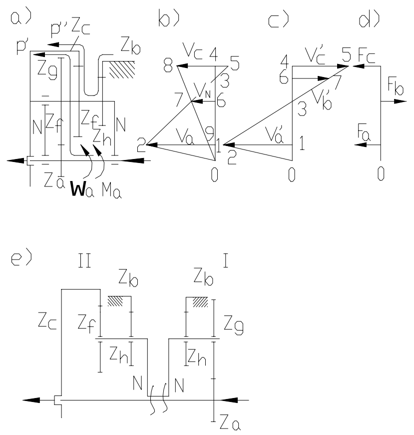
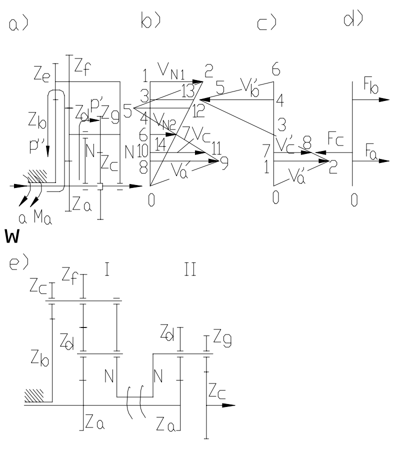
Tabela 1.

br.	Kinematske šeme prenosnika		Izrazi za proračun osnovnih kinematskih i dinamičkih parametara
1		analitička metoda	$i^b_{ac} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = i^b_{aN}i^b_{Nc} = \frac{1-i^N_{ab}}{1-i^N_{cb}}$ (20) $i^N_{ab} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{z_b}{z_a}$; $i^N_{cb} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{z_f z_b}{z_c z_g}$; $i^N_{ac} = \frac{\omega_a}{\omega_c}$ $i_K = i^b_{ac} = \frac{z_c z_g (z_a+z_b)}{z_a(z_c z_g - z_f z_b)}$ $i^b_{ac} = \frac{\omega_a}{\omega_c}$; $i^b_{aN} = \frac{\omega_a}{\omega_N} = 1 - i^N_{ab}$
		grafička metoda	$\Delta 8,2,7 \cong \Delta 3,9,7$ i $\Delta 4,5,3 \approx \Delta 3,6,7 \Rightarrow$ $\omega_N z_b = (\omega_a - \omega_N) z_a$ (22) $\Rightarrow \omega_N = \omega_a\left(\frac{z_a}{z_a+z_b}\right)$ $\frac{\omega_c z_c}{\omega_N (z_a+z_g)} = \frac{z_g - z_f}{z_g}$ (23)
		energetska metoda	$M_a - M_c + M_b = 0$ (24) $M_b = M'_b + M''_b = M_a \frac{z_b}{z_a}\eta^N_{ab} + M_c \frac{z_f z_b}{z_c z_g}\eta^N_{cb}$ $i_D = \frac{M_c}{M_a} = \frac{z_c z_g (z_a+z_b)\eta^N_{ab}}{z_a(z_c z_g - z_f z_b)\eta^N_{cb}}$ (25)
2		analitička metoda	$i^b_{ac} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = i^b_{aN}i^b_{Nc} = \frac{1-i^N_{ab}}{1-i^N_{cb}}$ (20) $i^N_{ab} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{z_b}{z_a}$; $i^N_{cb} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = -\frac{z_d z_b}{z_c z_g}$; $i^N_{ac} = \frac{\omega_a}{\omega_c}$ $i_K = i^b_{ac} = \frac{z_c z_g (z_a+z_b)}{z_a(z_a z_g + z_d z_b)}$ (21) $i^b_{ac} = \frac{\omega_a}{\omega_c}$; $i^b_{aN} = \frac{\omega_a}{\omega_N} = 1 - i^N_{ab}$
		grafička metoda	$\Delta 9,2,5 \cong \Delta 5,3,8$ i $\Delta 10,5,7 \approx \Delta 9,5,2 \Rightarrow$ $\omega_N z_b = (\omega_a - \omega_N) z_a$ (22) $\Rightarrow \omega_N = \omega_a\left(\frac{z_a}{z_a+z_b}\right)$ $\frac{(\omega_c - \omega_N) z_c}{(\omega_a - \omega_N) z_a} = \frac{z_d}{z_g}$ (23)
		energetska metoda	$M_a + M_b - M_c = 0$ (24) $M_a = M'_a + M''_a = M_b \frac{z_a}{z_b\eta^N_{ab}} + M_c \frac{z_a z_d}{z_g z_c}\eta^N_{ca}$ $i_D = \frac{-M_c}{M_a} = \frac{z_g z_c (z_a + z_b\eta^N_{ab})}{z_a(z_g z_c + z_b z_d)\eta^N_{ca}\eta^N_{ab}}$ (25)

nastavak tabele 1

3		analitička metoda	$i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=i_{aN}^{b}i_{Nc}^{b}=\frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$ (20) $i_{ab}^{N}=\frac{\omega_a}{\omega_b}=-\frac{z_b z_g}{z_a z_f};\; i_{cb}^{N}=\frac{\omega_c}{\omega_b}=\frac{z_g z_b}{z_c z_f};\; i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b}=1-i_{ab}^{N}$ $i_K=i_{ac}^{b}=\frac{z_c\left(z_a z_f+z_b z_g\right)}{z_a\left(z_c z_f-z_g z_b\right)}$ (21)
		graf. mtoda	$\Delta 7,8,5\cong\Delta 7,9,2$ *i* $\Delta 3,4,5\approx\Delta 3,6,7\Rightarrow$ $(\omega_c+\omega_N)z_c=(\omega_a-\omega_N)z_a$ (22) $\frac{\omega_c z_c}{\omega_N\left(z_a+z_g\right)}=\frac{z_g-z_f}{z_f}$ (23)
		energetska mettoda	$M_a-M_b+M_c=0$ (24) $M_c=M_c^{`}+M_c^{``}=M_a\frac{z_b}{z_a}\eta_{ac}^{N}+M_b\frac{z_f z_c}{z_b z_g}\eta_{bc}^{N}$ $i_D=\frac{-M_c}{M_a}=\frac{z_c\left(z_a z_f\eta_{bc}^{N}+z_b z_g\eta_{ac}^{N}\right)}{z_a\left(z_f z_c\eta_{bc}^{N}-z_b z_g\right)}$ (25)
4		analitička metoda	$i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=i_{aN}^{b}i_{Nc}^{b}=\frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$(20) $i_{ab}^{N}=\frac{\omega_a}{\omega_b}=-\frac{z_b z_g}{z_a z_f};\; i_{cb}^{N}=\frac{\omega_c}{\omega_b}=\frac{z_g z_b}{z_c z_f};\; i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b}=1-i_{ab}^{N}$ $i_K=i_{ac}^{b}=\frac{z_c\left(z_a z_f+z_b z_g\right)}{z_a\left(z_c z_f-z_g z_b\right)}$ (21)
		graf. mtoda	$\Delta 7,5,11\cong\Delta 9,2,7$ *i* $\Delta 6,7,3\approx\Delta 1,2,3\Rightarrow$ $(\omega_c+\omega_N)z_c=(\omega_a-\omega_N)z_a$ (22) $\frac{\omega_N\left(z_a+z_g\right)}{\omega_a z_a}=\frac{z_f}{zg+z_f}$ (23)
		energetska metoda	$M_a-M_b+M_c=0$ (24) $M_c=M_c^{`}+M_c^{``}=M_a\frac{z_g z_b}{z_a z_f}\eta_{ac}^{N}+M_b\frac{z_f z_c}{z_b z_g}\eta_{bc}^{N}$ $i_D=\frac{M_c}{M_a}=\frac{z_c\left(z_a z_f\eta_{bc}^{N}+z_b z_g\eta_{ac}^{N}\right)}{z_a\left(z_f z_c\eta_{bc}^{N}-z_b z_g\right)}$ (25)
5		analitička metoda	$i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=\frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b}=i_{aN}^{b}i_{Nc}^{b}=\frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$(20) $i_{ab}^{N}=\frac{\omega_a}{\omega_b}=-\frac{z_b}{z_a};\; i_{cb}^{N}=\frac{\omega_c}{\omega_b}=\frac{-z_b}{z_c};\; i_{ac}^{b}=\frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b}=\frac{\omega_c}{\omega_b}=1-i_{ab}^{N}$ $i_k=i_{ac}^{b}=\frac{z_c(z_a+z_b)}{z_a(z_c+z_b)}$ (21)
		graf. mtoda	$\Delta 10,2,5\cong\Delta 5,11,3$ *i* $\Delta 3,8,9\approx\Delta 3,6,7\Rightarrow$ $\omega_N z_b=(\omega_a-\omega_N)z_a$ (22) $\frac{\omega_c z_c}{\omega_N\left(z_b+z_d\right)}=\frac{z_d}{2z_d}$ (23)
		energet. mtoda	$M_a+M_b-M_c=0$ (24) $M_a=M_a^{`}+M_a^{``}=M_c\frac{z_a}{z_c}\eta_{ca}^{N}+M_b\frac{z_a}{z_b}\eta_{ba}^{N}$ $i_D=\frac{M_c}{M_a}=\frac{z_c\left(z_a\eta_{ba}^{N}+z_b\right)}{z_a\left(z_c\eta_{ba}^{N}+z_b\eta_{ca}^{N}\right)}$ (25)

nastavak tabele 1

6		analitička metoda	$i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\,\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = i_{aN}^{b}\, i_{Nc}^{b} = \frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$ (20) $i_{ab}^{N} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{z_b}{z_a};\; i_{cb}^{N} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{z_b}{z_c};\; i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b} = 1-i_{ab}^{N}$ $i_K = i_{ac}^{b} = \frac{z_c(z_a+z_b)}{z_a(z_c-z_b)}$ (21)
		graf.metoda	$\Delta 7,9,10 \cong \Delta 7,2,11 \;\; i \;\; \Delta 1,2,3 \approx \Delta 4,5,3 \Rightarrow$ $(\omega_N-\omega_c)z_c = (\omega_a-\omega_N)z_a$ (22) $\frac{\omega_a z_a}{\omega_N(z_b+z_a)} = \frac{2z_g}{zg}$ (23)
		energetska metoda	$M_a+M_b-M_c=0$ (24) $M_b = M_b^{`} + M_b^{``} = M_a\frac{z_b}{z_a}\eta_{ab}^{N} + M_c\frac{z_b}{z_c}\eta_{ca}^{N}$ $i_D = \frac{M_c}{M_a} = \frac{z_c\left(z_a+z_b\eta_{ab}^{N}\right)}{z_a\left(z_c-z_b\eta_{ca}^{N}\right)}$ (25)
7		analitička metoda	$i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\,\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = i_{aN}^{b}\, i_{Nc}^{b} = \frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$ (20) $i_{ab}^{N} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{z_b z_g}{z_a z_h};\; i_{cb}^{N} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = \frac{z_f z_b}{z_c z_h};\; i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b} = 1-i_{ab}^{N}$ $i_K = i_{ac}^{b} = \frac{z_c\left(z_a z_h+z_b z_g\right)}{z_a\left(z_c z_h-z_f z_b\right)}$ (21)
		graf. metoda	$\Delta 1,2,3 \approx \Delta 3,7,6 \;\; i \;\; \Delta 3,4,5 \approx \Delta 3,6,7 \Rightarrow$ $\frac{\omega_a z_a}{\omega_N(z_a+z_g)} = \frac{z_g+z_h}{z_h}$ (22) $\frac{\omega_c z_c}{\omega_N(z_b-z_h)} = \frac{z_f-z_h}{z_h}$ (23)
		energetska metoda	$M_a-M_b+M_c=0$ (24) $M_c = M_c^{`} + M_c^{``} = M_a\frac{z_g z_c}{z_a z_f}\eta_{ac}^{N} + M_b\frac{z_b z_g}{z_a z_h}\frac{\eta_{ac}^{N}}{\eta_{bc}^{N}}$ $i_D = \frac{-M_c}{M_a} = \frac{z_c\left(z_a z_h\eta_{bc}^{N}+z_b z_g\eta_{ac}^{N}\right)}{z_a\left(z_h z_c\eta_{bc}^{N}-z_b z_f\right)}$ (25)
8		analitička metoda	$i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = \frac{\omega_a-\omega_b}{\omega_N-\omega_b}\,\frac{\omega_N-\omega_b}{\omega_c-\omega_b} = i_{aN}^{b}\, i_{Nc}^{b} = \frac{1-i_{ab}^{N}}{1-i_{cb}^{N}}$ (20) $i_{ab}^{N} = \frac{\omega_a}{\omega_b} = -\frac{z_b z_f}{z_a z_e};\; i_{cb}^{N} = \frac{\omega_c}{\omega_b} = -\frac{z_g z_f z_b}{z_c z_e z_d};\; i_{ac}^{b} = \frac{\omega_a}{\omega_c};\; i_{aN}^{b} = 1-i_{ab}^{N}$ $i_K = i_{ac}^{b} = \frac{z_c z_d\left(z_a z_e+z_f z_b\right)}{z_a\left(z_c z_d z_e+z_g z_f z_b\right)}$ (21)
		graf. metoda	$\Delta 2,3,13 \cong \Delta 2,5,12 \;\; i \;\; \Delta 7,14,11 \approx \Delta 7,10,9 \Rightarrow$ $\frac{\omega_N z_b}{(\omega_a-\omega_N)z_a} = \frac{z_e}{z_f}$ (22) $\frac{(\omega_c-\omega_N)z_c}{(\omega_a-\omega_N)z_a} = \frac{z_g}{z_d}$ (23)
		energetska metoda	$M_a+M_b-M_c=0$ (24) $M_a = M_a^{`} + M_a^{``} = M_c\frac{z_g z_a}{z_c z_d}\eta_{ca}^{N} + M_b\frac{z_e z_a}{z_b z_f}\eta_{ba}^{N}$ $i_D = \frac{M_c}{M_a} = \frac{z_c z_d\left(z_a z_e\eta_{ba}^{N}+z_b z_f\right)}{z_a\left(z_e z_c z_d\eta_{ba}^{N}+z_b z_g z_f\eta_{ca}^{N}\right)}$ (25)

Stepen korisnosti može da se odredi za sva kinematska stanja, kada su poznati kinematski i energetski prenosni odnos prema izrazu:

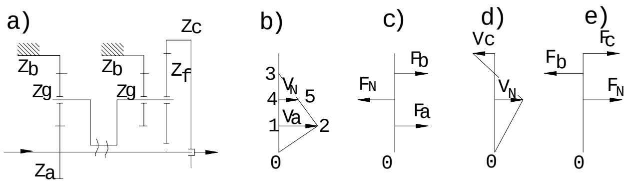
$$\eta = i_D \left(i_k \right)^{-1} \tag{26}$$

Ako se u (25) stavi da je stepen korisnosti jednak jedinici, dobijaju se izrazi za kinematski prenosni odnos.

Kod kinematskih šema 1,2,3,4,6 i 7 između prostih prenosnika ostvarena je paralelna veza, dok je kod šema 5 i 8 ostvarena redna veza.

Na osnovu izraza datih u tabeli 1 mogu da se odrede ugaone brzine svih elemenata prenosnika, kao i obrtni momenti koji opterećuju centralne zupčanike. Kod svih kinematskih šema zadržane su iste oznake za pogonski (z_a), gonjeni (z_c), nepokretan zupčanik (z_b) i nosač satelita (N).

Da bi se kod ovog tipa planetarnih prenosnika odredili prenosni odnosi, ugaone brzine i obrtni momenti koji opterećuju pojedine elemente, najčešće je potrebno da se koriste sve tri metode. Postupak bi se znatno pojednostavio kada bi se jedan ovako složen prenosnik rastavio na dva prosta (sl.2). U tom slučaju, svaki prenosnik se rešava pojedinačno. Međutim, pri ovome često nastaju problemi da se odredi koji elementi pripadaju jednom, a koji drugom prenosniku.



Slika 2. Planetarni prenosnik (sl.1) rastavljen na dva prosta planetarna prenosnika

Po novoj metodi koja je razvijena za ovaj tip planetarnih prenosnika znatno se pojednostavljuje postupak određivanja osnovnih parametara prenosnika.

Kombinovana metoda

Kombinovana metoda je nova i zasnovana je na posmatranju znakova spoljašnjih momenata, koji opterećuju centralne zupčanike i smerova obrtanja ovih zupčanika.

Iz mehanike je poznato, da se snaga predaje od pogonskog na gonjeni element, pri čemu je za pogonski element karakteristično da se smer obrtanja i obrtnog momenta poklapaju, dok su kod gonjenog suprotni.

Svi planetarni prenosnici s rasterećenim nosačem satelita svrstani su u tri grupe:

- prenosnici kod kojih se ostvaruje redukcija ($i^b_{ac} > 0$),
- prenosnici kod kojih se ostvaruje multiplikacija ($0 < i^b_{ac} < 1$) i
- prenosnici kod kojih su smerovi pogonskog i gonjenog vratila različiti ($i^b_{ac} < 0$).

Da bi bila zadovoljena jednačina ravnoteže spoljašnjih momenata (10), u zavisnosti od kinematskog stanja, odnosno grupe kojoj pripada prenosnik, momenti treba da imaju sledeće znakove date u tabeli 2. Kao pozitivan (+) označen je smer momenta pogonskih zupčanika, a znakom minus (-) smer momenata gonjenih zupčanika.

Tabela 2

Prenosni odnos prenosnika	Znakovi spoljašnjih obrtnih momenata		
	M_a	M_b	M_c
$i^b_{ac} > 1$	+	+	-
$0 < i^b_{ac} < 1$	+	-	+
$i^b_{ac} < 0$	+	-	+

Da bi kombinovana metoda mogla da se primeni, potrebno je odrediti sledeće parametre prenosnika:

- relativne ugaone brzine centralnih zupčanika u odnosu na nosač satelita,
- znakove spoljašnjih obrtnih momenata, koji opterećuju centralne zupčanike,
- znakove snaga koje prenose centralni zupčanici pri nepokretnom nosaču satelita i
- tokove snaga.

Analitičkom metodom, pomoću izraza (6), se određuje kinematski prenosni odnos da bi se prenosnik razvrstao u jednu od tri grupe.

Relativne ugaone brzine se određuju na osnovu analitičkih izraza i koriste da se odrede smerovi obrtanja centralnih zupčanika pri zaustavljenom nosaču satelita. Pri tome je usvojeno da je smer pogonskog zupčanika pozitivan (+).

Kod određivanja znakova spoljašnjih momenata, koji opterećuju centralne zupčanike, pošlo se od osnovne dinamičke jednačine (10). Da bi ova jednačina bila zadovoljena, obrtni momenti, u zavisnosti o kom se tipu prenosnika radi, moraju imati znakove date u tabeli 2.

Množenjem znakova relativnih ugaonih brzina (ω_a - ω_N, ω_b - ω_N, ω_c - ω_N) i znakova momenata, dobija se znak za snagu koji je pozitivan (+) ako zupčanik predaje snagu, a negativan (-) ako zupčanik prima snagu.

Na osnovu tako određenih znakova za zupčanike, lako je da se odrede tokovi snage.

Pomoću tokova snage odmah se vidi da li je veza između prostih prenosnika paralelna ili redna. Ako postoje dva pogonska zupčanika i jedan gonjeni tada se moment gonjenog zupčanika razlaže na dva *(M = M' + M'')*, gde su *M' i M''* komponentni momenti, tj. momenti koji se na gonjeni zupčanik prenose od jednog i drugog pogonskog zupčanika. Kada postoje jedan pogonski i dva gonjena zupčanika, tada se moment pogonskog zupčanika deli na dva komponentna momenta: jedan komponentni moment se prenosi na jedan gonjeni, a drugi na drugi gonjeni zupčanik.

U tabeli 3 određeni su znakovi za momente, relativne ugaone brzine, snagu na pojedinim zupčanicima i tokovi snage (prikazani strelicama), za devet različitih kinematskih šema ovog tipa prenosnika.

Prenosnici od 1-8 odgovaraju po redosledu kinematskim šemama u tabeli 1, dok prenosnik pod brojem 9 ima kinematsku šemu prikazanu na slikama 1 i 2.

Da bi se bliže objasnio postupak rada po ovoj metodi, razmatraće se kinematska šema s rednim brojem 9 (tabela 3, odnosno sl.1).

Pomoću analitičkog izraza (6) određuje se prenosni odnos i^b_{ac}, koji je u ovom slučaju manji od nule, što znači da prenosnik ima smer obrtanja suprotan obrtanju pogonskog i gonjenog elementa. Pomoću izraza, koji su dati u delu koji se odnosi na kinematiku planetarnih prenosnika, određuju se ugaone brzine centralnih zupčanika i nosača satelita.

Na osnovu prenosnog odnosa, tabela 2, određuju se znakovi spoljašnjih obrtnih momenata. Pošto ovaj tip prenosnika pripada trećoj grupi, momenti će imati sledeće znakove: M_a (+), M_b (-) i M_c (+). Ovaj raspored znakova se lako objašnjava. Pošto su kod prenosnika smerovi obrtanja pogonskog i gonjenog elementa suprotni, moment na gonjenom elementu će imati isti znak kao kod pogonskog. To znači, da bi jednačina (10) bila zadovoljena mora da se u prenosniku javi reaktivni moment koji će po intenzitetu biti jednak zbiru momenata M_a i M_c, ali suprotnog znaka. Jedina mogućnost je da na zupčanik z_b deluje obrtni moment, koji

Tabela 3

Tip prenosnika	Prenosni odnos	Momenti			Relativne ugaone brzine elemenata u odnosu na nosač satelita			Snaga pri ω_N=0			Tokovi snaga
		M_a	M_b	M_c	ω_a-ω_N	ω_b-ω_N	ω_c-ω_N	P_a^N	P_b^N	P_c^N	
1	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	+	-	+	-	-	+	-	+	$z_a \Rightarrow z_b$ $z_c \Uparrow$
2	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	+	-	+	-	+	+	-	-	$z_b \Leftarrow z_a$ $z_c \Downarrow$
3	$i_{ac}^{b}\langle -1$	+	+	-	+	-	-	+	-	+	$z_a \Rightarrow z_c$ $z_b \Uparrow$
4	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	-	+	+	-	-	+	+	-	$z_a \Rightarrow z_b$ $z_c \Uparrow$
5	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	+	-	+	-	+	+	-	-	$z_b \Leftarrow z_a$ $z_c \Downarrow$
6	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	+	-	+	-	-	+	-	+	$z_a \Rightarrow z_b$ $z_c \Uparrow$
7	$i_{ac}^{b}\langle -1$	+	-	+	+	-	-	+	+	-	$z_a \Rightarrow z_c$ $z_b \Uparrow$
8	$i_{ac}^{b}\rangle 1$	+	+	-	+	-	+	+	-	-	$z_b \Leftarrow z_a$ $z_c \Downarrow$
9	$i_{ac}^{b}\langle -1$	+	-	+	+	-	-	+	+	-	$z_a \Rightarrow z_c$ $z_b \Uparrow$

će imati suprotan znak u odnosu na ova dva, odnosno imaće znak (-).

Nakon toga, određuju se znakovi relativnih ugaonih brzina centralnih zupčanika u odnosu na nosač satelita (ω_a - ω_N , ω_b - ω_N, ω_c - ω_N). Iz tabele 3 za prenosnik koji ima redni broj 9 se vidi da će relativna ugaona brzina zupčanika z_a imati znak plus (+), zupčanika z_b i z_c znak minus (-).

Iz tabele 3 se vidi da se množenjem znakova momenata i relativnih ugaonih brzina dobijaju sledeći znakovi za snagu, za slučaj kada je nosač satelita nepokretan: $P^N{}_a$ plus (+), $P^N{}_b$ minus (-) i kod $P^N{}_c$ minus (-). Na osnovu znakova snage može da se odredi da li je zupčanik pogonski (znak plus) ili gonjeni (znak minus). Kod ovog prenosnika zupčanici z_a i z_b, pri zustavljenom nosaču satelita (N) prenose snagu na zupčanik z_c. To znači da u prenosniku postoje dva toka snage $z_a - z_c$ i $z_b - z_c$. Tako se moment M_c sastoji iz dva komponentna momenta ($M_c = M'_c + M''_c$). Komponentni moment M'_c se dobija množenjem momenta M_a sa prenosnim odnosom $i^N{}_{ac}$, a M''_c množenjem momenta M_b sa prenosnim odnosom $i^N{}_{bc}$, uzimajući u oba slučaja i stepen korisnosti prenosa.

U tabeli 3, u poslednjoj rublici, su prikazani tokovi snaga.

Kada je sve ovo poznato, nije teško odrediti obrtne momente korišćenjem jednačine (10), kinematski i dinamički prenosni odnos koristeći izraze (12 i 13) i stepen korisnosti prenosnika pomoću izraza (19), kao i rastaviti ovaj složeni prenosnik na dva prosta, kao što je prikazano na sl.2, koji se posle analiziraju pojedinačno.

Zaključak

Na osnovu opisanog izvedeni su sledeći zaključci:

- planetarni prenosnici s rasterećenim nosačem satelita (slobodnim) su veoma pogodni da se kompaktnom konstrukcijom i relativno malih gabarita mogu ostvariti veliki prenosni odnosi, bilo da su u pitanju reduktori ili multiplikatori,
- izložena metoda, u odnosu na do sada korišćene, znatno olakšava i skraćuje postupak određivanja svih relevantnih parametara *merodavnih* za projektovanje ovog tipa prenosnika,
- u radu su obrađene gotovo sve kinematske šeme ovog tipa planetarnog prenosnika, koje se mogu usvojiti pri projektovanju potrebnog prenosnika.

Literatura

[1] KUDRJAVCEV,N.V. *Planetarnie peredači.* Mašinostroenie, Moskva – Lenjingrad, 1988. god.

[2] PETROV,V.A. *Planetarnie i gidromehaničeskie peredači kolesnih i guseničnih mašin.* Mašinostroenie, Moskva, 1966.god.

Rad primljen: 1.6.2001.god.