UDK: 531.55(047)=861
COSATI: 19-04,20-11

Razdvajanje kretanja u dinamici leta projektila

Dr Dragoslav R. Petrović, dipl.inž.[1)]

Istraženo je više metoda za razdvajanje sistema diferencijalnih jednačina na jednačine brzog i sporog kretanja koje su pogodne za primenu u slučaju žirostabilisanih projektila. Sve metode se zasnivaju na određenoj smeni promenljivih prvobitnog skupa diferencijalnih jednačina, s ciljem dobijanja drugog skupa (diferencijalnih, ali i integrodiferencijalnih jednačina koje do sada nisu korišćene u dinamici leta) obično većeg dva puta od prvobitnog skupa jednačina, ali pogodnijeg za rešavanje i/ili aproksimacije.

Ključne reči: **Spoljašnja balistika, dinamika leta, razdvajanje kretanja, sporo kretanje, brzo kretanje.**

Uvod

TELO oblika žirostabilisanog projektila (stabilisanog velikom rotacijom oko uzdužne ose simetrije) u prostoru vrši dve vrste, fizički različitih, kretanja. Jedno je translacija položaja centra mase čije su promene relativno male u odnosu na drugo kretanje i naziva se sporo, a drugo je uglovno kretanje oko uzdužne ose simetrije i oscilovanje same ose čije su promene velike, i naziva se brzo kretanje. Diferencijalne jednačine, kojima se opisuje sporo i brzo kretanje, čine sistem jednačina koji mora da se rešava, simultano numeričkom integracijom. Kako veličinu koraka integracije po nezavisno promenljivoj uslovljavaju veličine koje se najbrže menjaju, a to su, najčešće, dve od tri uglovne veličine, dobija se veliko ukupno vreme integracije jer se nepotrebno vrše računske operacije s veličinama, praktično, konstantnim za duži vremenski period. Stara ideja razdvajanja sistema jednačina na jednačine sporog i brzog kretanja, omogućava vršenje numeričke integracije različitim veličinama koraka integracije: malim korakom za veličine brzog kretanja, a velikim korakom za veličine sporog kretanja. Pojmom "zamrzavanje koeficijenata" obuhvaćen je postupak "iz nužde" (za koji ne postoje nikakve matematičke osnove), prilikom razdvajanja jednačina kretanja blago rotirajućeg projektila – rakete, ali ne i žirostabilisanog projektila. Matematički posmatrano, problem razdvajanja kretanja se svodi na formiranje i razmatranje rešenja sistema diferencijalnih jednačina u kojima figuriše mali parametar. Razdvajanje kretanja je do sada uglavnom korišćeno za formiranje diferencijalnih jednačina brzog i sporog kretanja tela koje se kreće oko nepokretne tačke – žiroskopa [1], kao i za sistem diferencijalnih jednačina u kome dominiraju žiroskopske sile [2]. Poznato je da je jedan oblik razdvajanja uspešno izvršen u dinamici leta aviona [3], kao i u dinamici leta blago rotirajućih projektila – raketa, pri čemu je korišćeno "zamrzavanje koeficijenata" (u jednačinama uglovnog kretanja usvaja se da su veličine translatornog kretanja poznate i da se ne menjaju s vremenom). Kao rezultat razdvajanja, dobijene su dve grupe jednačina, tzv. bočnog i uzdužnog kretanja, koje su u stvari jednačine varijacija veličina stanja kretanja u odnosu na referentne. U [4] je takođe za avion, izabran drugačiji pristup. Kao rezultat razdvajanja su dobijene dve grupe diferencijalnih jednačina: kratkoperiodičnog i dugoperiodičnog kretanja. Ove jednačine su nastale uvođenjem malog parametra $\varepsilon << 1$ i prelaska od realnog vremena t na malo bezrazmerno kvazivreme $\tau = \varepsilon t$. Parametar ε, kao mala veličina, figuriše uz izvesne članove dobijenih jednačina koje u matričnom obliku glase:

$$\frac{dx}{d\tau} = \mathbf{c}(x, y) + \varepsilon\,\mathbf{g}(x, y) \tag{1}$$

$$\frac{dy}{d\tau} = \mathbf{b}(x, y) + \varepsilon\,\mathbf{f}(x, y) \tag{2}$$

gde su: x, y -vektori sporo i brzo promenjivih, a $\mathbf{c}, \mathbf{g}, \mathbf{b}, \mathbf{f}$ su matrice - funkcije. Za rešavanje ovog tipa jednačina su razvijene metode u [5]. Rešenja dobijenih aproksimativnih jednačina su takođe aproksimativna. Način njihovog rešavanja je sledeći:

a) ako je $\varepsilon = 0$ uvedeno u jednačinu (1), dobija se, u stvari, da je rešenje sporo promenljive $x = x_0$, a jednačina (2) je oblika: $dy_0 / dt_1 = \mathbf{b}(x_0, y) + \varepsilon\,\mathbf{f}(x_0, y)$, gde je $t_1 = \tau / \varepsilon$;
b) za sve vreme dok se x_0 bitnije ne promeni deli se interval t_1 na potreban broj podintervala i numerički rešava y_0;
c) korišćenjem poznatog rešenja za y_0 na kraju intervala integracije t_1, rešava se jednačina (1) za x sa $\varepsilon \neq 0$.

Odnosi perioda T_1 brzo promenljivih i T_2 sporo promenljivih su za avione reda $T_1 / T_2 \approx 10^{-2}$. Isti odnos kod žirostabilisanih osnosimetričnih projektila je reda 10^{-3}, pa razdvajanje kretanja diferencijalnih jednačina projektila ne

[1)] Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

može da se izvrši na ovaj način. Druga grupa metoda za razdvajanje promenljivih smatra se kao standardna i zasniva se na kanonskoj transformaciji [6] čijom se primenom povećava broj jednačina, pošto se uvode spregnute promenljive. U [7] je izbegnuto povećanje broja jednačina i pored uvođenja spregnutih promenljivih. Broj dobijenih jednačina Hamiltona, u kojima figurišu spregnute promenljive, zahvaljujući korišćenju generatora grupe *LI*, nije veći od broja polaznih jednačina. Metod tzv. direktnog razdvajanja kretanja je korišćen u teoriji nelinearnih vibracija [8], dok u dinamici leta nije korišćen, a sastoji se u svođenju prvobitnog sistema diferencijalnih jednačina na sistem od dve grupe integrodiferencijalnih jednačina. Kod integrodiferencijalnih jednačina se veličine, čije se rešenje traži, nalaze sa znakom diferencijala na levoj strani jednakosti, a istovremeno se nalaze i na desnoj strani jednakosti, ali pod znakom integrala. Integrodiferencijalne jednačine je teže rešavati nego prvobitne, diferencijalne, jer metode za numeričku integraciju integrodiferencijalnih jednačina nisu standardizovane, pošto metoda za integraciju integrodiferencijalnih jednačina zavisi od fizikalnosti dotičnog problema te ne mogu da se koriste numeričke metode opšteg tipa, što znači da za svaku integrodiferencijalnu jednačinu treba sačiniti odgovarajuću numeričku metodu. Proizlazi da u osnovi svih korišćenih metoda leži određena smena promenljivih prvobitnog skupa diferencijalnih jednačina, da bi se dobio drugi skup diferencijalnih (i drugih) jednačina, obično veći od prvobitnog dva puta, ali pogodniji za rešavanje i/ili aproksimacije.

Mehaničko razdvajanje kretanja

Sistem diferencijalnih jednačina kretanja tela u vektorskom obliku može da se napiše kao:

$$T_i \dot{z} = F_i(z_1,...,z_n,t) \quad (i=1,...,n) \tag{3}$$

Vreme t u (3) je nezavisno promenljiva, T_i su konstante vremena, a z_i uopštene koordinate. Razdvajanje kretanja na brzo i sporo kretanje je moguće, ako su konstante T_i različitog reda veličina. Ako su npr. tri grupe konstanti: T_i, T_j', T_k'', matična jednačina (3) može da se fizički razbije na tri grupe:

$$T_i \dot{x}_i = \mathbf{f}_i(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (i=1,...,p) \tag{4}$$

$$\varepsilon T_j' \dot{y}_j = \mathbf{g}_j(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (j=1,...,q) \tag{5}$$

$$\varepsilon^\alpha T_k'' \dot{z}_k = \mathbf{h}_k(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (k=1,...,r) \tag{6}$$

$$p+q+r=n \quad ; \quad \alpha>1 \quad ; \quad \varepsilon \ll 1$$

Uslov da prikazane jednačine mogu da se napišu u datom obliku jeste da srednje vrednosti funkcija $|\mathbf{f}|,|\mathbf{g}|,|\mathbf{h}|$ imaju približno jednak red veličina. Iz (4-6) se vidi da se po brzini promene zavisno promenljivih može izvršiti sledeća gradacija: x_i -spore; y_j -brže; z_k -najbrže. Ideja mehaničkog razdvajanja kretanja [9], sastoji se u rešavanju uprošćenog sistema jednačina dobijenog uvođenjem $\varepsilon = 0$ u (5,6). Uprošćene jednačine (4-6) postaju mešovitog tipa, diferencijalne i algebarske:

$$T_i \dot{x}_i = \mathbf{f}_i(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (i=1,...,p) \tag{7}$$

$$0 = \mathbf{g}_j(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (j=1,...,q) \tag{8}$$

$$0 = \mathbf{h}_k(x_1,...,x_p,y_1,...,y_q,z_1,...,z_r,t); \quad (k=1,...,r) \tag{9}$$

Brzo promenljive y_j, z_k se nalaze kao rešenje dve algebarske jednačine (8,9) u funkciji samo sporo promenljivih, i to za $x_i = \text{const}$:

$$y_j = y_j(x_1,...,x_p) \tag{10}$$

$$z_k = z_k(x_1,...,x_p) \tag{11}$$

Ovako dobijena rešenja (10,11) su samo srednje vrednosti promenljivih u položaju ravnoteže, a ne prava rešenja u funkciji vremena. Stanje ravnoteže će biti stabilno samo kada realni delovi korena karakteristične jednačine $\Delta(p)=0$ brzo promenljivih y_j, z_k imaju negativnu vrednost, tj:

$$\Delta(p) = \begin{bmatrix} \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial y_1} - \varepsilon T_1', ..., \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial y_q}, & \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial z_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{g}_1}{\partial y_q} - \varepsilon T_1', & \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{g}_q}{\partial z_r} \\ \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial y_q}, & \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial z_1} - \varepsilon^\alpha T_1'', .., \frac{\partial \mathbf{h}_1}{\partial z_r} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial y_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial y_q}, & \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial z_1}, ..., \frac{\partial \mathbf{h}_r}{\partial z_r} - \varepsilon T_r'' \end{bmatrix} = 0 \tag{12}$$

Samo u slučaju kada su ispunjeni uslovi dati u (12), moguća je zamena sistema diferencijalnih jednačina (4-6) sa (7-9), tj. dopušteno je zanemarivanje članova $\varepsilon T_j'$ i $\varepsilon^\alpha T_k''$. Mehaničko razdvajanje kretanja, matematički posmatrano, nije strogo definisano, a dobijene jednačine nisu potpune. Proizvoljnost se ogleda u usvajanju x_i=const, a nepotpunost u nedostatku mogućnosti razmatranja karaktera promene brzo promenljivih veličina y_j, z_k pošto se samo određuju njihove srednje vrednosti u položaju (i nizu položaja) ravnoteže. Oblast izmene y_j, z_k je nazvana granični sloj, u skladu s terminologijom koja se koristi u hidrodinamici, za čije osobine se koristi složen matematički aparat, ali još uvek nedovoljno razrađen. Pokazano je da se izloženim postupkom razdvajanja kretanja može razmatrati stabilnost i naći ekstremne vrednosti uopštenih koordinata. Sledi da zamisao o „razdvajanju kretanja” nije ostvarena rešavanjem razdvojenih jednačina, ali je ukazano na veliku korist ove metode kada se koristi u druge namene [18-19].

Direktno razdvajanje kretanja korišćenjem integrodiferencijalnih jednačina

Ova metoda je uspešno korišćena u posebnim slučajevima nelinearnih vibracija [8]. Zaključci o osnovama ove metode doneti za jednodimenzionalnu vektorsku jednačinu s jednim stepenom slobode kretanja, primeniće se i za višedimenzionalni slučaj. Polazna pretpostavka je da se oscilatorno kretanje $\mathbf{x}$ može predstaviti u obliku sume dva kretanja: sporog χ i brzog ψ kao:

$$\mathbf{x} = \chi(t) + \psi(t, \omega t) \tag{13}$$

U (13) je $\mathbf{x}$ vektor generalisanih koordinata opšteg mehaničkog sistema čije se kretanje opisuje, χ je komponenta sporog kretanja, a ψ brzog kretanja. Sporo vreme je t, a brzo vreme $\tau = \omega t$, gde je ω veličina čija je vrednost velika, i ona je frekvenca oscilovanja. Polazna pretpostavka je, da je ψ periodična veličina s periodom oscilovanja jednakom 2π, jer su tada izbegnute izvesne teškoće u korišćenju ove metode. Kao rezultat razdvajanja se dobijaju dve grupe jednačina koje su ekvivalentne s prvobitnom jednačinom zbog toga što se samo pogodnom matematičkom manipulacijom, bez ikakvih zanemarivanja, od jedne, dobiju dve grupe jednačina. Udvostručavanjem broja jednačina, bez uvođenja novih promenljivih, što je npr. slučaj kod kanonskih transformacija, pruža se mogućnost da se izvesni članovi u dobijenim jednačinama odstrane ili dobiju određenu vrednost. Takođe, dve ekvivalentne jednačine umesto jedne, od kojih jedna opisuje brzo kretanje, a druga sporo kretanje, pružaju mogućnost dobijanja aproksimativnog rešenja. Pod određenim pretpostavkama, jednačina brzog kretanja može da se reši nezavisno od jednačine sporog kretanja. Uz pretpostavku da je mali vremenski interval integracije jednačine brzog kretanja, usvaja se da se bitno ne menjaju veličine sporog kretanja. Ova tehnika, sama po sebi, nije nova; poznata je kao metod "zamrzavanja koeficijenata" i koristi se prilikom analitičkog rešavanja sistema diferencijalnih jednačina, naročito linearnih sa "sporo promenljivim koeficijentima"; nove su osobine razdvojenih jednačina kretanja, naročito brzih. U njima se, s leve strane jednakosti promenljiva nalazi sa znakom diferencijala, a istovremeno se s desne strane jednakosti nalazi pod znakom integrala. Prema tome, jednačina brzog kretanja nije više obična diferencijalna, kao što je polazna jednačina, već je promenila karakter i postala integrodiferencijalna. Prema poznatim podacima, integrodiferencijalne jednačine nisu korišćene u dinamici leta (u aerodinamici jesu, ali kao poseban oblik integrodiferencijalnih jednačina - integralne). Ovaj tip jednačina se primenjuje za rešavanje malog kruga problema, npr. u [10] ili u domenu teorije, a manje u praksi elasto-plastičnosti [11].

Svođenje sistema diferencijalnih jednačina na dve grupe integrodiferencijalnih

Pokažimo kako jedan sistem diferencijalnih jednačina može da se svede na dva sistema integrodiferencijalnih jednačina, ne vodeći računa u početku o tome, koja se veličina brzo a koja sporo menja. Neka je diferencijalna jednačina kretanja opšteg materijalnog sistema data u obliku:

$$m\ddot{\mathbf{x}} = F(\dot{x}, x, t) + \Phi(\dot{x}, x, t, \omega t) \tag{14}$$

Kao u (13), $\mathbf{x}$ su generalisane koordinate, m je masa, a F i Φ su sporo i brzo promenljive sile. Ovde za Φ važi pretpostavka o periodičnosti kao za ψ. Za prelazak (14) u dve integrodiferencijalne jednačine, desnoj strani se dodaje i oduzima izraz $W + F_1(\dot{\chi}, \chi, t)$. Takođe se, umesto nepoznate $\mathbf{x}$ u smislu jednačine (13), uvode dve nepoznate χ i ψ. Izrazi za W i F_1 su u obliku:

$$W = -\left\langle \Phi(\dot{\chi}+\dot{\psi}, \chi+\psi, t, \tau) \right\rangle - \left\langle F_1(\dot{\chi}, \chi, \dot{\psi}, \psi, t) \right\rangle \tag{15}$$

$$F_1(\dot{\chi}, \chi, \dot{\psi}, \psi, t) = F(\dot{\chi}+\dot{\psi}, \chi+\psi, t) - F(\dot{\chi}, \chi, t) \tag{16}$$

Zagrade $\langle\ \rangle$ su znak da su veličine u njima osrednjene u odnosu na brzo vreme τ kao:

$$\langle ... \rangle = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} (...) d\tau$$

Uvođenjem dve nepoznate χ, ψ umesto $\mathbf{x}$, u novonastalim jednačinama se postavlja uslov da članovi budu grupisani kao:

$$\begin{aligned} m\ddot{\psi} &= F_1(\dot{\chi}, \chi, \dot{\psi}, \psi, t) + \Phi(\dot{\chi}+\dot{\psi}, \chi+\psi, t, \tau) - \\ &- \left\langle \Phi(\dot{\chi}+\dot{\psi}, \chi+\psi, t, \tau) \right\rangle - \left\langle F_1(\dot{\chi}, \chi, \dot{\psi}, \psi, t) \right\rangle \end{aligned} \tag{17}$$

$$\begin{aligned} m\ddot{\chi} &= F(\dot{\chi}, \chi, t) + \\ &+ \left\langle \Phi(\dot{\chi}+\dot{\psi}, \chi+\psi, t, \tau) \right\rangle + \left\langle F_1(\dot{\chi}, \chi, \dot{\psi}, \psi, t) \right\rangle \end{aligned} \tag{18}$$

Eventualno nađeno hipotetičko rešenje za χ, ψ iz jednačina (17,18), istovremeno je rešenje $\mathbf{x}$ jednačina (14), a dobija se kao suma $\mathbf{x} = \chi + \psi$.

Aproksimacija rešenja skupa integrodiferencijalnih jednačina

Iz jednačine (17) se vidi da se nepoznata ψ nalazi na levoj strani jednakosti sa znakom diferencijala, a na desnoj strani jednakosti u izrazu za osrednjenu vrednost kao podintegralna funkcija. Ovaj tip jednačina, u teoriji jednačina poznat kao integrodiferencijalna jednačina (da je na levoj strani samo ψ, ista jednačina zvala bi se integralna – korišćena u aerodinamici), u principu je teže rešiti nego običnu diferencijalnu jednačinu. U izvesnim slučajevima (školskim) integralna jednačina ili integrodiferencijalna jednačina može da se svede na običnu diferencijalnu jednačinu [12]. Iz (17,18) ne može da se uoči uticaj člana uz koji stoji mala veličina $\varepsilon << 1$, koja ukazuje na brzinu promene dotične zavisno promenljive. Međutim, kada se želi rešenje diferencijalne jednačine tipa integrodiferencijalne jednačine, mora da se vodi računa o tome, tj. koja je veličina brzo promenljiva, a koja sporo promenljiva, jer od brzine promene zavisno promenljivih u jednačinama zavisi kakve aproksimacije su moguće. Kao prva aproksimacija može da se uzme pomenuto zamrzavanje stanja veličina sporog kretanja – koeficijenata u (17) koja opisuje brzo kretanje. Ako je promena $\chi, \dot{\chi}, t$ za vreme periode $2\pi/\omega$ mala, a nađeno je, na neki način, rešenje jednačine (13) kao $\psi = \psi(\chi, \dot{\chi}, t, \tau)$, ono može da se iskoristi za nalaženje izraza (15) za funkciju W potrebnog u (18) za sporo promenljive χ. Posle nalaženja W, jednačina (18) može da se napiše u obliku:

$$m\ddot{\chi} = F(\chi, \dot{\chi}, t) - W(\chi, \dot{\chi}, t) \tag{19}$$

Iz (19) se vidi da je pravoj sporo promenljivoj sili F, dodata dopunska spora sila W (s negativnim znakom). Dopunska sila je nastala osrednjavanjem prave brzo promenljive sile Φ i doprinosa sile F_1, nastalog izdvajanjem brzo promenljive sile iz sporo promenljivih sila F na jednom intervalu datog kretanja. Usvojena pretpostavka, da je ψ malo u poređenju sa χ, a malo i $\dot{\chi}$ u poređenju sa $\dot{\psi}$, omogućuje da se uvede druga aproksimacija za F_1. Ona je najpogodnija da bude u obliku:

$$F_1 = \frac{\partial F}{\partial \dot{x}}\dot{\psi} + \frac{\partial F}{\partial x}\psi \tag{20}$$

Parcijalne izvode $\partial / \partial x$ u gornjoj linearizovanoj jednakosti treba uzeti za $\psi, \dot{\psi} = 0$.

Veštačko povećanje periode oscilovanja

U grupu metoda za razdvajanje promenljivih može da se uvrsti i metoda za veštačko povećanje periode oscilovanja nekih veličina stanja kretanja [13,15]. Primenom ove metode postiže se isti efekat kao u slučaju razdvajanja sistema jednačina na jednačine sporog kretanja i jednačine brzog kretanja. Ušteda u vremenu potrebnom za integraciju diferencijalnih jednačina ovde se postiže usled toga što pri većoj periodi oscilovanja može da se koristi veći korak integracije. Metoda je laka za primenu jer nisu potrebne međufaze u kojima se vrši transformacija polaznih jednačina da bi se dobio novi skup jednačina. Primeni ove metode pogoduje činjenica da nema razlike između prvobitnih jednačina i novih jednačina, jer nove jednačine ostaju u nepromenjenom obliku a pojedini članovi novih jednačina su pomnoženi koeficijentom **k** čija je vrednost 0<**k**<1. Numerička integracija diferencijalnih jednačina kretanja obavlja se korakom po vremenu, koji se određuje prema oscilatorno promenljivoj koja ima najmanju periodu oscilovanja. Ovako određenim korakom (malim) vrši se numerička integracija i ostalih veličina koje nisu oscilatorne, ili pak imaju veliku periodu oscilovanja, i zbog toga se javila ideja da se perioda poveća na veštački način kako bi mogao da se koristi veći korak integracije. Ali, usled povećanja periode oscilovanja menjaju se kvantitativno i drugi atributi veličina stanja kretanja. Da li se ono delimično otklonilo korišćenjem pravila tzv. adijabatskog invarijanta, uslovljeno je da prilikom stvaranja uslova za povećanje periode u novodobijenim jednačinama sledeće veličine ostanu iste kao u polaznim jednačinama: srednje vrednosti sporo promenljivih i amplitude brzo promenljivih. Pomoću ovog invarijanta, od polaznih diferencijalnih jednačina brzo promenljive y i sporo promenljive x_i, nađe se drugi skup jednačina čijim integraljenjem se dobija ista amplituda veličine y kao što bi se dobila integracijom prvobitnog skupa, i ista srednja vrednost promenljive x_i. Pri tom se perioda brzo promenljive veličine y povećala, i time stvorila mogućnost korišćenja većeg koraka integracije nego u prvobitnoj jednačini.

Jednodimenzionalni slučaj

Za prikaz ove metode služi polazna diferencijalna jednačina brzo promenljive y drugog reda i sporo promenljive x_i prvog reda, oblika:

$$\ddot{y} + \varepsilon \mathbf{f}(x_i, y)\dot{y} + \mathbf{F}(x_i, y) = 0 \tag{21}$$

$$\dot{x}_i - \varepsilon \mathbf{s_i}(x_i, y) = 0 \tag{22}$$

gde je $\varepsilon << 1$, a funkcije $\mathbf{f}, \mathbf{F}, \mathbf{s_i}$ su diferencijabilne po svojim argumentima. Argumenti x_i su sporo promenljive veličine i ako neka od navedenih funkcija zavisi od vremena, to npr. prvi x_i, x_1 može biti 'malo' vreme $\tau = \varepsilon t, d\tau / dt = \varepsilon$. Neka je karakter promene y, x_i kao što je dato na sl.1 kriva a. Izrazimo amplitude veličine y i srednje vrednosti promenljive x_i u funkciji dve promenljive: τ i faze periodi-čnog kretanja φ kao:

$$y = y_0(\tau, \varphi) + \varepsilon y_1(\tau, \varphi) \tag{23}$$

$$x_i = x_{i0}(\tau) + \varepsilon x_{i1}(\tau, \varphi) \tag{24}$$

$$\dot{\varphi} = \omega_0(\tau) + \varepsilon\omega_1(\tau) \tag{25}$$

Unošenjem (23-25) u (21,22) i grupisanjem članova uz isti eksponenat na ε, dobijaju se sledeći izrazi za nalaženje y_0, y_1, x_{i0}, x_{i1}:

$$\omega_0^2(\tau)\frac{\partial^2 y_0}{\partial \varphi^2} + \mathbf{F}(\tau, x_{i0}, y) = 0$$

$$\omega_0^2(\tau)\frac{\partial^2 y_1}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial \mathbf{F_0}}{\partial y} y_1 = \Bigg[\frac{d\omega_0}{d\tau}\frac{dy_0}{d\varphi} + 2\frac{\partial^2 y_0}{\partial\varphi\partial\tau} + \frac{\partial \mathbf{F_0}}{\partial y'}\omega_0\frac{\partial y_0}{\partial \varphi} + + 2\omega_0\omega_1\frac{\partial^2 y_0}{\partial \varphi^2} + \sum\nolimits_{i=0}^{n}\frac{\partial \mathbf{F_0}}{\partial x_i}x_{i1}\Bigg] \tag{26}$$

$$\varepsilon\left[\omega_0\frac{\partial x_{i1}}{\partial \varphi} + \frac{dx_{i0}}{d\tau} - \mathbf{s_i}\left(\tau, x_{i0}, y, \omega_0\frac{\partial y_0}{\partial \varphi}\right)\right] = 0$$

$$x_{i1}(\tau, \varphi) = \frac{1}{\omega_0}\int_{\varphi_0}^{\varphi}\left[\mathbf{s_{i0}} - \bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{i0}}\right]d\varphi$$

gde su: ∂-oznaka za parcijalni izvod, a $\partial \mathbf{F}_0 / \partial y'$ parcijalni izvod funkcije $\mathbf{F}$ po argumentu $\varepsilon dy/dt$. Posle operacije osrednjavanja i integraljenja, dobijaju se izrazi za određivanje amplituda y i srednjih vrednosti x_i, x_{i0} kao:

$$D\bar{\bar{\mathbf{f}}} + \sum\nolimits_{i=1}^{n}\frac{\partial D}{\partial \chi_{i0}}\bar{\bar{\mathbf{s}}}_{\mathbf{i0}} = 0\ ;\ \frac{d\chi_{i0}}{d\tau} - \varepsilon\bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{i0}} = 0 \tag{27}$$

U jednačinama (27) su:

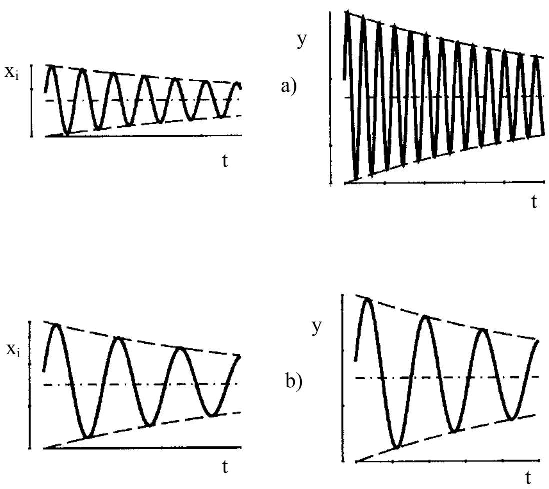
$$D(\chi_{i0}, y) = \int_{y_{\min}}^{y_{\max}}\frac{dy}{dt}dy \tag{28}$$

$$\overset{=}{\mathbf{f}}(\chi_{i0},y)=\frac{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\mathbf{f}(\chi_{i0},y)\frac{dy}{dt}dy}{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\frac{dy}{dt}dy} \tag{29}$$

$$\overset{=}{\mathbf{s}}_{\mathbf{i0}}(\chi_{i0},y)=\frac{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\mathbf{s}_{\mathbf{i0}}(\chi_{i0},y)\frac{\partial}{\partial\chi_{i0}}\frac{dy}{dt}dy}{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\frac{\partial}{\partial\chi_{i0}}\frac{dy}{dt}dy} \tag{30}$$

$$\bar{\mathbf{s}}_{\mathbf{i0}}(\chi_{i0},y)=\frac{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\mathbf{s}_{\mathbf{i0}}(\chi_{i0},y)/\left(\frac{dy}{dt}\right)dy}{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}\frac{dy}{dt}dy} \tag{31}$$

$$\frac{dy}{dt}(\chi_{i0},y)=\sqrt{\int\limits_{y_{\min}}^{y_{\max}}2\mathbf{F}(\chi_{i0},y_1,y)dy_1} \tag{32}$$



Slika 1. Veštačko povećanje periode oscilovanja

Složenost izraza u jednačinama (28-32) otežava primenu jednačina (27) jer je potrebno prethodno izračunati osrednjene integrale koji nisu tablični, a pored toga zavise i od velikog broja veličina stanja kretanja koje upravo treba odrediti. Iz ovoga sledi da treba unapred poznavati tačne veličine da bi se odredile aproksimativne, što po logici stvari nema smisla raditi. Doista je to činjenica, ali ako bi se dokazalo da se vrednosti integrala određenih za jedne početne uslove stanja kratanja ne menjaju za izvestan broj drugih početnih stanja kratanja, postupak bi bio opravdan, a metoda upotrebljiva. Ipak jednačine (27) imaju, teorijski posmatrano, veliko preimućstvo u odnosu na (21,22) jer se u (28-32) vrši osrednjavanje, pa bi eventualna integracija (27) mogla da se obavi sa većim korakom po vremenu. Korišćenje ove metode pada na teret istraživača jer iz prikazanih jednačina (27) ne može da se vidi koliko je povećanje periode brzih veličina, pošto ono nije eksplicitno izraženo.

Višedimenzionalni slučaj

Veštačko povećanje periode oscilovanja, predloženo za jednodimenzionalni slučaj u [14], u [15] je uopšteno i primenjeno za višedimenzionalni slučaj. Sledeći izvođenja u [15], takođe može da se dođe do sistema jednačina koje skraćuju vreme proračuna, a da se ne vidi eksplicitno povećanje periode oscilovanja. Razmatranja data niže, direktno ukazuju na veličine koje se veštački povećavaju i posledice povećanja. Jednačine (21,22), transformisane u standardan oblik, pogodan za primenu metode osrednjavanja, napisane vektorski jesu:

$$\dot{X}=\varepsilon\mathbf{X}_1(X,Y,\tau)+\varepsilon^2(...) \tag{33}$$

$$\dot{Y}=\mathbf{Y}_0(X,Y,\tau)+\varepsilon\mathbf{Y}_1(X,Y,\tau) \tag{34}$$

gde su $\mathbf{X}_1,\mathbf{Y}_0,\mathbf{Y}_1$ vektori dimenzija $n\times 1$ i $m\times 1$. Teoretski, ako postoji analitičko rešenje (21,22), u prvoj fazi može da se nađe y stavljanjem u (33,34) $\varepsilon=0$ iz:

$$\dot{Y}=\mathbf{Y}_0(X,Y,\tau)\ ;\ X=\text{const};\ \tau=\text{const} \tag{35}$$

U drugoj fazi može da se nađe rešenje (33,34) za $\varepsilon\neq 0$ varijacijom konstanti u rešenju prve faze. Treba naglasiti da metoda varijacije konstanti važi za određene uslove koji treba da se imaju u vidu, kada se ona primenjuje. Spomenuto je da oblik rešenja jednačina (33-35) mora da bude isti, tj. da sile uz ε budu dovoljno male tako da ne deformišu prvobitni oblik grafika dotičnih veličina, već ga samo modifikuju za malu veličinu preko konstanti sadržanih u rešenju prve faze. Konstante određene u prvoj fazi, u drugoj fazi prerastaju u funkcije vremena. Rešenje jednačine (35) može da se napiše u opštem obliku:

$$Y=\frac{T\varphi}{2\pi}+y_0(X,Y,C,\varphi) \tag{36}$$

Rešenje za Y se deli u dve grupe: $y=\left\{y^{(1)},y^{(2)}\right\}$, gde su:

- $y^{(1)}=\{y_1,...,y_s\},s<m$ oscilatorne promenljive s periodom oscilovanja $T_0(X,C,\tau)$;
- $y^{(2)}=\{y_{s+1},...,y_m\}$ obrtne promenljive, $T=\{0,...,0,T_{s+1},...,T_m\}$ skup priraštaja za koje se promeni y za vreme $\Delta\tau=T_0$;
- $\varphi=2\pi(t-t_0)/T_0+C_m$ -faza;
- $C=\{C_1,...,C_{m-1}\}$ -skup m-1 proizvoljnih konstanti od kojih zavisi T_0;
- C_m - fazna konstanta;
- $y_0(X,Y,C,\varphi)$ - m - merni vektor zavisan od faze φ sa periodom 2π .

Poznavanjem rešenja jednačina (35) i varijacijom konstanti u dobijenom rešenju, jednačine (17,18) se opet mogu svesti na standardan oblik jednačina s brzo rotirajućom fazom [16] oblika:

$$\dot{\mathbf{r}}=\varepsilon\mathbf{R}_1(r,\varphi,\tau)+\varepsilon^2(...) \tag{37}$$

$$\dot{\varphi}=\omega(r,\varphi,\tau)+\varepsilon\Phi_1(r,\varphi,\tau)+\varepsilon^2(...) \tag{38}$$

gde su: $\mathbf{r} = \{c, x\}$ - skup vektora x i c, $\omega = 2\pi / T_0(r,\tau)$, a $\mathbf{R_1}(r,\varphi,\tau), \Phi_1(r,\varphi,\tau)$ su poznate periodične funkcije po φ sa periodom jednakom 2π. Zamenom promenljivih da budu kao:

$$r = r_0 + \varepsilon r_1(r_0, \varphi_0, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{39}$$

$$\varphi = \varphi_0(\tau) + \varepsilon\varphi_1(r_0, \varphi_0, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{40}$$

U (39,40) su tako određeni r_0, φ_0 da zadovoljavaju sledeće jednačine:

$$\dot{r}_0 = A_1(r_0, \tau) + \varepsilon A_2(r_0, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{41}$$

$$\dot{\varphi}_0 = \omega(r_0, \tau) + \varepsilon B_1(r_0, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{42}$$

Rešavanjem prikazanih jednačina se dobija tzv. rešenje prvog približenja metodom osrednjavanja. Uočava se da promenljive u (41) ne zavise od promenljivih u (42), tako da one mogu da se rešavaju nezavisno jedna od druge (s različitim korakom integracije). Ovim je na neki način izvršeno razdvajanje promenljivih, ali u (42) figuriše r_0 nađeno u (41). Potrebne konstante $r_1, \varphi_1, A_1, A_2, B_1$ u jednačinama (41,42) su:

$$A_1(r_0, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \mathbf{R_1}(r_0, \varphi_0, \tau)d\varphi_0 \tag{43}$$

$$r_1(r_0, \varphi_0, \tau) = \frac{1}{\omega(r_0, \tau)}\int_0^{2\pi} \left[\mathbf{R_1}(r_0, \varphi_0, \tau) - A_1(r_0, \tau)\right]d\varphi_0 \tag{44}$$

$$B_1(r_0, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} h_1(r_0, \varphi_0, \tau)d\varphi_0 \tag{45}$$

$$\varphi_1(r_0, \varphi_0, \tau) = \frac{1}{\omega(r_0, \tau)}\int_0^{2\pi} \left[h_1(r_0, \varphi_0, \tau) - B_1(r_0, \tau)\right]d\varphi_0 \tag{46}$$

$$A_2(r_0, \tau) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \left[\frac{\partial \mathbf{R_1}}{\partial r_0} r_1 - \frac{\partial r_1}{\partial r_0} A_1 - \frac{\partial r_1}{\partial \varphi_0} B_1\right]d\varphi_0 \tag{47}$$

$$h_1(r_0, \varphi_0, \tau) = \Phi_1(r_0, \varphi_0, \tau) + \frac{\partial \omega}{\partial r_0} r_1(r_0, \varphi_0, \tau) \tag{48}$$

Vreme integraljenja jednačina (37,38), koje traže mali korak integracije, smanjuje se integracijom (43-48) s većim korakom, što je i bio cilj navedene operacije. I u ovom slučaju integracija nije jednostavna budući da treba prethodno posebno rešiti komplikovane izraze za srednje vrednosti veličina u (43-48). Za razliku od jednačina (26), koje su dobijene iz uslova invarijantnosti vrednosti amplitude, ovde nije postavljen nikakav uslov prilikom izloženih manipulacija sa zavisno promenljivim. Sve vreme je tražen pogodniji oblik jednačina i promenljivih koje treba da se reše, a istovremeno su činjena raznorazna zanemarivanja čiji uticaj na kvalitet rešenja krajnjih jednačina nije poznat, premda on može da se odredi poređenjem. Tehnika poređenja je gotovo standardna: prema dobijenim jednačinama se reši primer čije je poznato tačno rešenje i uporede se rezultati. Kada se rešava nestandardan slučaj, što je redovna pojava, ostaju nepoznata odstupanja približnog od tačnog rešenja, pa izostaje ocena kvaliteta rezultata dobijenih aproksimativnim jednačinama. Skraćenje vremena proračuna (37,38) može da se postigne uvođenjem u njih koeficijenta **k**, a da se ne računaju izrazi (43-48). Vrednost **k** je u granicama od 0<**k**<1. On se određuje iskustveno i ne mora da bude konstanta tokom proračuna, već može da se računa kao $\mathbf{k} = \mathbf{k_q} \times \mathbf{k_p}$, gde je $\mathbf{k_q}$ konstanta, a $\mathbf{k_p}$ -veličina promenljiva s vremenom ili drugim veličinama stanja kretanja (duž intervala integracije). Uvođenjem koeficijenta **k** u jednačine brzo rotirajuće faze (37,38), u stvari se povećava perioda oscilovanja T_0. Ona se poveća tako što se podeli sa **k,** pa je njena nova vrednost $T^* = T_0 / \mathbf{k}$. Neka su sa (*) označene novodobijene vrednosti, izmenjene zbog **k** veličine u (37,38) tako da one, ponovo napisane, glase:

$$\dot{\mathbf{r}}^* = \varepsilon \mathbf{R_1}(r^*, \varphi^*, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{49}$$

$$\dot{\varphi}^* = \mathbf{k}(\tau)\omega(r^*, \varphi^*\tau) + \varepsilon\Phi_1(r^*, \varphi^*, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{50}$$

Odnosi između promenljivih $r, \varphi, r^*, \varphi^*$ gledajući jednačine (43-48) su:

$$\begin{aligned} &-A_1(r_0, \tau) = A_1(r^*, \tau) \\ &-r_0 = r_0^* \\ &-r_1^* = r_1 / \mathbf{k} \\ &-B_1^* = B_1 \\ &-\varphi_1^* = \varphi_1 / \mathbf{k}(\tau) \end{aligned} \tag{51}$$

Da bi se dobio prvobitni oblik jednačina (33,34) sa uvećanom periodom oscilovanja T_0, treba da se izvrši obrnuti prelaz na (49,50) koristeći se veličinama r^*, φ^*:

$$Y^* = \frac{T\varphi^*}{2\pi} + y_0(X, Y, C, \varphi^*) \tag{52}$$

$$\varphi^* = \frac{2\mathbf{k}(\tau)(t - t_0)}{T_0(x, c, \tau)} + C_m \tag{53}$$

Diferenciranjem (52,53) po t pri $\tau = x = \text{const}$, dobija se $\dot{Y}^* = \mathbf{k}(\tau)\mathbf{Y_0}(X, Y^*, \tau)$. Jednačine oblika analognog jednačinama (33,34) su:

$$\dot{X}^* = \varepsilon \mathbf{X_1}(X^*, Y^*, \tau) + \varepsilon^2(...) \tag{54}$$

$$\dot{Y}^* = \mathbf{k}(\tau)\mathbf{Y_0}(X^*, Y^*, \tau) + \varepsilon \mathbf{Y_1}(X^*, Y^*) \tag{55}$$

Jednačine (54 i 55) su dobijene na osnovu invarijantnosti rešenja prvog približenja metodom osrednjavanja. Jednačine (27) su dobijene iz uslova da amplituda brzo promenljive y i srednja vrednost sporo promenljive x_i bude ista kao odgovarajuće vrednosti koje bi se dobile rešenjem polaznih jednačina (21,22). U oba slučaja, nezavisno od toga da li se računaju srednje vrednosti izraza (28-32) ili (43-48), pogodnije je na veštački način smanjiti frekvencu - povećati periodu oscilovanja brzo promenljive y uvođenjem koeficijenta **k** u prvobitne, polazne jednačine. Očigledno preimućstvo, u odnosu na računanje srednjih vrednosti, jeste da se oblik jednačina koje se rešavaju ne menja, već se sa **k** utiče na pojedine članove jednačine koji bitno smanjuju periodu, što je i bila namera kada je vršeno osrednjavanje pojedinih članova. Pokazuje se da se za tip jednačina (21,22), oscilujuća vrednost oko srednje vrednosti sporo promenljive x_{i0} poveća za 1/k , a srednja vrednost brzo promenljive y ostaje ista, dok joj se amplituda y smanji proporcionalno **k** (sl.1, kriva b). Ostaje otvoreno pitanje izbora vrednosti za **k,** pošto nema smisla razmatrati njegove ekstremne vrednosti 0 i 1. Preporuka za izbor **k** nema, već ostaje da se njegova vrednost odredi numeričkim eksperimentom, što se može smatrati kao mala mana ove metode. Obično se nastoji prilikom izbora vrednosti za **k,** da se ključne veličine dotičnog mehaničkog sistema bitnije ne promene (kada je projektil u pitanju, to su elementi putanje, kao što su krajnji domet ili bočno odstupanje). Vrednost **k** se zbog toga uzima kao funkcija izvesnih veličina stanja kretanja sistema, a ne kao konstantna (tj. da figuriše u odgovarajućim jednačinama kao koeficijent). Izvesno je da od **k** zavisi skraćenje vremena proračuna, i dokazuje se da to skraćenje iznosi $\mathbf{k}^{1+1/n}$. Veličina n zavisi od greške δ akumulirane prilikom numeričke integracije na jednom koraku integracije veličine h i iznosi $\delta = O\left(h^n\right)$. Za metodu Runge-Kuta, korišćenu prilikom numeričke integracije, ako se posmatra samo jedna jednačina, n=5, pa skraćenje vremena proračuna iznosi približno $\mathbf{k}^{1.2}$. Ovo skraćenje svakako ne važi u potpunosti za sistem diferencijalnih jednačina, pošto svakoj od jednačina, po pravilu, odgovara različita vrednost za **k**, a **k**-ovi često i nisu koeficijenti već funkcije pojedinih veličina stanja kretanja.

Primer veštačkog povećanja periode oscilovanja

Izložena metodologija skraćenja vremena proračuna je demonstrirana [18,19] na proračunu putanje jednačina kretanja projektila sa šest stepeni slobode kretanja. Prvih šest diferencijalnih jednačina su neizmenjene [17] (str. 279, jed. 21 i 10), a sledeće tri uvođenjem $\mathbf{k}(\tau)$ su:

$$\dot{\omega} = k_7 V_r^2 + k_8 \omega V_r \tag{56}$$

$$\dot{\omega}_y = \mathbf{k}(\tau)\left[-\left(\frac{I_x}{I_y}\right)\omega\omega_z + \omega_z\omega_x + k_4 V_r\, w_r\right] - k_5\omega_y V_r + k_6 \omega v_r \tag{57}$$

$$\dot{\omega}_z = \mathbf{k}(\tau)\left[-\left(\frac{I_x}{I_y}\right)\omega\omega_y - \omega_x\omega_y - k_4 V_r\, v_r\right] - k_5\omega_z V_r + k_6 \omega w_r \tag{58}$$

Program u FORTRANU za proračun putanje projektila sa šest stepeni slobode kretanja opisan je u [20], a naziv je TPUT6. Modifikovane jednačine (57,58) se nalaze u potprogramu DJ6M, a aerodinamičke karakteristike tela projektila su date u potprogramu AD152U. Za ulazne podatke iz datoteke TRAGIK.dat, dati su izračunati elementi putanje projektila. Konstrukcioni podaci: kalibar d, masa m i polu-prečnici momenata inercije r_x, r_y za projektil su: d=0.152 (m); $\boldsymbol{m}$= 43.6 (kg); $\boldsymbol{r_x}$ =0.058 (m); $\boldsymbol{r_y}$ =0.170 (m). Normalne vrednosti prizemnih meteoroloških elemenata: pritiska H_0, temprature τ_0 i vetrova **W**x,z su: H_0 =1000.0 (mbar); τ_0 = 288.9 (°K); **W**x = 0.0 (m/s); **W**z = 0.0 (m/s).

Polazni elementi za proračun putanje projektila su:

t_0(s)	Y_0(m)	X_0(m)	Z_0(m)	V_0(m/s)	U_0(m/s)
0.0	0.0	0.0	0.0	0.0	535.0

θ_0(rad)	ψ_0(rad)	ω_0(rad/s)	ω_{y0}(rad)	ω_{z0}(rad)
1.22173	0.0	1600.0	0.0	5.0

Dobijeni elementi putanje projektila proračunom jednačina kretanja jesu:

	t_c(s)	Y_s(rad)	X_c(m)	Y_c(m)	Z_c(m)	V_c(m/s)
k =1	82.74140	8393.5	24556.2	0.0	2551.8	343.3
k =0.5	82.90392	8404.3	24720.0	0.0	678.0	343.3

	θ_c(rad)	ψ_c(rad)	ω_c(rad/s)	α_c(rad)	β_c(rad)
k =1	-1.0884	0.15906	1562.711	0.00052	-0.00490
k =0.5	-1.08779	0.07528	1562.624	0.00088	-0.00484

Vreme potrebno za proračun elemenata putanje bilo je:
k = 1; t_r =23'37"
k= 0.5; t_r =10'39"

Vidi se da je vreme proračuna elemenata putanje skraćeno za 2.3 puta. Skraćenje je postignuto uvođenjem koeficijenta **k**=0.5 u navedene jednačine, što izaziva produženje periode brzo oscilujućih veličina. Rezultati proračuna veličina stanja kretanja projektila dati uporedo se, u izvesnoj meri, razlikuju, što upućuje na zaključak da koeficijenat **k** nije dobro uveden u jednačine kretanja, ili da on treba da bude funkcija nekih veličina. Postignuto skraćenje vremena proračuna elemenata putanje za 2.3 puta može da se smatra kao skroman rezultat, dobijen primenom ove metode. Očekuje se da skraćenje vremena proračuna elemenata putanje projektila bude za red veličine veće od postignutog, pošto se u literaturi navodi da je ono bilo veće od 20, međutim, ovoliko skraćenje je dobijeno za uslove različite od ovde razmatranih uslova kretanja.

Zaključak

Istražene su neke od metoda za razdvajanje diferencijalnih jednačina kretanja koje su pogodne za primenu u slučaju žirostabilisanih projektila. U osnovi svih metoda leži izvesna smena promenljivih prvobitnog skupa jednačina (diferencijalnih), da bi se dobio drugi skup jednačina (diferencijalnih ali i integrodiferencijalnih, koje do sada nisu korišćene u dinamici leta) obično veći od prvobitnog dva puta, ali pogodniji za rešavanje i/ili aproksimacije. Ukazano je da metoda mehaničkog razdvajanja kretanja matematički posmatrano nije strogo definisana, a dobijene jednačine nisu potpune. Proizvoljnost se ogleda u usvajanju nepromenljivosti veličina sporog kretanja u jednačinama brzog kretanja, a nepotpunost u nedostatku mogućnosti da se razmatra karakter promene brzo promenljivih veličina, pošto se mogu samo nalaziti njihove vrednosti u položaju ravnoteže. Međutim, izloženim postupkom razdvajanja kretanja može da se razmatra stabilnost (nađu veličine koje je karakterišu, što nije bio cilj!) i nađu ekstremne vrednosti uopštenih koordinata brzo promenljivih. Proizlazi da sama ideja o uobičajenom pojmu „razdvajanje kretanja" nije ostvarena rešavanjem razdvojenih jednačina kretanja, ali je pokazano da je njena korist velika kada se primeni u druge svrhe.

Direktno razdvajanje kretanja korišćenjem integrodiferencijalnih jednačina, kao rezultat razdvajanja diferencijalnih jednačina, daje dve grupe jednačina. One su ekvivalentne s prvobitnim jednačinama zbog toga, što se samo pogodnom matematičkom manipulacijom bez ikakvih zanemarivanja, od jedne, dobiju dve grupe jednačina. Udvostručavanjem broja jednačina, bez uvođenja novih promenljivih, što je npr. slučaj kod kanonskih transformacija, stvara se mogućnost da nestanu neki članovi u dobijenim jednačinama ili da dobiju određenu vrednost. Takođe, dve ekvivalentne grupe jednačina umesto jedne, od kojih jedna opisuje brzo kretanje a druga sporo kretanje, pružaju mogućnost dobijanja aproksimativnog rešenja. Novina vezana za rešenje razdvojenih jednačina brzog kretanja je u tome, da se u njima s leve strane jednakosti nalaze promenljive sa znakom diferencijala, a istovremeno s desne strane jednakosti se nalaze iste promenljive sa znakom integrala. Prema tome, jednačine brzog kretanja nisu više diferencijalne nego integrodiferencijalne jednačine. Koliko je poznato autoru ovog rada, integrodiferencijalne jednačine nisu korišćene u dinamici leta (u aerodinamici jesu, ali kao poseban oblik zvan integralne), međutim njihovo rešavanje nije manje složeno od polaznih jednačina. Pošto za njihovo rešavanje treba koristiti nestandardne metode numeričke integracije (namenski urađene), rezultat nije moguće predvideti, a dobijeni ne može da se smatra pouzdanim i valjanim.

U grupu metoda za razdvajanje promenljivih spada i metoda za veštačko povećanje periode oscilovanja izvesnih veličina stanja kretanja, jer tada može da se koristi veći korak integracije. Metoda je jednostavna jer nisu potrebne međufaze u kojima se vrši transformacija polaznih jednačina da bi se dobio nov skup jednačina. Razlike između prvobitnih jednačina i novih jednačina nema, jer nove jednačine ostaju u nepromenjenom obliku, a pojedini članovi u novim jednačinama brzog kretanja su pomnoženi koeficijentom **k** čija je vrednost $0<\mathbf{k}<1$. Korišćenjem pravila tzv. adijabatskog invarijanta, prema ovoj istoj metodi može da se dobije drugi skup jednačina, dobijen uz uslov da u njima ostanu iste srednje vrednosti sporo promenljivih i amplitude brzo promenljivih kao u polaznim jednačinama. U novim jednačinama treba prethodno izračunati grupu osrednjenih integrala koji nisu tablični, a uz to zavise od velikog broja veličina stanja kretanja. Ove veličine stanja kretanja treba unapred znati kao tačne (koje se teško i sporo nalaze) da bi se našle vrednosti integrala a kasnije pomoću novodobijenih jednačina, i ovih integrala u njima, računati (brže i lakše) aproksimativna rešenja. Ipak novodobijene jednačine imaju, teorijski posmatrano, izvesnu vrednost, pošto bi njihova eventualna integracija mogla da se obavi s većim korakom po vremenu, ali se iz njih ne može videti koliko je povećanje periode brzih veličina, jer ono nije eksplicitno izraženo.

Literatura

[1] MOLČANOV,A.M. *Razdelenije dviženiji i asimptotičeskie metodi v teorii nelineinih kolebaniji.* Dokladi AN SSSR, T-136, 1961, no.5, p.1030-1033.

[2] GORELOVA,E.JA., STRGIN,V.V. Polnoe razdelenije dviženija v nekotorih sistemah giroskopičeskogo tipa. *Mehanika tverdogo tela*, 1985, no.5, p.8-13.

[3] GERASIMOV,B.P., KULČICKAJA,I.A. Ob odnošagovnom predstavlenii lineinih mnogošagovih metodov dlja obiknovennih differencialnih uravneniji. *Žurnal vič. mat. i mat. fiziki*, 1987, T-27, no.1, p.76-82.

[4] BORIZOV,V.I. Zadača o razdelenii dviženii v dinamike poleta. *Mehanika tverdogo tela,* 1981, no.5, p.3-11.

[5] VASILEVA,A.B. Asimptotika rešeniji nekotorih zadač dla obiknovennih nelinejinih differencialnih uravneniji s malim parametrom pri starših proizvodnih. *Uspehi matematičeskih nauk,* 1963, T-XVIII, vol.3(111), p.15-86.

[6] AKULENKO,L.D. Približennoe rešenie nelineinih zadač optimalnog upravlenija kolebatelnim processami metodom kanoničeskogo razdelenija dviženiji. *Prikladnaja mat. i meh.,* 1976, T-40, p.1024-1033.

[7] ŽURAVLEV,V.F. Metod rjadov LI v probleme razdelenija dviženija v nelinejnoj mehanike. *Prikladnaja matematika i meh.,* 1983, T-47, vol.4, p.559-565.

[8] BLEKHMAN,I.I. *The development of the concept of direct separation of motion in nonlinear mechanics, Advances in theoretical and applied mechanics*. Mir, Moscow, 1981, p.127-147.

[9] KARTVELISVILI,N.A., GALAKTIONOV,JU.I. *Idealizacija složnih dinamičeskih sistem.* Nauka, Moskva, 1976.

[10] MULLIKIN,T.W. A nonlinear integrodifferential equations in radiative transfer. *Journal of the Soc. Ind. Appl. M.,* 1965, vol.13, no.2, p.338-409.

[11] KONSTANTINOV,M.M., BAJINOV,D.D. *Nelinejinie kolebanija vjazko-uprugogo tela pod deistviem periodičeskih sila.* Jug. društvo za mehaniku. Teorijska i primenjena mehanika br-3, Beograd, 1977, p.23-28.

[12] IMANALIEV,M.I.-redaktor. *Isledovanija po integrodifferencijalnim uravnenijam.* Frunze, 1980.

[13] JAROŠEVSKI,V.A. *Dviženije neupravljaemogo tela v atmosfere.* Mašinostroenije, Moskva, 1978, p.167.

[14] JAROŠEVSKI,V.A., VOEJIKOV,V.V. Metod uskorenija rasčeta bistrih kvaziperiodičeskih dviženija na vičislitelnih mašinah. *Žurnal vič. mat i mat. fiz.,* 1964, T-4, no.1, p.168-173.

[15] BELKONOV,V.M., BELKONOV,I.V., ZABOLOTNOV,JU.M. Metod uskorenogo modelirovanija kvaziperiodičeskogo dviženija v atmosfere tverdogo počti osesimetričnogo tela. *Mehanika tverdogo tela,* 1984, no.2, p.43-50.

[16] MITROPOLJSKI,JU.A, HOMA,G.P. *Matematičeskoe obosnovane asimptot. metodov nelin. mehaniki.* Naukova dumka, Moskva, 1983, p.11-20.

[17] JANKOVIĆ,S. *Spoljna balistika.* VIZ, Beograd, 1977, p. 279.

[18] PETROVIĆ,D. *Metode za ubrzanje proračuna putanje sa 6SSK.* int. dok. VTI-02-01-0070, Vojnotehnički institut, Beograd, 1988.

[19] PETROVIĆ,D. *Istraživanje efekata asimetrije u dinamici brzo i sporo rotirajućih projektila.* doktorska diseretacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1993.

[20] GAJIĆ,M. i sar. *Programska rešenja spoljne balistike.* Biblioteka SB programa, int. dok., VTI-02-27-147, Vojnotehnički institut, Beograd, 1987.

Rad primljen: 28.5.2001.god.