UDK: 517.58:519.876(047)=861
COSATI: 12-01, 14-07

Jedan postupak za određivanje nula karakterističnog polinoma

Dr Nenad Dodić, dipl.inž.[1)]

Razmatra se problem određivanja nula karakterističnog polinoma. Problem je veoma značajan za teoriju sistema, jer nule karakterističnog polinoma određuju stabilnost i ponašanje linearnog dinamičkog sistema. Predlaže se jednostavan i efikasan postupak za određivanje svih nula karakterističnog polinoma, zasnovan na primeni Njutn-Rapsonove metode i postupnom snižavanju reda polinoma. Efikasnost postupka je ilustrovana primerima.

Ključne reči: **Karakteristični polinom, nule polinoma, teorija sistema, linearni sistemi, Njutn-Rapsonova metoda, numerička metoda, algoritam.**

Uvod

MATEMATIČKO modeliranje i primena modela u analizi i projektovanju sistema već decenijama nalaze značajno mesto u svim tehničkim i drugim prirodnim disciplinama, pa i u savremenoj ekonomiji. Linearni matematički modeli dinamičkih sistema - kontinualni i diskretni, kao najjednostavniji i potpuno proučeni modeli, najčešće se koriste u teoriji i praksi. Jedan od najznačajnijih pojmova u teoriji linearnih sistema je karakteristični polinom.

Posmatran je, na primer, linearni analogni sistem proizvoljnog n-tog reda, definisan skalarnom diferencijalnom jednačinom:

$$a_n d^n y/dt^n + \ldots + a_1 dy/dt + a_0 y = b_0 u + \ldots + b_m d^m u/dt^m \quad (1)$$

gde su: u - ulaz, y - izlaz, a $a_0,\ldots,a_n$, $b_0,\ldots,b_m$ koeficijenti modela sistema. Karakteristični polinom ovog sistema je:

$$f_n(s) = a_n s^n + a_{n-1} s^{n-1} + \ldots + a_1 s + a_0 \quad (2)$$

Ovaj polinom se može prikazati i u sledećem obliku:

$$f_n(s) = a_n(s - s_0)(s - s_1)\cdots(s - s_n) \quad (3)$$

gde su $s_1, s_2, \ldots, s_n$ nule karakterističnog polinoma:

$$f_n(s_i) = 0\,, \quad i = 1,2,\ldots,n$$

Impulsni odziv (izlaz sistema pri dejstvu impulsne funkcije ulaza) može da se predstavi u obliku:

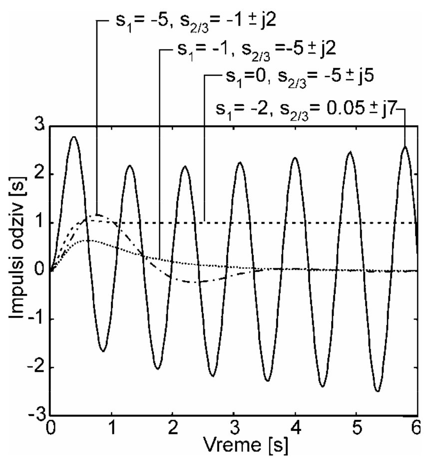
$$y(t) = A_0 + A_1 e^{s_1 t} + \cdots + A_n e^{s_n t}$$

gde su s_1, s_2, ..., s_n jednostruke nule karakterističnog polinoma, od kojih neposredno zavisi oblik i konvergencija impulsnog odziva. S obzirom da se odziv linearnog sistema na proizvoljnu ulaznu funkciju može da dobije konvolucijom impulsnog odziva i ulazne funkcije, jasno je koliki značaj imaju nule karakterističnog polinoma za analizu i projektovanje linearnog sistema: njegove nule određuju karakter ponašanja linearnog sistema, tj. njegovu apsolutnu i relativnu stabilnost.

Karakteristični polinom ima realne koeficijente. Njegove nule mogu da budu realne ili kompleksne. Kompleksne nule uvek obrazuju konjugovano-kompleksne parove, tj. ako je

$$s_1 = R_1 + jI_1\,, \; j = \sqrt{-1}$$

nula polinoma, onda je i $s_2 = R_1 - jI_1$ nula istog polinoma. Na sl.1 je prikazano na koji način ponašanje linearnog analognog sistema trećeg reda zavisi od rasporeda nula karakterističnog polinoma.



Slika 1. Impulsni odziv za različite vrednosti nula karakterističnog polinoma

Različiti prilazi problemu određivanja nula polinoma

Postoje obrasci koji daju tačne vrednosti nula polinoma (2) [1,2], u slučaju da njihov red nije veći od četiri. Ti obrasci su jednostavni kada je red polinoma jedan ili dva, a za polinome trećeg i četvrtog reda mogu biti veoma složeni, zavisno od vrednosti koeficijenata karakterističnog polinoma, odnosno tzv. diskriminante [1]. Zato se često već za polinom trećeg reda koriste približni numerički postupci. Nule polinoma viših redova (n>4) se određuju približno.

[1)] Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

Postoje tri prilaza numeričkom rešavanju posmatranog problema. To su:

- primena numeričkih metoda za rešavanje nelinearne jednačine $F(s)=0$ [3,4,5]. U slučaju karakterističnog polinoma, to je tzv. karakteristična jednačina:

$$f_n(s) = 0 \tag{4}$$

- razlaganje (faktorizacija) polinoma n-tog reda na proizvod kvadratnog trinoma i polinoma reda n-2 i ostatak, i minimizacija ostatka [2,5];
- formiranje kvadratne matrice **A** takve, da je det(s**I**-**A**)= =$f_n(s)$, gde je "det" determinanta a **I** jedinična matrica, i određivanje sopstvenih vrednosti matrice **A**, koje su ujedno i nule karakterističnog polinoma (2) [4,6].

Pregled značajnijih metoda koje mogu da se upotrebe za rešavanje karakteristične jednačine (4), odnosno, određivanje nula karakterističnog polinoma je dat u tabeli 1. Među njima se izdvaja metoda Njutna i Rapsona zbog svoje izuzetne jednostavnosti (naročito kada se primenjuje na karakteristični polinom) i brzine konvergencije, pa se često primenjuje za rešavanje najrazličitijih problema.

Tabela 1. Prilazi i metode određivanja nula polinoma

Reše-nja	Prilaz	Metode		Litera-tura
tačna	1. Primena obrazaca	1.1.	Obrazac za linearnu jednačinu (n=1)	[1]
		1.2.	Obrazac za kvadratnu jednačinu (n=2)	[1,2]
		1.3.	Kardanovi obrasci za kubnu jednačinu (n=3),	[1,2]
		1.4.	Dekart-Ojlerovo rešenje kvadrične jednačine (n=4),	[1]
p r i b l i ž n a	2. Iterativno direktno određivanje korenova nelinearne jednačine $f(s)$=0	2.1.	Metoda iteracije	[3,4]
		2.2.	Metoda ponavljanja (binarno pretraživanje)	[4]
		2.3.	Metoda pogrešnog položaja (linearna interpolacija)	[4,5]
		2.4.	Metoda sečice	[3,4,5]
		2.5.	Njutn-Rapsonova metoda	[3,4,5]
		2.6.	Hejlijeva metoda	[4]
		2.7.	Stefensenova metoda	[4]
	3. Razlaganje polinoma n-tog reda na proizvod kvadratnog trinoma i polinoma reda n-2 sa iterativnom minimizacijom rezidiujuma	3.1.	Metoda Lina	[5]
		3.2.	Metoda Bearstoua	[2]
	4. Određivanje sopstvenih vrednosti* kvadratne matrice sa datom karakterističnom jednačinom (4)	5.1.	LR-metoda (metoda "levo-desno")	[4]
		5.2.	QR-algoritam	[4]
		5.3.	Rejli-Ricova metoda	[4]
		5.4.	QZ-algoritam	[6]
* -	sopstvene vrednosti navedene matrice su identički jednake nulama zadatog karakterističnog polinoma (2)			

Njutn-Rapsonova metoda

Rešavanje jednačine (4) se primenom metode Njutna i Rapsona svodi na iterativnu primenu izraza:

$$s^* = s_0 - f_m(s_0)/f_m'(s_0) \tag{5}$$

gde je s_0 je prethodno, a s^* novo rešenje, uz uslov da je:

$$f_m'(s_0) = df_m(s_0)/ds_0 \neq 0$$

Izraz (5) se dobija razvijanjem $f_m(s)$ u Tejlorov red u okolini tačke s_0 i zanemarivanjem članova čiji je red viši od jedan [3]. Uslov je da je funkcija $f_m(s)$ dva puta diferencijabilna, što je za karakteristični polinom uvek ispunjeno. Izraz (5) se prvo primeni na neko usvojeno početno rešenje s_0, zatim se vrši smena $s_0 = s^*$ i opet primenjuje (5). Postupak se ponavlja sve dok ne bude zadovoljen određeni kriterijum, odnosno dok greška rešenja ne postane dovoljno mala. S obzirom da je karakteristični polinom analitička funkcija kompleksnog argumenta, jasno je da se (5) može koristiti za nalaženje i realnih i konjugovano-kompleksnih nula karakterističnog polinoma.

Uslov konvergencije Njutn-Rapsonove metode ka određenoj nuli funkcije f_m jeste da na intervalu između tražene nule i usvojene početne vrednosti s_0, prvi i drugi izvod $f_m(s)$ budu stalnog znaka i različiti od nule [3]. To znači da na pomenutom intervalu funkcija $f_m(s)$ nema ekstremume i prevojne tačke. U tom slučaju konvergencija ka rešenju je kvadratna, dakle izuzetno brza. Ako to nije ispunjeno, u toku iterativne primene (5) mogu da nastupe sledeći slučajevi:

- Radna tačka s_0 može da ima takvu vrednost, da bude $f_m(s_0)$=0 za koju (5) nije definisano, pa iterativni postupak mora da se prekine.
- Postupak može da divergira, krećući se duž asimptote funkcije čija se nula određuje, ili da konvergira ka nekoj drugoj nuli, različitoj od željene. Ovaj slučaj je nebitan kada se određuju sve nule karakterističnog polinoma, jer redosled određivanja nula nije od posebnog značaja.
- Radna tačka s_0 može da uzme takvu vrednost da $f_m'(s_0)$ promeni znak i uzme jako malu apsolutnu vrednost, tako da $|s^* - s_0|$ postane jako veliko, posle čega postupak određivanja nule može da divergira ili konvergira, pri čemu je znatno produženo trajanje konvergencije ka rešenju.
- Radna tačka s_0 pri svom kretanju može da "preskoči" kritične oblasti (male okoline ekstremnih i prevojnih tačaka) i nesmetano nastavi konvergenciju ka traženoj nuli.

Navedeni uslov konvergencije predstavlja, dakle, dovoljan ali ne i neophodan uslov. U [4] se ističe da naročit problem predstavljaju dvostruke nule funkcije, tj. one u kojima je prvi izvod funkcije jednak nuli. Treba napomenuti, da i najsofisticiraniji postupci, kao što je QZ-algoritam [6], koji je veoma složen, računski obiman i zahteva pamćenje velikog broja promenljivih veličina, može, u određenim slučajevima, da divergira. Najpoznatiji matematički program MATLAB koristi ovaj algoritam za nalaženje nula karakterističnog polinoma (funkcija ROOTS) i ima ugrađenu poruku "postupak ne konvergira", za slučaj da ni posle pedeset iteracija ne dođe do konvergencije.

U nastavku se izlaže postupak nalaženja približnih vrednosti nula karakterističnog polinoma koji koristi Njutn-Rap-sonovu metodu, a prevazilazi problem divergencije.

Postupak određivanja svih nula karakterističnog polinoma

Primenom iterativnog izraza (6) može da se dobije samo jedna nula polinoma. Kako posle određivanja jedne nule odrediti sledeću nulu polinoma? Najočigledniji način jeste da se postupak ponovi za neku novu početnu vrednost s_0, koja je dovoljno daleko od prethodno određene nule, a dovoljno blizu nekoj drugoj nuli polinoma. Kako nule karakterističnog polinoma (2):

$$s_i = \operatorname{Re} s_i + j \cdot \operatorname{Im} \quad s_i = R_i + jI_i \,,\; i = 1, 2, \ldots, n$$

mogu da se nađu bilo gde u kompleksnoj ravni R-jI, to nalaženje svih n-nula na takav način može da predstavlja izuzetno zametan posao sa puno pokušaja i pogrešaka.

Zato je korišćen primereniji pristup: nakon što se odredi neka nula polinoma, red polinoma se snižava, tako da novo-dobijeni polinom sadrži sve nule polaznog polinoma, osim onih koje su već određene. U sledećem slučaju se određuje nula tog redukovanog polinoma, bez opasnosti da postupak konvergira ka ranije pronađenoj nuli. Redukcija polinoma se vrši posle svake izračunate nule, dok se ne odrede sve nule polinoma.

Neka je $f_m(s)$ polinom m-tog reda, a s_i jedna njegova nula. Shodno (3), f_m može da se podeli binomom $(s - s_i)$ bez ostatka:

$$f_{m\text{-}1}(s) = f_m(s)/(s\text{-}s_i) \tag{6}$$

$f_m(s)$ i $f_{m\text{-}1}(s)$ imaju m-1 zajedničkih nula. Treba napomenuti da koeficijenti polinoma $f_{m\text{-}1}(s)$ u opštem slučaju imaju kompleksne koeficijente. Nalaženje nule primenom izraza (5) i deljenje binomom (6) se ponavljaju, počev od m=n do m=2 i redom određuju nule s_1, s_2, ..., s_n. Neka je:

$$s_0 = R_0 + jI_0 \,,\; s^* = R^* + jI^*$$

Iterativnom primenom izraza (5) se prestaje, kada se ispuni uslov:

$$\left|R^* - R_0\right| < e \;\text{ i }\; \left|I^* - I_0\right| < e \tag{7}$$

gde je e dopuštena relativna greška nule $f_n(s)$.

Da bi se obezbedilo od deljenja s nulom, (5) se ne primenjuje kada je:

$$|f_m'(s)| < \gamma ,\; \gamma > 0 \tag{8}$$

gde se γ bira tako da deljenje $f_m(s)$ sa γ ne dovodi do preko-račenja opsega realnih brojeva na korišćenom računaru. U slučaju da važi (8), treba da se promeni s_0=R_0+jI_0:

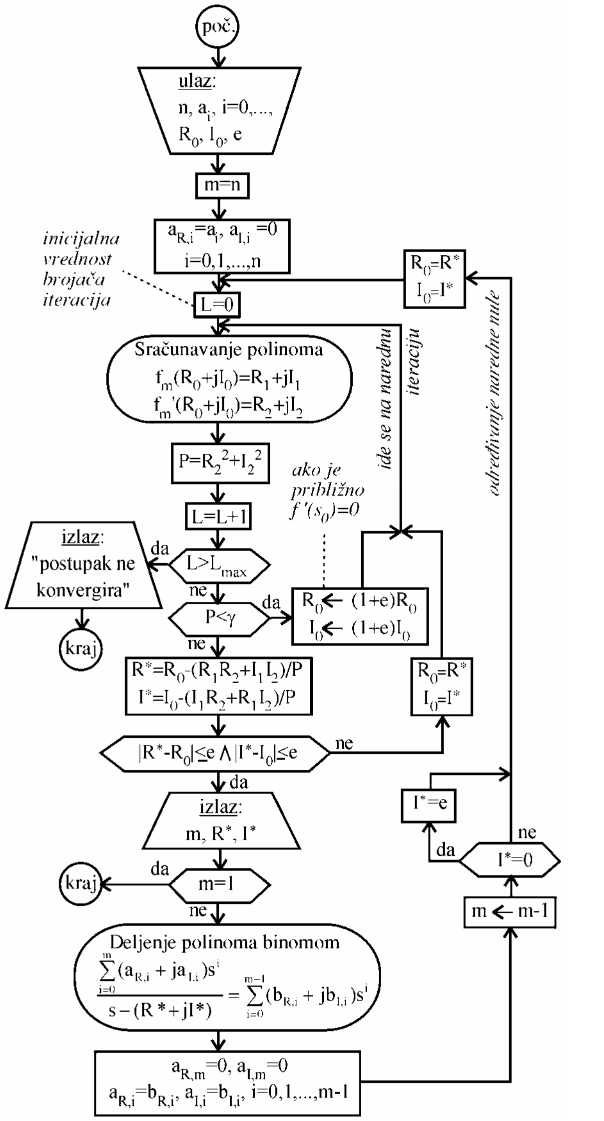
$$R_0 \leftarrow (1+e)R_0 \,,\; I_0 \leftarrow (1+e)I_0$$

gde je e proizvoljan mali realan broj, i da se izraz (5) primeni na tako promenjeno s_0. Znak "←" se tumači kao "postaje".

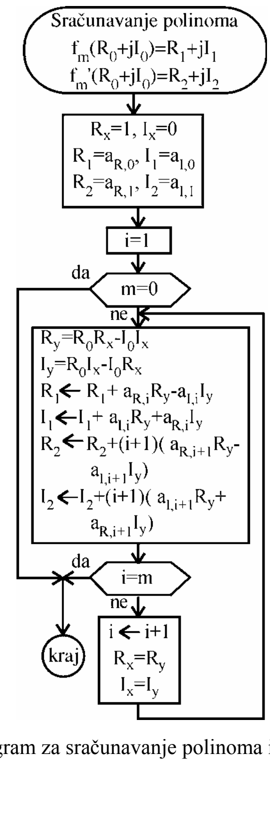
Ako uslov (7) ne bude ispunjen ni posle zadatog graničnog broja iteracija L_{max}, prekida se postupak određivanja nula. Time se obezbeđuje da odgovarajuća računarska aplikacija ne ostane u beskonačnoj petlji, ako nastupe nepredviđeni numerički problemi.

Posle određivanja jedne nule s_i, kao početno rešenje za određivanje naredne nule s_{i+1} se usvaja: $s_0 = s_i$. Ako je, pri tom, Im s_0 = I_0 = 0, usvaja se I_0 = e, kako bi se izbegla divergencija u slučaju da polinom $f_m(s)$, m=n-i+1, nema realnu nulu (ako je s_0=R_0+j0 onda (5) daje uvek s^*=R^*+j0).

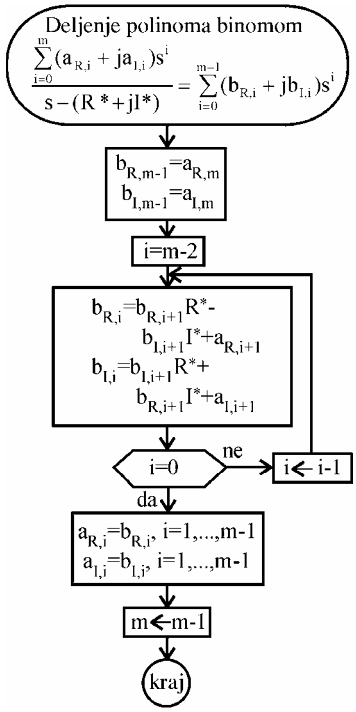
Detaljni algoritam, koji realizuje opisani postupak, je prikazan u obliku dijagrama toka na slikama 2, 3 i 4. Radi bolje preglednosti, delovi algoritma za izračunavanje polinoma $f_m(s_0)$, $f_m'(s_0)$ i deljenje polinoma binomom dati su kao posebni algoritamski potprogrami.



Slika 2. Glavni tok algoritma za određivanje nula karakterističnog polinoma



Slika 3. Potprogram za sračunavanje polinoma i njegovog izvoda



Slika 4. Potprogram za deljenje polinoma binomom

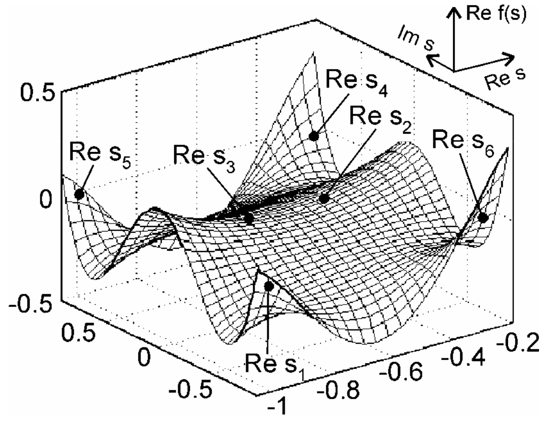
Opisani postupak podrazumeva da se deljenje (6) vrši bez ostatka, iako se koriste približne vrednosti nula s_i, i=1,2,...,n-1. To dovodi do izvesne akumulacije grešaka kroz postupak snižavanja reda polinoma. Da bi se dobila što tačnija rešenja, opisani postupak može da se dopuni na sledeći način: pošto se odrede sve nule polinoma, Njutn-Rapsonova metoda se primenjuje još n-1 puta na $f_n(s)$ i nule s_i, i=2,3,...,n izračunate postupkom redukcije reda polinoma, kao početna rešenja. S obzirom da su tada početna rešenja bliska konačnim, broj neophodnih iteracija biće veoma mali.

Primeri

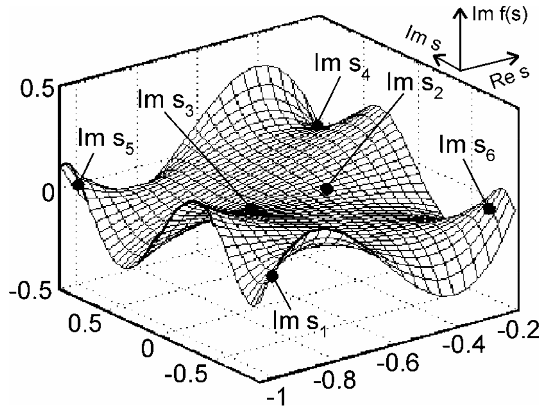
U tabeli 2 je dat karakteristični polinom stabilnog sistema šestog reda, koji ima dve realne nule i dva para konjugovano kompleksnih nula. U istoj tabeli su date tačne vrednosti nula, a zadata je i dopuštena greška rešenja: e=0,0005. Zahteva se tačnost rešenja na tri decimale. Slike 5 i 6 prikazuju grafikone realnog i imaginarnog dela zada-tog polinoma $f_6(s)$ u funkciji realnog i imaginarnog dela kompleksnog argumenta s, kao i raspored nula polinoma. Uočeno je da u prostoru između nula polinom ima pet ekstremnih tačaka.

Tabela 2. Numerička rešenja - primer 1

Zadati polinom $f_6(s)$	s^6+3,75s^5+7,0125s^4+7,638125s^3+5,4762125s^2+ +2,45565625+s+0,476821875			
Početno rešenje s_0	-1,5 -j1,5			
Zadata greška e	0,0005			
Redni broj	Broj iteracija	Numerička rešenja	Tačne nule	Moduli grešaka
1	8	−1,0000001 - j0,8999995	−1 +j0,9	0,000005
2	10	−0,5000043 – j0,000052	−0,5	0,000067
3	4	−0,7499778 + j0,0000243	−0,75	0,000033
4	6	−0,2500225 + j0,7999983	−0,25 +j0,8	0,000030
5	5	−0,9999805 + j0,8999797	−1 +j0,9	0,000028
6	3	−0,2500211 – j0,7999976	−0,25 –j0,8	0,000021

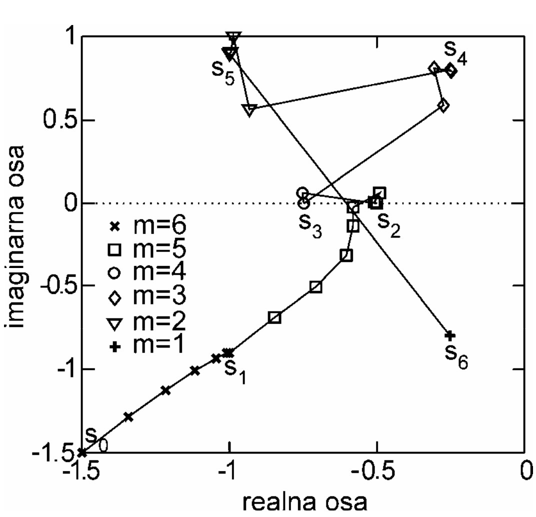


Slika 5. Grafikon realnog dela karakterističnog polinoma u funkciji kompleksnog argumenta



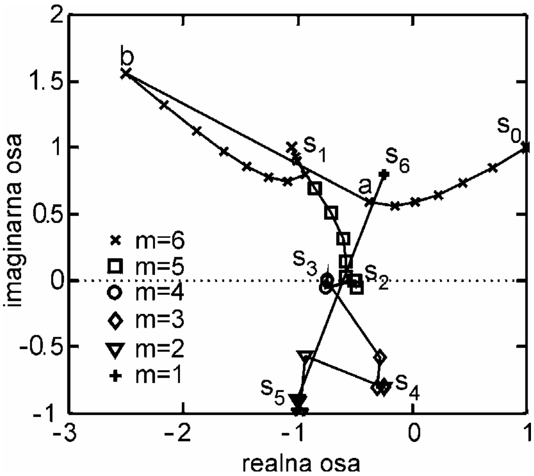
Slika 6. Grafikon imaginarnog dela karakterističnog polinoma u funkciji kompleksnog argumenta

Opisanim postupkom su izračunate sve nule datog polinoma za početno rešenje s_0 = -1,5-j1,5, pri čemu je Njutn--Rapsonova metoda korišćena šest puta (za m=6,5,...,1), a red polinoma redukovan pet puta. Rezultati su dati u tabeli 2. Slika 7 prikazuje putanju konvergencije (geometrijsko mesto međurešenja). Uočena je uniformna konvergencija ($|s^*$ - $s_0|$ se uvek progresivno smanjivalo). Dobijeni rezultati su tačni na četiri decimale, što je za red veličine bolje nego što je zahtevano. To je karakteristično za metode s kvadratnom konvergencijom, kakva je Njutn-Rapsonova metoda, kada je ispunjen uslov konvergencije.



Slika 7. Putanja konvergencije za početno rešenje s_0=-1,5-j1,5

Nule istog polinoma računate su i za početno rešenje s_0=1+j1, sl.8. U ovom slučaju je, prilikom određivanja prve nule, radna tačka s_0 dospela u tačku koja je u neposrednoj blizini ekstremne tačke karakterističnog polinoma $f_6(s)$ (tačka **a**, sl. 8). S obzirom da je izvod $f_m'(s_0)$ za dato s_0 iznenada postao veoma mali, došlo je do trenutne divergencije i značajnog povećanja vrednosti $|s^*-s_0|$, odnosno Njutn-Rap-sonov postupak se našao u tački **b** (sl.8), posle čega je ponovo uspostavljena konvergencija, što je povećalo broj iteracija za određivanje prvog rešenja, ali su, i pored toga, konačna rešenja bila iste tačnosti kao u prethodnom slučaju.



Slika 8. Putanja konvergencije za početno rešenje s_0=1+j1

Drugi primer je karakteristični polinom koji ima dvostruku realnu nulu i dvostruki par konjugovano-kompleksnih nula (tabela 3). Zahtevana je za red veličine veća tačnost (e=0,00005) nego u prethodnom primeru. Izabrano je početno rešenje koje je izuzetno udaljeno od oblasti u kojoj su smeštene nule polinoma s_0 = 1000 + j1000. Uočeno je da se broj iteracija značajno povećao u odnosu na prethodni primer, a dobijena rešenja su zahtevane tačnosti (tabela 3).

Tabela 3. Numerička rešenja - primer 2

Zadati polinom f_6(s)		$s^6+8s^5+28,5s^4+56,5s^3+65,0625s^2+40,625s+10,5625$		
Početno rešenje s_0		1000 + j1000		
Zadata greška e		0,00005		
Redni broj	Broj iteracija	Numerička rešenja	Tačne nule	Moduli grešaka
1	58	-0,999996-j0,000034	-1	0,000034
2	1	-0,999996-j0,000034	-1	0,000034
3	28	-1,500002 + j0,999968	-1,5+j1	0,000038
4	1	-1,499998 + j1,00003	-1,5+j1	0,000030
5	17	-1,500004 - j0,999960	-1,5-j1	0,000057
6	1	-1,500004 - j0,999960	-1,5-j1	0,000057

Ovakvo povećanje broja iteracija nije toliko uslovljeno većom zahtevanom tačnošću i lošim izborom početnog rešenja, koliko time što su gradijenti polinoma u okolini svih njegovih nula veoma mali, što je veoma nepovoljno, ne samo za Njutn-Rapsonovu metodu, već i za sve druge metode direktnog numeričkog određivanja nula funkcije (tabela 1). I pored navedenih numeričkih poteškoća, postignuta je zahtevana tačnost rešenja.

Prethodni primer ilustruje veliku pouzdanost predloženog postupka. Kada se koristi aritmetika pokretnog zareza ("floating point") dvostruke preciznosti ("double precision" računarska aritmetika) i usvoji dovoljno malo e u uslovu (7), tada nije neophodno dodatno povećanje tačnosti rešenja ponavljanjem primene Njutn-Rapsonove metode na $f_n(s)$ ($m \equiv n$). Dati primeri su realizovani na računaru PENTIUM, s tačnošću aritmetike pokretnog zareza od 19 decimalnih cifara.

Na kraju, jedan koristan savet: kada se piše računarski program za nalaženje nula karakterističnog polinoma visokog reda u programskom jeziku C, sve realne promenljive (varijable) treba deklarisati kao "long double", odnosno kao "LONGREAL" kada se koristi programski jezik PASCAL, a "DOUBLE PRECISION" kada se koristi FORTRAN. To obezbeđuje maksimalnu tačnost računanja.

Zaključak

Problem rešavanja karakteristične jednačine linearnog sistema (4), odnosno nalaženja svih nula karakterističnog polinoma (2) proizvoljnog reda je izuzetno značajan za inženjere koji se bave automatskim upravljanjem, ali i sve druge koji u svom radu imaju potrebu da rešavaju linearne diferencijalne jednačine i sisteme linearnih diferencijalnih jednačina visokih redova. Problem može uspešno da se reši sukcesivnom primenom Njutn-Rapsonove metode i redukcije reda polinoma, na način opisan u radu. Predloženi postupak rešavanja ovog problema je vrlo pouzdan i tačan, a jednostavniji je od drugih postupaka sličnih performansi. Veoma je pogodan za programiranje, jer ima mali broj koraka i koristi isključivo aritmetiku realnih brojeva.

Kao početno rešenje postupka može da se usvoji praktično bilo koji kompleksan broj s_0, s tim da treba izbegavati vrednosti za koje je prvi izvod karakterističnog polinoma jednak nuli. Korišćenje realnog broja kao početnog rešenja se ne preporučuje, jer može da dovede do divergencije postupka.

Opisani postupak je uspešno korišćen dugi niz godina bez problema divergencije postupka, koji se, teorijski posmatrano, ipak može pojaviti. Ako do divergencije dođe, postupak treba ponoviti s drugim početnim rešenjem (s_0) i drugom vrednošću dopuštene greške (e).

Literatura

[1] KORN,G., KORN,T. *Mathematical Handbook for Scientists and Engineers.* McGrow Hill, New York, 1961.

[2] SHEDDON,I. *Encyclopaedic Dictionary of Mathematics for Engineers and Applied Statistics.* Pergamon Press, New York, 1976.

[3] SIMONOVIĆ,V. *Numeričke metode.* Mašinski fakultet, Beograd, 1979.

[4] CHURCHOUSE,R. *Handbook of Applied Mathematics - Vol. III: Numerical Methods.* John Wiley and Sons, Chichester, 1981.

[5] SHOUP,T. *Applied Numerical Methods for the Microcomputers.* Prentice/Hall. Englewood Cliffs, 1984.

[6] MOLER,C., STEWART,G. An Algorithm for Generalized Matrix Eigenvalue Problems. *SIAM Journal on Numerical Analysis,* April 1973, vol.10, no.2, p.241-256.

Rad primljen: 13.3.2001.god.