UDK: 681.511.2.037:517.938(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova: retrospektiva rezultata

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]
Vesna Drakulić, dipl.inž.[1)]

Deskriptivni sistemi su predstavljeni u matematičkom smislu kombinacijom diferencnih i algebarskih jednačina. Algebarske jednačine predstavljaju ograničenje koje opšte rešenje mora da zadovolji u svakom trenutku. Dat je iscrpan, hronološki pregled rezultata koji se bave problematikom stabilnosti ove klase sistema u smislu Ljapunova. Navedene su brojne definicije, a kroz selektivno odabrane teoreme su dati najnoviji publikovani rezultati, koji specifikuju uslove stabilnosti i asimptotske stabilnosti autonomnih, linearnih, diskretnih, *kako regularnih tako i iregularnih* deskriptivnih sistema.

Ključne reči: **Diskretni sistemi, deskriptivni sistemi, stabilnost u smislu Ljapunova, matrična Ljapunovljeva jednačina, osobina privlačenja nultog ravnotežnog stanja.**

Uvod

DISKRETNI deskriptivni sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane *kombinacijom algebarskih i diferencnih jednačina,* što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja i onemogućava njihovo rešavanje uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje "*normalnih*" sistema.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju odnosno rešavanju dela sistema koji sadrži diferencni deo.

Složena priroda diskretnih deskriptivnih sistema prouzrokuje mnoge teškoće u njihovom analitičkom i numeričkom proučavanju, a koje se ne javljuju u proučavanju tzv. *normalnih sistema*. Pitanja postojanja rešenja, njegove jedinstvenosti i određivanje fundamentalne matrice, znatno otežava njihovu analizu i sintezu.

U tom smislu su od posebne važnosti, pitanja postojanja i jedinstvenosti rešenja, konzistentnih početnih uslova i impulsnog ponašanja. Neka od ovih pitanja, kao i prednosti u korišćenju matematičkih modela iskazanih deskriptivnom formom, bila su predmet razmatranja u radu *Debeljković et al.(2001.a)* [1], a očekuje se da će se kroz nekoliko sledećih radova podrobno razjasniti složena priroda i karakter ove posebne klase sistema, *Debeljković et al. (2001.b,2001.c)* [2,3].

Pregled najnovijih rezultata i iscrpan uvid u do sada publikovane radove, u oblasti kontinualnih singularnih i diskretnih deskriptivnih sistema, može se naći u sledećim referencama: *Bajić (1992)* [4], *Campbell (1980, 1982)* [5,6], *Lewis (1986, 1987)* [7,8], *Debeljković et al. (1996.a, 1996.b, 1998.a)* [9,10,11] i u dva tematska broja časopisa *Circuits, Systems and Signal Procesing (1986, 1989).* Ako je reč samo *o diskretnim deskriptivnim sistemima,* najbolja spoznaja aktuelnih rezultata može da se nađe u *Debeljković et al. (1998.a)* [11].

Matematički opis autonomnih *diskretnih, linearnih, deskriptivnih* sistema, u prostoru stanja, dat je u opštem slučaju:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) \ , \quad \mathbf{x}(k_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

ili:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_1\mathbf{x}_1(k) + A_2\mathbf{x}_2(k) \tag{2a}$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(k) + A_4\mathbf{x}_2(k) \tag{2b}$$

U jednačini (1), $\mathbf{x}(k) \in \Re^n$ je deskriptivni vektor stanja s kvadratnim matricama E, $A \in \Re^{nxn}$, i s matricom E *obavezno singularnom.*

U jednačini (2a-2b) $\mathbf{x}_1(k) \in \Re^{n_1}$, $\mathbf{x}_2(k) \in \Re^{n_2}$ su podvektori stanja, a matrice A_i, i=1,…,4 su definisane nad poljem realnih brojeva dimenzija $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$, i $n_2 \times n_2$, sledstveno.

Pregled postignutih rezultata u izučavanju stabilnosti singularnih sistema u smislu Ljapunova

Razmatrani su *samo* postignuti doprinosi izučavanju linearnih, diskretnih deskriptivnih sistema. Analiza najznačajnijih ovde razmatranih rezultata data je

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

hronoloskim redosledom.

Kada su u pitanju *diskretni deskriptivni sistemi*, prvi rezultati se vezuju za rad *Owens, Debeljković (1985)* [12]. Autori su izložili geometrijski opis potprostora konzistentnih početnih uslova koji generišu sekvencu rešenja ($\mathbf{x}(k)$:k=0,1,…). Dobijeni rezultati su iskazani direktno preko bazičnih matrica E i A, tako da su izbegnute dodatne algebarske transformacije, koje obično opterećuju većinu procedura za ispitivanje stabilnosti sistema. Predloženi geometrijski prilaz, ponudio je ispitivanje dinamičkih osobina ove klase sistema preko "slabe" *deskriptivne diskretne matrične jednačine Ljapunova.* Do nedavno*) testiranje tih rezultata je bilo veoma složeno, jer je pozitivna određenost relevantnih matrica bila zahtevana samo na određenom podskupu prostora stanja, a ne na njegovoj sveukupnosti.

U radovima *Erić et. al. (1995)* [13], *Dihovični et al. (1996)* [32], *Debeljković et al. (1998.b)* [14], istraživano je postojanje diskretnih sekvenci koje teže ishodištu prostora stanja. Koristeći Ljapunovljevu metodu, bilo je omogućeno razmatranje kako *regularnih*, tako i *iregularnih* diskretnih singularnih sistema. Koristeći pogodnu linearnu nesingularnu transformaciju, polazni sistem preveden je u svoju *normalnu kanoničku formu*, koja se pokazala kao izuzetno pogodna za utvrđivanje potklase mogućih rešenja (sekvenci) koje poseduju razmatranu osobinu. Tom prilikom definisan je i određen "*potencijalni* (*slabi*) *domen privlačenja*" nultog ravnotežnog stanja.

U monografiji *Debeljković et al. (1988.a)* [11] data je diskretna verzija rezultata izloženog u *Pandolfi (1980),* [15] u vidu analognih definicija i teorema.

Koristeći Weierstrassovu kanoničku formu *Syrmos et al (1995)* [16], izveli su generalisanu matričnu Ljapunovljevu jednačinu za diskretne linearne deskriptpivne sisteme koji rade u slobodnom radnom režimu.

Do sličnih rezultata, koristeći matrične nejednakosti, došli su u svojim istraživanjima i *Xu, Yang (1999)* [21] i *Hsiung i Lee (1999)* [19].

Na kraju valja spomenuti i diskretnu verziju doprinosa datog u radu *Zhang et al. (1998),* [16] a koja se ovde izlaže kao diskretna verzija u [16] iznetih rezultata i koja u formi diskretne matrične jednačine Ljapunova daje uslove asimptotske stabilnosti razmatranog deskriptivnog linearnog sistema.

Od ostalih značajnih rezultata na polju ljapunovske stabilnosti, vredi pomenuti rad *Milić, Bajić (1984)* [17], u kome je izučavana posebna klasa nelinearnih, nestacionarnih diskretnih singularnih sistema, kao i odgovarajući "*veliki sistemi*" a što premašuje ovde razmatranu problematiku.

Stabilnost singularnih i deskriptivnih sistema u smislu Ljapunova

Stabilnost sistema zauzima svakako najznačajnije mesto u teoriji sistema i upravljanja. Različiti koncepti stabilnosti odavno se primenjuju u dinamičkoj analizi savremenih sistema automatskog upravljanja. U ovom radu se razmatraju pitanja stabilnosti ravnotežnog stanja singularnih sistema s pozicija primene teorije Ljapunova, odnosno primene njegove Druge metode. Ovde razmatran problem stabilnosti linearnih singularnih sistema je ekvivalentan razmatranju stabilnosti sistema u celini. Dobro je poznato da je stabilnost običnih *("normalnih")* sistema izložena u enormnom broju referenci, a ovde je napravljen originalan izbor manjeg broja radova isključivo posvećenih problematici vezanoj za posebnu klasu singularnih sistema. Zašto ova problematika dobija poseban značaj, kada je u pitanju ova klasa sistema automatskog upravljanja?

Dobro je poznato da primena Druge metode Ljapunova zahteva izbor odgovarajuće skalarne agregacione funkcije za dati sistem i izračunavanje njenog totalnog vremenskog izvoda duž kretanja sistema. Na osnovu osobina Ljapunovljeve funkcije i njenog izvoda, shodno postojećim teoremama, donose se odgovarajući zaključci o kvalitetu i karakteru ponašanja rešenja, odnosno osobinama ravnotežnog stanja i/ili sistema u celini.

Ako se sa $V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)$ obeleži Ljapunovljeva funkcija, onda je njen totalni vremenski izvod dat izrazom:

$$\dot{V}\big(t,\mathbf{x}(t)\big)=\frac{\partial V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)}{\partial t}+\frac{\partial V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)}{\partial \mathbf{x}^T(t)}\dot{\mathbf{x}}(t) \qquad (3)$$

jasno, za vremenski neprekidne sisteme, pa je očigledno da nemogućnost određivanja izdvojenog $\dot{\mathbf{x}}(t)$ za linearne singularne sisteme predstavlja osnovnu prepreku za efikasno rešavanje postavljenog problema. Problem se prevazilazi usvajanjem posebnog oblika agregacione funkcije i njenih osobina na potprostoru konzistentnih početnih uslova.

Situacija je identična i kada su u pitanju diskretni deskriptivni sistemi, a što je očigledno ako se ima u vidu njihov matematički zapis (1).

Definicije stabilnosti diskretnih deskriptivnih sistema

Definicija 1. Sistem, dat jednačinom (1) je ***regularan*** ako det (zE–A) nije identički jednaka nuli, *Dai (1989)* [18].

Definicija 2. Sistem, dat jed. (1) je ***kauzalan*** ako je *regularan* i ako je uslov $\deg ree\big(\det(zE-A)\big)=rangE$ zadovoljen, *Dai (1989)* [18].

Napomena 1. Prema autorima *Hsiung, Lee (1999)* [19] termin *kauzalan* može da se poistoveti sa izrazom *bezimpulsna (impulse free).*

Napomena 2. Uočeno je da *regularnost* matričnog para *(E, A)* garantuje postojanje i jedinstvenost rešenja sistema, datog (1), a za proizvoljne početne uslove, njegovo neimpulsno ponašanje može da se obezbedi izborom odgovarajućih tzv. konzistentnih početnih uslova. Ova razmatranja su podjednako prihvatljiva i za kontinualne singularne i diskretne deskriptivne sisteme, uz napomenu, da o postojanju "glatkih" (neimpulsnih) rešenja praktično nema smisla da se govori, kada su u pitanju *deskriptivni sistemi*, ali ideja o *potprostoru konzistentnih početnih uslova*, koja generiše njihova rešenja u vidu sekvence $\big(\mathbf{x}(k):\ k\geq 0\big)$, ima svoj potpuni fizički smisao. Kod "normalnih" sistema je *E=I,* neimpulsno ponašanje odezbeđeno njihovom apriornom regularnošću.

Definicija 3. Sistem, dat jed. (1) je ***stabilan,*** ako je *regularan* i ako ima sve svoje konačne polove unutar jediničnog diska D(0,1), *Dai (1989)* [18].

Definicija 4. Sistem, dat jednačinom (1) je ***prihvatljiv (admissible)*** ako je *regularan, kauzalan i stabilan, Hsiung, Lee (1999)* [19].

Definicija 5. Sistem, dat jednačinom (1) je asimptotski stabilan ako, i samo ako, za svaki konzistentni početni uslov $\mathbf{x}_0$, kretanje sistema zadovoljava sledeću relaciju: $\lim\limits_{k\to\infty}\mathbf{x}(k)\to\mathbf{0}$.

*) Videti rad Müllera (1993.)

Teoreme stabilnosti singularnih sistema u smislu Ljapunova

Teorema 1. Da bi sistem jednačina (1) bio *asimptotski stabilan,* potrebno je i dovoljno da postoji realan pozitivan broj $\lambda^*>0$, takav da za sve vrednosti λ u opsegu $0<|\lambda|<\lambda^*$, postoji simetričan, pozitivno definisan operator H_λ, koji zadovoljava:

$$(A-\lambda E)^T H_\lambda (A-\lambda E) - E^T H_\lambda E = -Q_\lambda \tag{4}$$

za neki simetričan operator Q_λ koji zadovoljava uslov pozitivne određenosti na potprostoru konzistentnih početnih uslova u obliku:

$$\mathbf{x}^T(k) Q_\lambda \mathbf{x}(k) > 0 \ , \quad \forall \mathbf{x}(k) \in W_{q^*} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{5}$$

Owens, Debeljković (1985) [12].

Uslovi dati jednačinama (4–5) imaju poznatu strukturu Ljapunovljeve jednačine s dodatnim otežavajućim okolnostima koje moraju da budu zadovoljene za svako λ u opsegu $0<|\lambda|<\lambda^*$. Ovu parametarsku strukturu nije moguće izbeći, osim u slučaju kada je matrica A regularna. Dokaz prethodne kao i naredne *Teoreme* u celosti se nalazi u *Debeljković et al. (1998.a)*, [11], a ovde se ne razmatra zbog svoje preopširnosti.

Posledica 1. Pretpostavimo da je matrica A regularna. Tada, da bi sistem dat jednačinom (1) bio *stabilan,* potrebno je i dovoljno da postoji simetrična, pozitivno određena matrica H, koja zadovoljava:

$$A^T HA - E^T HE = -Q \tag{5}$$

gde je Q simetrična, pozitivno određena matrica, tako da je:

$$\mathbf{x}^T Q \mathbf{x} > 0 \ , \quad \forall \mathbf{x} \in W_{q^*} \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{6}$$

gde je W_q potprostor konzistentnih početnih uslova diskretnog deskriptivnog sistema.

Teorema 2. Da bi sistem jednačina (1) bio *asimptotski stabilan*, potrebno je i dovoljno da postoji takav realan broj λ^* da za svako λ u opsegu $0<|\lambda|<\lambda^*$, postoji simetričan, pozitivno određen operator H_λ, koji zadovoljava sledeću jednačinu:

$$\begin{aligned}&\mathbf{x}^T \left((A-\lambda E)^T H_\lambda (A-\lambda E) - E^T H_\lambda E \right) \cdot \mathbf{x} = -\mathbf{x}^T \mathbf{x} \\ &\forall \mathbf{x} \in W_{q^*}\end{aligned} \tag{7}$$

Posledica 2. Ako je matrica A invertibilna tada, da bi sistem dat jednačinom (1) bio *asimptotski stabilan*, potrebno je i dovoljno da važi (7) pri $\lambda = 0$ i za neki simetrični, pozitivno određeni operator $H = H_0$.

Do sada izloženi rezultati su se odnosili isključivo na *regularne diskretne* singularne sisteme. Više s teorijske, a manje s praktične tačke gledišta, od interesa su i iregularni singularni sistemi, kao i njihovo dinamičko ponašanje. Jedan od takvih prilaza, koji u svetlu ljapunovske stabilnosti, razmatra ovu potklasu singularnih sistema, iniciran je u radovima *Erić et al. (1995)*, [13] *Dihovični et al. (1996)*, [32] a znatno poboljšan i usavršen u radu *Debeljković et al. (1998.b)* [14].

Razmatra se linearni diskretni deskriptivni sistem, opisan svojom diferencnom jednačinom stanja u kanoničnom obliku, (2).

Definicija i određivanje potprostora konzistentnih početnih uslova W_q, kao i pitanje regularnosti razmatranog sistema veoma je važno pitanje u dinamičkoj analizi deskriptivnih sistema i ne može da se prenebregne. Ova pitanja biće predmet icrpnog razmatranja autora *Debeljković at el. (2001.c)* [3]. Pojednostavljeniji prilaz može da se sprovede na osnovu kanoničke forme, (2). *Uslov regularnosti* sistema iskazan je u jednom od svojih alternativnih oblika u **Definiciju 1**. Za sistem jednačina (2) *uslov regularnosti,* kada je matrica A_4 *nesingularna*, dat je na sledeći način:

$$(-1)^{n_2} \det A_4 \det\left((zI_{n_1} - A_1) - A_2 A_4^{-1} A_2 \right) \neq 0 \tag{8}$$

Sa φ_I je označen skup svih vektora konzistentnih početnih uslova sistema jednačine (2). Sa $\mathcal{M} \in \Re^{\mathbf{n}}$ označena je linearna višestrukost**) određena jed. (2b) kao:

$$\mathcal{M} = \{ \, \boldsymbol{x}(k) \in R^n : \boldsymbol{0} = A_3 \boldsymbol{x}_1(k) + A_4 \boldsymbol{x}_2(k) \, \} \tag{9}$$

Za sistem jednačina (2), u opštem slučaju, $\varphi_I \subseteq \mathcal{M}$, pa u tom smislu vektor konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0$ mora da zadovolji jednačinu (2b), što može da se napiše kao:

$$\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \subseteq \mathrm{M} \equiv \aleph([A_3 \ \ A_4]) \tag{10}$$

Međutim, ako se pokaže da je *uslov ranga*, dat sledećom jednačinom:

$$\operatorname{rang}\, [A_3 \ \ A_4] = \operatorname{rang} A_4 \tag{11}$$

zadovoljen, tada je očigledno, *Bajić (1995)* [20], *Debeljković et al. (1998.b)* [14], da je $\varphi_I = \mathrm{M} = \aleph([A_3 \ \ A_4])$ i izračunavanje potprostora konzistentnih početnih uslova ne zahteva nikakva dopunska izračunavanja, osim svođenja diskretnog deskriptivnog sistema, (1), na svoj normalno−ka-nonički oblik (2). U tom slučaju, pretpostavljajući da je uslov ranga zadovoljen, jednačina (11), a kada $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \ A_4])$, $(n_1 + n_2 - r)$ komponenti vektora $\mathbf{x}_0$ može da bude proizvoljno, tada $\mathbf{x}_0$ pripada potprostoru konzistentnih početnih uslova. Preciznije, sve komponente vektora $\mathbf{x}_{10}$ i neke (kada važi rang $A_4 = r < n_2$), ili nijedna (kada važi rang $A_4 = r = n_2$) komponenta vektora $\mathbf{x}_{20}$, stoje na raspolaganju kao slobodan izbor. U oba slučaja, sistem (2) može da se redukuje na "*normalan sistem*" nižeg reda s vektorom $\mathbf{x}_1$ kao vektorom stanja, a u slučaju da je rang $A_4 = r < n_2$, sa nekim komponentama vektora $\mathbf{x}_2$, kao slobodnim. U ovom slučaju, redukovani matrični model diskretnog singularnog sistema biće u obliku $\mathbf{x}_1(k+1) = F_1 \mathbf{x}_1(k) + F_2 \mathbf{x}_2(k)$ s matricama F_1 i F_2 odgovarajućih dimenzija i vektorom $\mathbf{x}_2$ sastavljenim od onih komponenti vektora $\mathbf{x}_2$, koje *slobodno* mogu da se izaberu. Prema tome, postojanje rešenja je obez-beđeno takvim izborom $\mathbf{x}_0$ i činjenicom da je $\varphi_I = \mathrm{M} = \aleph([A_3 \ A_4])$. Treba istaći, da *jedinstvenost rešenja* nije obezbeđena kada je rang $A_4 = r < n_2$, *Bajić (1995)* [20].

Budući da su sistemi dati jednačinama (1) i (2) ekvivalentni, konvergentnost njihovih rešenja je evidentna.

Potencijalni (slabi) domen privlačenja nultog rešenja $\mathbf{x}(k,0) = \mathbf{0}$ $(k \in \mathrm{K})$, definisan je izrazom:

** Na engleskom jeziku: *liner manifold*

$$\begin{aligned}\mathsf{D} \overset{\Delta}{=} \{\mathbf{x}_0 \in \varphi_I : \ & \exists(\mathbf{x}(k) : \ k = 0,1,2,\ldots) \\ & \text{koje } \ \textit{zadovoljava} \ \text{ jed. (2)} \\ & \ni \ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \ \lim_{t\to\infty} \| \boldsymbol{x}(k, x_0) \| \to \mathbf{0} \ \}\end{aligned} \tag{12}$$

Debeljković et al. (1998.b) [14].

Koristi se termin "*slab*", zato što rešenja jednačine (2) ne moraju da budu jedinstvena, tako da za svako $\mathbf{x}_0 \in$ D mogu postojati i rešenja koja ne konvergiraju ishodištu faznog prostora. Ta činjenica zahteva da se odredi procena D_e skupa D ($\mathrm{D}_e \subseteq$ D). Za tu svrhu koristiće se Ljapunovljeva metoda, a za klasu *diskretnih regularnih* i *neregularnih deskriptivnih sistema*. Znači, zahtev da $\det(zE - A) \neq 0$ *ne mora da bude ispunjen.*

Kao prvo, pretpostavimo da je ispunjen *uslov ranga*, dat jed. (11), a samim tim $\varphi_I = \aleph([A_3 \ \ A_4])$ za sistem dat (2). Tada postoji matrica L koja zadovoljava sledeću matričnu jednačinu:

$$0 = A_3 + A_4 L \tag{13}$$

gde je 0 nula matrica iste dimenzije kao i matrica A_3. Iz (11) i (13) sledi da, ako rešenja sistema datog (2) postoje, tada će postojati i rešenje $\mathbf{x}(k)$ čije komponente zadovoljavaju:

$$\mathbf{x}_2(k) = L\mathbf{x}_1(k)\,, \ k \in \mathrm{K} \tag{14}$$

Uzimajući u obzir *uslov ranga*, (11), sledi***) da je $\aleph([L \ -I_{n_2}]) \subseteq \aleph([A_3 \ \ A_4])$. Da bi se to pokazalo, usvaja se proizvoljno $\mathbf{x}^* \in \aleph([L \ \ -I_{n_2}])$, tj. $\mathbf{x}_2^* = L\mathbf{x}_1^*$, gde je L bilo koja matrica koja zadovoljava (13). Množeći s desne strane jednačinu (13) vektorom $\mathbf{x}_1^*$, uz korišćenje (14), dobija se:

$$0 = A_3\mathbf{x}_1^* + A_4 L\mathbf{x}_1^* = A_3\mathbf{x}_1^* + A_4\mathbf{x}_2^* \tag{15}$$

što pokazuje da $\mathbf{x}^* \in \aleph([A_3 \ A_4])$. Prema tome $\aleph([L - I_{n_2}]) \subseteq$ $\subseteq \aleph([A_3 \ \ A_4])$. Posledično, ona rešenja sistema, datog (2), koja zadovoljavaju (11), moraju da zadovolje i ograničenja nametnuta (2b).

Za sva rešenja sistema datog jednačinom (2), za koja važi (14), sledeći zaključci imaju poseban značaj:

1. Rešenja sistema jednačine (2) moraju pripadati skupu:

$$\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) \in \aleph([L \ \ -I_{n_2}]) \tag{16}$$

2. Ako uz zadovoljen uslov ranga, jednačina (11), postoje rešenja $\mathbf{x}(k)$ sistema jednačine (2), a za koja može da se dokaže osobina konvergentnosti ka ishodištu faznog prostora, tada je *potencijalni domen privlačenja nultog ravnotežnog stanja* razmatranog sistema dat sa:

$$\mathrm{D}_e = \aleph([L \ \ -I_{n_2}])\} \subseteq \mathrm{D} \tag{17}$$

Za sistem (2) Ljapunovljeva funkcija može da bude izabrana kao:

$$V\left(\mathbf{x}(k)\right) = \mathbf{x}_1^T(k) H \mathbf{x}_1(k) \tag{18}$$

gde je H simetrična, pozitivno određena matrica.

Potonja razlika funkcije $V(\cdot)$ duž rešenja (2) je:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= V\left(\mathbf{x}(k+1)\right) - V\left(\mathbf{x}(k)\right) \\ &= \mathbf{x}_1^T(k+1) H \mathbf{x}_1(k+1) - \mathbf{x}_1^T(k) H \mathbf{x}_1(k)\end{aligned} \tag{19}$$

a, uz korišćenje (14) i:

$$\begin{aligned}\Delta V\left(\mathbf{x}(k)\right) &= \mathbf{x}_1^T(k)\Big((A_1 + A_2 L)^T H (A_1 + A_2) - H\Big) \ \mathbf{x}_1(k) \\ &= -\mathbf{x}_1^T(k) Z \mathbf{x}_1(k)\end{aligned} \tag{20}$$

*** Prema *Bajiću (1995)* i anonimnom recenzentu časopisa *IEEE Trans. on Control.*

gde je:

$$Z = -(A_1 + A_2 L)^T H (A_1 + A_2 L) + H \tag{21}$$

realna simetrična matrica. Kada je H simetrična, pozitivno određena matrica, tada je $V(\cdot)$ pozitivno određena funkcija u odnosu na kovektor $\mathbf{x}_1(k)$. Prema tome, ako je Z pozitivno određena matrica, tada će $V\left(\mathbf{x}(k)\right)$ težiti nuli kada $k \to \infty$, uz pretpostavku da rešenja postoje kada $k \to \infty$.

Veza između matrica H i Z, koje zadovoljavaju postavljene zahteve, može se uspostaviti preko *diskretne matrične jednačine Ljapunova* u obliku:

$$A_L^T H A_L - H = -Z \tag{22}$$

gde je:

$$A_L = A_1 + A_2 L \tag{23}$$

Proizvoljna realna, simetrična, pozitivno određena matrica Z i simetrična, pozitivno određena matrica H, mogu da se nađu kao rešenje *Ljapunovljeve diskretne matrične jednačine* ako, i samo ako je A_L diskretno stabilna matrica, odnosno, matrica čije sve vlastite vrednosti leže u otvorenom jediničnom krugu u kompleksnoj ravni z. Valja zapaziti da matrica H ima dimenziju $n_1 \times n_1$, tako da (22) može da se razmatra kao *diskretna Ljapunovljeva matrična* jednačina redukovanog reda u odnosu na deskriptivni vektor stanja.

Teorema 3. Neka je zadovoljen uslov ranga, (11). Tada je procena, D_e, potencijalnog (slabog) domena privlačenja D nultog rešenja datog diskretnog deskriptivnog sistema određena sa (17), uz uslov da je matrica L bilo koje rešenje jednačine (13), a $A_L = (A_1 + A_2 L)$ je *diskretno stabilna matrica*. Štaviše, D_e nije jednočlan skup, *Debeljković et al. (1998.a i 1998.b)* [11,14].

Dokaz izložene *Teoreme*, zbog svoje preopširnosti, ne razmatra se, i u celosti se može naći u radu *Debeljković (1988.a, 1998.b)* [11,14].

U slučaju da postoji matrica A_4^{-1}, matrica L je jedinstveno određena sa:

$$L = -A_4^{-1} A_3 \tag{24}$$

Kada je:

$$[A_3 \quad A_4] = [L \quad -I_{n_2}] \tag{25}$$

i ako je:

$$A_L = A_1 + A_2 L = A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3 \tag{26}$$

diskretno stabilna matrica, onda je $\mathrm{D} = \aleph([A_3 \ \ A_4])$ i postoji *privlačnost,* kao globalna osobina *regularnog diskretnog deskriptivnog sistema*, koji tom prilikom može da se svede na svoju "normalnu" formu niže dimenzije n_1, kako sledi:

$$\mathbf{x}_1(k+1) = (A_1 - A_2 A_4^{-1} A_3)\mathbf{x}_1(k) \tag{27}$$

Teorema 4. Sistem dat jed. (1) je regularan, kauzalan i stabilan ako, i samo ako postoji inverzna simetrična matrica $H\in\Re^{n\times n}$ takva da važe sledeće dve nejednakosti:

$$E^{\mathrm{T}}HE \geq 0 \tag{28}$$

$$A^{\mathrm{T}}HA - E^{\mathrm{T}}HE < 0 \tag{29}$$

Xu, Yang (1999) [21].

U dokazu ove **Teoreme**, koristi se pomoćni rezultat dat u *Dodatku A*.

Dokaz. Dokaz se sastoji iz dva dela.

Dovoljnost. Neka su M_1 i $N_1\in\Re^{n\times n}$ nesingularne matrice, takve da važi:

$$M_1EN_1 = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{30}$$

gde je I_d jedinična matrica reda $d \times d$.

Ako se izvrši particija matrica $M_1^{-T}HM_1^{-1}$ i M_1AN_1 slično prethodnoj, dobija se:

$$M_1^{-T}HM_1^{-1} = \begin{bmatrix} H_1 & H_2 \\ H_2^T & H_3 \end{bmatrix} \tag{31}$$

$$M_1AN_1 = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix} \tag{32}$$

Na osnovu (28,30-32) je pokazano da je:

$$H_1 \geq 0 \tag{33}$$

Koristeći jednačine (29) i (32 - 33), dobija se:

$$\begin{bmatrix} * & * \\ * & A_2^TH_1A_2 + G + G^T \end{bmatrix} < 0 \tag{34}$$

gde je:

$$G = A_2^TH_2A_4 + \frac{1}{2}A_4^TH_3A_4 \tag{35}$$

a sa *' su označene matrice bez značaja za dalja razmatranja.

Uzimajući u obzir (34), a imajući u vidu da je $H_1 \geq 0$, dobija se:

$$G + G^{\mathrm{T}} < 0 \tag{36}$$

Koristeći *Lemu 1*, sledi:

$$\mathrm{Re}\left(\left(A_2^TH_2 + \frac{1}{2}A_4^TH_3\right)A_4\right) = \mathrm{Re}(G) \leq \mu(G) = = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(G + G^T) < 0 \tag{37}$$

Lako se može pokazati da je matrica $(A_2^TH_2 + \frac{1}{2}A_4^TH_3)A_4$ invertibilna, što povlači i invertibilnost matrice A_4, takođe. Prema datim *Definicijama*, lako je da se zaključi da je razmatrani sistem regularan i kauzalan.

S druge strane, regularnost i kauzalnost razmatranog sistema, *Dai (1989),* [18] podrazumeva da postoje nesingularne matrice $M_2, N_2 \in\Re^{n\times n}$ takve, da:

$$M_2EN_2 = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \tag{38}$$

$$M_2AN_2 = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix}, \tag{39}$$

gde su: $I_{n-d} \in\Re^{(n-d)\times(n-d)}$ jedinična matrica, a $\overline{A}_1 \in\Re^{d\times d}$. Particija matrice $M_2^{-T}HM_2^{-1}$, slično prethodnim procedurama, dovodi do:

$$M_2^{-T}HM_2^{-1} = \begin{bmatrix} H_{11} & H_{12} \\ H_{12}^T & H_{22} \end{bmatrix}. \tag{40}$$

Iz (28) i (40), lako je da se pokaže da je:

$$H_{11} \geq 0 \tag{41}$$

Zajedno, korišćenje jednačina (29), i (38-40), dovodi do:

$$\overline{A}_1^TH_{11}\overline{A}_1 - H_{11} < 0 \tag{42}$$

Na osnovu (41 i 42) sledi i da je $H_{11} > 0$. Koristeći standardnu Ljapunovljevu teoriju, dobija se i da je $\lambda(\overline{A}_1) \subset$ $\subset$ **D**(0,1). Prema tome, na osnovu *Definicije* 3 sledi, direktno, da je razmatrani sistem i *stabilan.*

Sada treba dokazati i da je matrica H invertibilna. Zamenjujući jednačine (38-39) u (29), dobija se:

$$\begin{bmatrix} \overline{A}_1^TH_{11}\overline{A}_1 - H_{11} & \overline{A}_1H_{12} \\ H_{12}^T\overline{A}_1 & H_{22} \end{bmatrix} < 0. \tag{43}$$

Prema tome, $H_{22} < 0$, i koristeći dobro poznat Schurov komplement lako se pokazuje da važi:

$$\overline{A}_1^T\,(H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{12}^T)\,\overline{A}_1 - (H_{12}H_{22}^{-1}H_{12}^T) < 0 \tag{44}$$

Pošto $\lambda(\overline{A}_1) \subset$ **D**(0,1), koristeći standardnu Ljapunovljevu proceduru na (44), dobija se:

$$H_{11} - H_{12}H_{22}^{-1}H_{12}^T > 0 \tag{45}$$

što povlači invertibilnost matrice $(H_{11}-H_{12}H_{22}^{-1}H_{12}^T)$. Imajući u vidu da je matrica H_{22} invertibilna, a vodeći računa i o (40), dobija se da je i matrica $M_2^{-T}HM_2^{-1}$ invertibilna, a samim tim i matrica H, što je i trebalo pokazati.

Dovoljnost. Pretpostavimo da je sistem, opisan jednačinom (1) regularan, kauzalan i stabilan. Tada, prema *Dai (1989)* [18], postoje matrice $M_3, N_3 \in\Re^{n\times n}$ takve da:

$$M_3EN_3 = \begin{bmatrix} I_d & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{46}$$

$$M_3AN_3 = \begin{bmatrix} \overline{A}_1 & 0 \\ 0 & I_{n-d} \end{bmatrix} \tag{47}$$

gde $\lambda(A_{11}) \subset$ **D** (0,1).

Koristeći klasičan prilaz Ljapunovljeve teorije sledi, da postoji simetrična pozitivno određena matrca Q_1 takva, da je:

$$A_{11}^TQ_1A_{11} - Q_1 < 0. \tag{48}$$

Definišimo matricu H na sledeći način:

$$H = M_3^T \begin{bmatrix} Q_1 & 0 \\ 0 & -I_{n-d} \end{bmatrix} M_3 . \tag{49}$$

Lako se uviđa da je matrica H, u datoj formi (49), invertibilna i simetrična, i da pri tome zadovoljava jednačine (28-29), čime je dokaz kompletiran.

U narednim izlaganjima su od posebne važnosti sledeće činjenice.

Za bilo koji matrični par (E, A), uvek postoje dve realne nesingularne matrice U i V takve, da važi:

$$UEV = \hat{E}, \quad UAV = \hat{A} \tag{50}$$

gde su:

$$\hat{E} = \begin{bmatrix} I_r & 0 \\ 0 & N \end{bmatrix}, \quad \hat{A} = \begin{bmatrix} A_1 & 0 \\ 0 & I_{n-r} \end{bmatrix}, \tag{51}$$

Matrični par $(\hat{E}, \hat{A})$ naziva se *Weierstrassovom formom* para (E, A). U (51) matrica $N \in \Re^{(n-r)\times(n-r)}$ je nilpotentna matrica, a r je broj konačnih sopstvenih vrednosti matričnog para (E, A). Pošto su U i V nesingularne matrice, a $\det(sN-I_{n-r}) = (-1)^{n-r}$, sledi:

$$\sigma(E, A) = \sigma(\hat{E}, \hat{A}) = \sigma(I_r, A_1) \tag{52}$$

gde je sa $\sigma(E, A)$ označen spektar vlastitih vrednosti matričnog para, pa je jasno da se stabilnost bilo kog regularnog deskriptivnog sistema, datog parom (E, A), može kompletno razmatrati na podsistemu nižeg reda, u matričnom zapisu datom u formi (I_r, A_1).

Napomena 3. Sada valja primetiti, da je matrični par (E,A) *kauzalan (neimpulsan)* ako, i samo ako je $N = 0$.

Napomena 4. Matrice *E i A* reda su $n \times n$.

Korisno je uvesti i sledeća označavanja:

$$q = rang E \ < \ n$$

$$\deg ree \det(sE - A) = r \le q < n$$

Napomena 5. Bilo koji vektor $\mathbf{v}^1$, koji zadovoljava $E\mathbf{v}^1=\mathbf{0}$, naziva se *beskonačno generalisanim sopstvenim vektorom stepena 1* matričnog para (E, A), a bilo koji nenulti vektor v^k ($k \ge 2$) koji zadovoljava $E\mathbf{v}^k = \mathbf{A}\mathbf{v}^{\mathbf{k}-1}$ se naziva *beskonačno generalisanim sopstvenim vektorom stepena 2.* Detalji vezani za ova tvrđenja podrobno su izneti u *Dodatku B.*

Lema 1. Ako matrični par (E, A) nije kauzalan, onda on ima bar jedan *beskonačno generalisani sopstveni vektor stepena 2* $\mathbf{v}^2$ takav, da je $E\mathbf{v}^2 = A\mathbf{v}^1$ pri $\mathbf{E}\mathbf{v}^1 = 0$, gde je $\mathbf{v}^1$ odgovarajući vektor *stepena 1.*

Lema koja se izlaže u nastavku ukazuje na činjenicu da matrični parovi (E, A) i $(\hat{E}, \hat{A})$ dele iste osobine *regularnosti i kauzalnosti kada se matrica* $\hat{A}$ *može da predstavi u obliku linearne kombinacije matrica* E i A. Međutim, dva skupa konačnih sopstvenih vrednosti tih parova, povezani su tada u afinoj linearnoj vezi.

Lema 2. Naka $\alpha, \beta \in \Re$ pri $\beta \ne 0$. Ako je $\hat{A} = \alpha E + \beta A$, tada matrični parovi poseduju sledeća svojstva:

(*i*) Matrični par (E, A) je *regularan i kauzalan* ako, i samo ako je matrični par $(\hat{E}, \hat{A})$ takođe *regularan i kauzalan.*

(*ii*) Svaki par odgovarajućih konačnih sopstvenih vrednosti, ova dva matrična para, povezan je na sledeći način:

$$\lambda_i(\hat{E}, \hat{A}) = \alpha + \beta\lambda_i(E, A).$$

Sada se može preći na izlaganje glavnih rezultata

Teorema 5. Diskretni deskriptivni sistem oličen u svojstvima matričnog para (E, A) *je prihvatljiv* ako, i samo ako postoji matrica $P = P^T \in \Re^{n\times n}$ koja zadovoljava sledeću *generalisanu diskretnu matričnu nejednačinu Ljapunova:*

$$A^T PA < E^T PE \tag{53}$$

$$E^T PE \ge 0 \tag{54}$$

Hsiung, Lee (1999) [19].

Dokaz. Dokaz se sastoji iz dva dela.

Dovoljnost. Bez gubitka u opštosti razmatranja, pretpostavimo da su matrice t E i A u svojoj Weierstrassovoj formi. Valja primetiti da je N=0, zbog pretpostavke o neimpulsnom ponašanju sistema. Kada je matrični par (E, A) *stabilan*, tada prema Drugoj Ljapunovljevoj metodi, postoji matrica $P_1 > 0$ takva, da je $A_1^T P_1 A_1 < P_1$. Neka $P_4 \in \Re^{(n-r)\times(n-r)}$ bude proizvoljna simetrična negativno određena matrica, i definišimo još i dijagonalnu matricu $P = \mathrm{diag}(P_1, P_4)$. Očigledno je da matrica P zadovoljava nejednačine (53-54).

Neophodnost. Pretpostavimo da matrični par (E, A) *nije kauzalan*. Množeći obe strane nejednačine (53) *vektorom stepena 1*-$\mathbf{v}^1$ i njegovim transponovanim oblikom-$\mathbf{v}^{1T}$, sledstveno, dobija se:

$$\mathbf{v}^{1T} A^T P A \mathbf{v}^1 < \mathbf{v}^{1T} E^T P E \mathbf{v}^1 \tag{55}$$

Imajući u vidu *Lemu 1*, zamenjujući $A\mathbf{v}^1$ sa $E\mathbf{v}^2$ a imaujući u vidu da je $E\mathbf{v}^1 = \mathbf{0}$, dobija se:

$$\mathbf{v}^{2*} E^T P E \mathbf{v}^2 < 0 \tag{56}$$

što je u suprotnosti sa nejednačinom (54). Prema tome, matrični par (E,A) je *kauzalan*, pa je samim tim dokazana i njegova regularnost. Stoga, može da se usvoji da matrični par ima svoju Weierstrassovu formu. Prema tome je i $N =$ 0, jer je par (E, A) kauzalan. Uvažavajući blokovsku strukturu (51), može da se izvrši i sledeća particija:

$$P = \begin{bmatrix} P_1 & P_2 \\ P_2^T & P_4 \end{bmatrix} \tag{57}$$

Zamenjujući tako date matrice E i A kao i matricu P, datu jednačinom (57) u jednačine (53-54), dobija se:

$$\begin{bmatrix} A_1^T P_1 A_1 & A_1^T P_2 \\ P_2^T A_1 & P_4 \end{bmatrix} < \begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{58}$$

$$\begin{bmatrix} P_1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \ge 0 \tag{59}$$

gde blokovi $(\ )_{11}$ povlače postojanje takve matrice $P_1 \ge 0$ za koju je:

$$A_1^T P_1 A_1 - P_1 < 0 \tag{60}$$

Ako se definiše i:

$$\tilde{P}_1 = P_1 + \varepsilon I \tag{61}$$

gde je $\varepsilon > 0$ dovoljno malo, tada važi:

$$A_1^T \tilde{P}_1 A_1 - \tilde{P}_1 = (A_1^T P_1 A_1 - P_1) + \varepsilon(A_1^T A_1 - I) < 0 \tag{62}$$

Imajući u vidu (52) i klasičan Ljapunovljev prilaz, jasno je da (62) garantuje stabilnost matričnog para (E, A).

Ljapunovljeve karakterizacije $\mathbf{D}(0,1)$ *prihvatljivosti* date nejednačinama (53 i 54), u prethodnoj *Teoremi,* mogu se, bez problema, proširiti i na pojam $\mathbf{D}$ *(c,r) prihvatljivosti.*

Posledica 3. Matrični par (E, A) je *regularan, kauzalan* i $\mathbf{D}$ (c,r) – *stabilan*, tj. $\sigma(E, A) \subset \mathbf{D}(c,r)$, ako i samo ako postoji matrica $P = P^{\mathrm{T}} \in \Re^{n\times n}$ takva, da:

$$(c^2 - r^2)E^{\mathrm{T}}PE + A^{\mathrm{T}}PA < c(E^{\mathrm{T}}PA + A^{\mathrm{T}}PE) \tag{63}$$

$$E^{\mathrm{T}}PE \geq 0 \tag{64}$$

Dokaz. Na osnovu *Leme 2.* Matrični par (E, A) je regularan, kauzalan i D(c,r)-stabilan ako, i samo ako je matrični par (E, $1/rA - c/rE$) regularan, kauzalan i stabilan. Primenjujući **Teoremu 5** za proveru apsolutne stabilnosti matričnog para (E, $1/rA - c/rE$) lako je kompletiran dokaz.

Napomena 6. Zadati disk $\mathbf{D}(c,r)$ ne mora da bude centriran na realnoj osi. Kada $c \in \boldsymbol{C}$ jednačine (63 i 64) u **Posledici 3** preinačuju se u uslov za postojanje hermitske matrice P takve, da važe sledeće nejednačine:

$$(|c|^2 - r^2)E^{\mathrm{T}}PE + A^{\mathrm{T}}PA < \bar{c}\, E^{\mathrm{T}}PA + cA^{\mathrm{T}}PE \tag{65}$$

$$E^{\mathrm{T}}PE \geq 0 \tag{66}$$

Zaključak

Da bi se obezbedila asimptotska stabilnost autonomnog linearnog diskretnog deskriptivnog sistema nije dovoljno samo da sopstvene vrednosti matričnog para *(E, A)* leže unutar diska jediničnog radijusa u z kompleksnoj ravni već je potrebno obezbediti i neimpulsno ponašanje razmatranog sistema u celini. Nekoliko različitih prilaza, izloženih u ovom radu, formiraju različite kriterijume za utvrđivanje stabilnosti, i asimptotske stabilnosti ove klase sistema u smislu Ljapunova.

Iscrpan prikaz analognih rezultata za *linearne kontinualne singularne sisteme* dat je u *Debeljković et al. (2001)* [22].

Dodatak A

Neke osobine matrične mere

Matrična mera $\mu(F)$ date matrice F poseduje sledeća svojstva:

$$-\|F\| \leq \mathrm{Re}\lambda \leq \mu(F) \leq \|F\|. \tag{A1}$$

$$\mu(F) = \frac{1}{2}\lambda_{\max}(F + F^T). \tag{A2}$$

Definicija i detaljan pregled osnovnih osobina matrične mere mogu se naći u *Debeljković, Milinković (1999)* [23].

Dodatak B

Impulsno ponašanje linearnih singularnih i deskriptivnih sistema

Osobina *rešljivosti* razmatranog singularnog (deskriptivnog) sistema jednačina direktno zavisi od matrica E i A. Ako postoji jedinstveno rešenje, ono će da se dobije uz korišćenje odgovarajućih početnih uslova. Izbor početnih uslova određuje pojavu ili eksponencijalnih ili impulsnih modova. U praksi se teži eksponencijalnim modovima koji garantuju tzv. "glatka rešenja" bez pikova, odnosno impulsa. Za početne uslove koji generišu "glatka" rešenja, kaže se da su konzistentni (saglasni).

Impulsno kretanje singularnih sistema može da se javi i u slobodnom radnom režimu, kada se dozvole proizvoljni početni uslovi. U nastavku rada će se dati postupak za ispitivanje singularnih sistema u pogledu broja eksponencijalnih i impulsnih modova u izrazu za kretanje singularnog sistema. Izlaganja koje slede, prvenstveno se oslanjaju na rad *Verghese et al.(1980)* [24] i delimično na rad *Campbell(1980)* [5].

U ovim razmatranjima se polazi od standardnog opisa singularnog sistema:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{B1}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t), \quad t \geq 0 \tag{B2}$$

gde $\mathbf{x}(t)\in\Re^n$, $\mathbf{u}(t)\in\Re^m$ i $\mathbf{x}_i\in\Re^p$, uz $m < n$ i odgovarajućim dimenzijama pratećih matrica.

Valja napomenuti, da konzistentni početni uslovi za sistem u slobodnom i prinudnom radnom režimu ne moraju da budu isti.

Ako je $E\mathbf{x}(0^-)$ poznato, kao i $\mathbf{u}(t)$ za $t \geq 0$, sistem (B1-B2) može da se prevede u kompleksni domen:

$$\mathbf{X}(s) = (sE-A)^{-1}(E\mathbf{x}(0^-) + B\mathbf{U}(s)) \tag{B3}$$

$$\mathbf{X}_i(s) = C\mathbf{X}(s) \tag{B4}$$

a uz pretpostavku da je matrični par (E,A) *regularan* i pri nultim početnim uslovima, $E\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{0}$, može da se oformi i odgovarajuća matrica prenosnih funkcija *regularnog singularnog sistema*:

$$W(s) = C(sE-A)^{-1}B. \tag{B5}$$

Kada je reč o tzv. "*normalnim*" sistemima, odnosno, kada je $E = I$, neosporne su sledeće činjenice.

(*i*) Poznavanje početnih uslova $E\mathbf{x}(0^-) = \mathbf{x}_0$, potrebno je i dovoljno za iznalaženje rešenja $\mathbf{x}(t)$, $t \geq 0$, kada je poznato $\mathbf{u}(t)$ za $t \geq 0$. Tada n-dimenzionalni vektor početnog stanja može da ima n nezavisnih vrednosti. U tom smislu, sistem (B1) ima *n stepeni slobode*, a broj n označava njegov *red*, odnosno *dimenziju*.

(*ii*) Matrica prenosnih funkcija je *striktno svojstvena*, što znači da zadovljava uslov:

$$\lim_{s\to\infty} W(s) \to 0\,. \tag{B6}$$

(*iii*) Odziv sistema u slobodnom radnom režimu sastoji se od linearne kombinacije eksponencijalnih modova pri tzv. prirodnim ili karakterističnim frekvencijama određenih oblikom, srukturom i položajem korenova karakteristične jednačine $\det(sI-A) = 0$.

Kada je sistem (B1) singularan (deskriptivan), tj.det E=0, može da se konstatuje sledeće, a kao poređenje s prethodno iznetim.

$(i)_E$ Broj stepeni slobode sistema, odnosno broj nezavisnih vrednosti koje početni vektor $E\mathbf{x}(0^-)$ može da uzme, redukovan je na:

$$q \overset{\Delta}{=} \text{rang}\, E < n, \tag{B7}$$

pa je broj *stepeni slobode* manji od reda sistema.

$(ii)_E$ Matrica prenosnih funkcija $W(s)$ ne mora više da bude striktno svojstvena i obično može da se predstavi u vidu zbira dva sabirka, od kojih prvi ima tu osobinu, a drugi odgovara nekom polinomu po s.

$(iii)_E$ Za slučaj kada je det $E = 0$, može da se definiše stepen karakterističnog polinoma matričnog para (E, A) kao:

$$\text{degree det}(sE-A) = r \le q < n. \tag{B8}$$

U ovom slučaju, odziv sistema u slobodnom radnom režimu sadrži, kao i u analognom slučaju, eksponencijalne modove na r konačnih učestanosti, ali takođe i $(q-r)$ impulsnih članova ili $(q-r)$ modova "*beskonačne učestanosti*".

Da bi se pokazalo postojanje impulsa u rešenju singularnog sistema diferencijalnih jednačina, (B1), dekomponovaće se prostor stanja $\Re^n$ u dva potprostora, tako da $X = X_1 \oplus X_2$, pri $X_1 = n_1$. Na ovaj način, dolazi se do Weierstrassove kanoničke forme:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = J\mathbf{x}_1(t) + B_1\mathbf{u}(t) \tag{B9}$$

$$N\dot{\mathbf{x}}_2(t) = I\mathbf{x}_2(t) + B_2\mathbf{u}(t) \tag{B10}$$

gde $\mathbf{x}_1(t) \in \Re^{n_1}$, $\mathbf{x}_2(t) \in \Re^{n_2}$, J je Jordanov, a N nilpotentni matrični oblik indeksa nilpotentnosti ν.

Podsistem (B9) je po *Cobbu (1983.a, b)* [25,26] "spor", jer u osnovi odgovara po formi "*normalnom*" sistemu i ima svoju usporenu dinamiku ograničene učestanosti.

Podsistem (B10) je po *Cobbu (1983.a, b)* [25,26] "brz", jer sadrži nedinamička ograničenja i neograničene je učestanosti, što se posebno vidi iz *rešenja* sistema datog jednačinama (B9 i B10):

$$\mathbf{x}_1(t) = e^{Jt}\mathbf{x}_1(0) + \int_{t_0}^{t} e^{J(t-\tau)}B_1\mathbf{u}(\tau)d\tau \tag{B11}$$

$$\mathbf{x}_2(t) = -\sum_{i=0}^{\nu-1}\delta^{(i-1)}(t)N^i\mathbf{x}_2(0) - \sum_{i=0}^{\nu-1}N^iB_2\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{B12}$$

gde $\mathbf{u}(t)^{(i)}(t)$ predstavlja i-ti izvod funkcije $\mathbf{u}(t)$, a $\delta^{(i-1)}$, $(i-1)$ izvod impulsne funkcije.

Impulsi u (B10) su određeni strukturom matrice $N=\text{diag}\left[N_1, \ldots, N_k\right]$. U stvari, svaki $k \times k$ $(k > 1)$ nilpotentni blok ima $k-1$ stepeni sobode i određuje $(k-1)$ nezavisnih impulsnih kretanja u slobodnom radnom režimu. Očigledno je da su trivijalni (1×1) nilpotentni blokovi predstavljeni samo nedinamičkim algebarskim ograničenjima. Stoga se singularni sistemi sastoje iz *dinamičkog dela* i *nedinamičkih ograničnja*. Dinamika sistema sastoji se od *eksponencijalnog* i *impulsnog* ponašanja.

I konačno, od posebne važnosti je da se pokaže u kakvom odnosu stoje pitanja *regularnosti* singularnih sistema i njihovih pridruženih početnih uslova.

Naime, ako se singularni sistem, (B1) prikaže u svojoj normalnoj kanoničkoj formi:

$$\begin{bmatrix} I & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \dot{\mathbf{x}}_1(t) \\ \dot{\mathbf{x}}_2(t) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} A_1 & A_2 \\ A_3 & A_4 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \mathbf{x}_1(t) \\ \mathbf{x}_2(t) \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} B_1 \\ B_2 \end{bmatrix}\mathbf{u}(t) \tag{B13}$$

onda je *uslov regularnosti* dat (8). Krucijalnu ulogu po tom pitanju ima tada, očigledno, submatrica A_4. Ako je A_4 *regularna* i singularni sistem je *regularan*. Ovo je uobičajena pretpostavka da bi se ispoštovao uslov regularnosti, što povlači postojanje i jedinstvenost rešenja. Ova pretpostavka garantuje da neće biti ni impulsnih članova u kretanju sistema za proizvoljne početne uslove, s obzirom na činjenicu da se tada singularni sistem redukuje na "normalni" nešto nižeg reda.

Nasuprot tome, može da se pokaže da, ako je A_4 singularna, onda sistem (ako je rešljiv) poseduje impulse u svom kretanju u slobodnom radnom režimu, a za posebno izabrane početne uslove, *Verghese (1981)* [24].

Jasno razgraničenje koji uslovi vode u eksponencijalno ili impulsno rešenje, najbolje može da se sagleda, ako se razmatrani singularni sistem prvo prevede u svoju *SVD kanoničku formu*, a zatim podvrgne preispitivanju postojećih modova, *Bender, Laub (1987.b)* [27].

Kao što je već ranije bilo rečeno, singularni sistem sadrži tri vrste modova: *dinamičke konačne*, *dinamičke beskonačne* i *nedinamičke beskonačne*.

Dinamički beskonačni modovi generišu impulsno ponašanje singularnog sistema, koje je nepoželjno. Postavlja se pitanje, kako ih prvo *identifikovati*, a zatim, po mogućnosti minimizirati ili ih potpuno ukloniti. Izlaganja koja slede baviće se samo prvopostavljenim pitanjem.

Uticaj *beskonačnih modova* na dinamičko ponašanje sistema može da se, relativno lako, sagleda preko tzv. *beskonačnih generalisnaih sopstvenih vektora* matričnog para $(sE-A)$. Oni se definišu kao *sopstvene vrednosti*, pri $\lambda=0$ matričnog para $(E-\lambda A)$, *Bender, Laub (1987)* [27].

Definicija B1. *Beskonačni generalisani sopstveni vektori.*

(i) *Beskonačni generalisani sopstveni vektori* matričnog para (sE − A), *stepena 1*, zadovoljavaju :

$$E\,\mathbf{v}_i^1 = \mathbf{0} \tag{B14}$$

(ii) *Beskonačni generalisani sopstveni vektori* matričnog para (sE − A), *stepena k* $(k \ge 2)$, koji odgovaraju i-tom *beskonačnom generalisanom sopstvenom vektoru stepena 1*, zadovoljavaju:

$$E\mathbf{v}_i^{k+1} = A\mathbf{v}_i^k \tag{B15}$$

Sada se mogu dati sledeći rezultati.

Lema B1.

(i) Postoji $(n-\pi)$ *beskonačnih generalisanih sopstvenih vektora stepena* 1 matričnog para $(sE-A)$, u oznaci: $\mathbf{v}_1^1, \mathbf{v}_2^1, \ldots, \mathbf{v}_{(n-\pi)}^1$.

(ii) Ako je:

$$\text{degree det}(sE-A) = r, \tag{B16}$$

tada postoji nezavistan skup od $(\pi - r)$ nezavisnih *beskonačnih sopstvenih vektora stepena k* $(k \ge 2)$ matričnog para $(sE-A)$, u oznaci: $\mathbf{v}_1^2, \mathbf{v}_1^3, \ldots, \mathbf{v}_1^{n_1}, \mathbf{v}_2^2, \mathbf{v}_2^3, \ldots, \mathbf{v}_2^{n_2}, \mathbf{v}_\mu^2, \mathbf{v}_\mu^3, \mathbf{v}_\mu^{n_\mu}$, gde je indeks $\mu \le (n-\pi)$.

Tada postoji i $n \times (n-r)$ matrica V oformljena od kolona vektora $\mathbf{v}_i^j$ kao i $(n-r)\times(n-r)$ Jordanova forma nilpotentne matrice N koje zadovoljavaju:

$$EV = AVN \tag{B17}$$

(iii) Postoji i $(n\times r)$ matrica W sa linearno nezavisnim kolonama, kao i $(r\times r)$ Jordanova forma matrice Λ koje zadovoljavaju:

$$AW = EW\Lambda \tag{B18}$$

Dokaz, zbog svoje složenosti, prevazilazi obim ovih izlaganja i može da se nađe u *Lewis, Ozcaldrian (1984)* [28].

Na osnovu prethodne *Leme,* mogu se izvući sledeći zaključci:

- Kolone matrice V razapinju *sopstveni prostor* matrice $(sE - A)$, koji odgovara *beskonačnim sopstvenim vrednostima*, tj. taj prostor odgovara *sopstvenim vrednostima* matričnog para (E, A), za $\lambda = 0$.
- Kolone matrice W razapinju sopstveni prostor matrice $(sE - A)$, koji odgovara konačnim sopstvenim vrednostima, matričnog para (E, A). Ove konačne sopstvene vrednosti su dijagonalni elementi matrice Λ.

Definicija B2. *Dinamički i nedinamički modovi*

(i) *Beskonačni generalisani sopstveni vektori* matričnog para (sE−A), *stepena 1*, razapinju prostor nedinamičkog rešenja sistema, (B1); odgovarajuće *beskonačne sopstvene vrednosti* matrice (sE−A) su nedinamički modovi sistema, (B1).

(ii) *Beskonačni generalisani sopstveni vektori* matričnog para (sE − A), *stepena k*, $(k \geq 2)$, razapinju prostor *impulsivnih* rešenja sistema, datog jed.(B1); odgovarajuće *beskonačne sopstvene vrednosti* matrice (sE−A) su *dinamički modovi u beskonačnosti* ili *impulsni modovi* sistema, (B1).

(iii) Matrica W razapinje prostor *kauzalnih* ili tzv. *rešenja konačnih učestanosti* sistema, datog (B1); dijagonalni elementi matrice Λ su *konačni dinamički modovi* sistema (B1).

Nedinamički modovi su beskonačne sopstvene vrednosti matrice (sE − A) pridruženi pravcima deskriptivnog vektora u kojima postoji čisto algbarska zavisnost između promenljivih stanja (deskriptivnog vektora stanja), vektora ulaza i vektora izlaza. Prostor nedinamičkih rešenja razapinje nulti prostor matrice E. Dinamički modovi u beskonačnosti su beskonačne sopstvene vrednosti matrice (sE − A) pridruženi pravcima u kojima deskriptivni vektor može da poprimi *impulsno ponašanje* zahvaljujući odgovarajućem početnom uslovu pri nultoj vrednosti ulazne veličine.

Imajući u vidu prethodne činjenice i **Lemu B1** mogu se dati sledeći rezultati koji objedinjuju sva prethodna razmatranja.

Lema B2. Neka je matrični par (E, A) *regularan.* Tada:

(i) Sve *beskonačne sopstvene vrednosti* regularnog matričnog para (sE − A) koje nisu pridružene dinamičkim modovima beskonačne učestanosti su pridružene nedinamičkim modovima.

(ii) Broj (konačnih i beskonačnih) dinamičkih modova sistema, (B1), *jednak* je rangu matrice E.

(iii) Broj konačnih nedinamičkih modova sistema, jed.(B.1), *jednak je $(n-q)$.*

Lema B3. Pretpostavimo da je sistem, dat jed.(B1), preveden na svoju SVD kanoničku formu. Tada, ako je A_{22} *nesingularna matrica*, važi:

(i) Matrični par (E, A) je *regularan*.

(ii) Sistem, dat jed. (B1) ne poseduje impulsne modove.

Dodatak C

Uobičajena obeležavanja

Sa $\aleph(F)$ i $\Re(F)$ označavaju se nulti prostor (jezgro) i domen ili područje vrednosti operatera F, sledstveno, tj.:

$$\aleph(F) = \{\mathbf{x}: F\mathbf{x} = \mathbf{0},\ \forall\ \mathbf{x}\in \Re^n\} \tag{C1}$$

$$\Re(F) = \{\mathbf{y}\in \Re^m,\ \mathbf{y} = F\mathbf{x},\ \mathbf{x}\in \Re^n\} \tag{C2}$$

pri čemu važi:

$$\dim \aleph(F) + \dim \Re(F) = n \tag{C3}$$

Literatura

[1] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., KORUGA,Đ., MILINKOVIĆ,S.A,. JOVANOVIĆ,M.B. Neljapunovska stabilnost linearnih diskretnih deskriptivnih sistema. *Naučnotehnički pregled,* 2001, vol.LI, no.1, p.5.

[2] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., DRAKULIĆ, V., JOVANOVIĆ, M.B., PAVKOVIĆ,B. Generalisani inverzi u teoriji i primeni u linearnim singularnim sistemima. *Naučnotehnički pregled,* (2001.b), (u pripremi).

[3] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., DRAKULIĆ,V., JOVANOVIĆ,M.B. O nekim specifičnim osobinama linearnih diskretnih deskriptivnih sistema. *Naučnotehnički pregled,* (2001.c), (u pripremi).

[4] BAJIĆ,V.B. *Lyapunov's Direct Method in The Analysis of Singular Systems and Networks*, Shades Technical Publications. Hillcrest, Natal, RSA, 1992.

[5] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations*. Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[6] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations II.* Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[7] LEWIS,F.L. A Survey of Linear Singular Systems. *Circ. Syst. Sig. Proc.*, **5** (1) (1986) 3–36.

[8] LEWIS,F.L. *Recent Work in Singular Systems.* Proc. Int. Symp. on Sing. Syst. Atlanta, GA (1987) 20–24.

[9] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ, M.B. *Application of Singular Systems Theory in Chemical Engineering*. MAPRET Lecture – Monograph, 12th International Congress of Chemical and Process Engineering, CHISA 96, Praha, Czech Republic 1996.a.

[10] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ, JOVANOVIĆ,M.B. *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja.* GIP Kultura, Beograd, 1996.b.

[11] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A. *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja.* GIP Kultura, Beograd, 1998.a.

[12] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Consistency and Liapunov Stability of Linear Descriptor Systems: a Geometric Approach. *IMA Journal of Math. Control and Information,* (1985), no.2, p.139-151.

[13] ERIĆ,T., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. Existence of Solutions Convergent to the Origin of Phase Space and Quantitative Measures of Robustness of Linear Discrete-Time Singular Systems. *Proc. SAUM*, Novi Sad, YU (1995) 256–262.

[14] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., ERIĆ,T., MILINKOVIĆ,S.A. Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Systems. *IMA J. Math. Control and Information*, (1998.b) (15**)** 53-62.

[15] PANDOLFI,L. Controllability and Stabilization for Linear Systems of Algebraic and Differential Equations. *JOTA*, **30** (4) (1980) 601–620.

[16] SYRMOS,V.L., MISRA,P, ARIPIRALA,R. On the Discrete Generalized Lyapunov Theorem for Descriptor System. *Automatica*

(31), (1995), 297-301.

[17] MILIĆ,M.M., BAJIĆ,V.B. Solution Behavior of Semi-State Model for Large-Scale Time-Discrete Systems. *Proc 5th Int. Symp. Network Theory, ETAN and CAS Society*, Sarajevo, Yugoslavia (1984) 106–111.

[18] DAI,L. *Singular Control Systems*. Springer Verlag, Berlin, 1989.

[19] HSIUNG,K.L., LEE,L. Lyapunov Inequality and Bounded Real Lemma for Discrete-time Descriptor Systems. *IEE Proc. - Control Theory Appl*., (**146**), no.4, July (1999), 327 - 331.

[20] BAJIĆ,V.B. *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*. Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

[21] XU,S., YANG,C. Stabilization of Discrete-time Singular Systems: a Matrix Inequality Approach. *Automatica* (35), (1999), 1613 - 1617.

[22] DEBELJKOVIĆ D.LJ., DRAKULIĆ,V, JOVANOVIĆ,M.B. Stabilnost Linearnih Autonomnih Singularnih Sistema u Smislu Ljapunova: Retrospektiva Rezultata. *Naučnotehnički pregled,* (2001). (u štampi).

[23] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,S.A. *Stabilnost sistema sa kašnjenjem na konačnom vremenskom intervalu.* GIP Kultura, Beograd, 1999.

[24] VERGHESE,G.C., LEVY,B.C., KAILATH,T. A Generalized State-Space for Singular Systems. *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-26** (4) (1981) 811–831.

[25] COBB,D. Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation. *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-28** (5) (1983.a) 601–611.

[26] COBB,D. A Further Interpretation of Inconsistent Initial Conditions in Descriptor-Variable Systems. *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-28** (9) (1983.b) 920–922.

[27] BENDER,D.J., LAUB,A,J. The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems. *IEEE Trans. Atomat. Cont*., **AC-32** (8) (1987) 672–688.

[28] LEWIS,F.L., OZCALDRIAN,K. Reachability and Controllability for Descriptor Systems”, *Proc. Midwest Symp. on Circ. and Syst.*, Morgantown, WV (1984).

[29] CAMPBELL,S.L., MEYER,C.D., ROSE,N.J. Application of Drazin Inverse to Linear Systems of Differential Equations. *SIAM J. Appl. Math.*, **31** (1976) 411–425.

[30] *CIRCUITS, SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING*, Special Issue on Semistate Systems, **5** (1) (1986).

[31] *CIRCUITS, SYSTEMS AND SIGNAL PROCESSING*, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, **8** (3) (1989).

[32] DIHOVIČNI,Đ.N., ERIĆ,T.N., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANO-VIĆ,M.B. Weak Domain of Attraction and Existence of Solutions Convergent to the Origin of the Phase Space of Discrete Descriptor Szstems. *Proc. IHTURS 96,* Leon (Spain), July 5 - 7, (1996), 367 - 371.

[33] LEWIS,F.L., OZCALDRIAN,K. The Relative Eigenstructure Problem and Descriptor Systems. *SIAM Nat. Meet.*, Denver, CO (1983).

[34] MULLER,P.C. Stability of Linear Mechanical Systems with Holonomic Constraints. *Appl. Mech. Rev.* (11), part 2, November (1983), pp. 160 - 164.

[35] TSENG,H.C., KOKOTOVIĆ,P.V. Optimal Control in Singularly Perturbed Systems: The Integral Manifold Approach. *IEEE Proc. on CDC*, Austin, TX (1988) 1177–1181.

[36] ZHANG,Q., DAI,G., LAM,J., ZHANG,L.Q., DE LA SEN,M. Asymptotical Stability and Stabilization of Descriptor Systems", *Acta Automatica Sinica,* vol. 24 (2), (1998), p. 208 - 211.

[37] ZHANG,Q., LAM,J., ZHANG,L.Q. Lzapunov and Riccati Equations of Discrete-Time Descriptor Systems. *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-44** (11) (1999) 2134 – 2139.

Rad primljen: 16.4.2001.god.