

UDK: 621.833.6(047)=861
COSATI: 13-09

Unutrašnje dinamičke sile planetarnih prenosnika

Mr Vojislav Batinić, dipl.inž.¹⁾

Unutrašnje dinamičke sile u planetarnim prenosnicima su posledica promenljivih elastičnih deformacija zubaca u sprezi, vibracija delova prenosnika i odstupanja geometrije ozubljenja usled habanja zubaca i grešaka pri izradi. U radu je obrađena problematika određivanja elastičnih deformacija zubaca spoljašnjeg i unutrašnjeg ozubljenja i definisana je vremenska funkcija promene ove deformacije uključujući uticaj odstupanja geometrije. Ova funkcija je korišćena kao pobuda vibracija planetarnog prenosnika, koje su simulirane na računaru pomoću MATLAB programskog paketa i razvijenog sistema jednačina za ekvivalentni mehanički model. Rezultat simulacija su vremenske funkcije promene unutrašnjih dinamičkih sila u spregama zubaca za koje je izvedena i odgovarajuća frekvencijska analiza.

Ključne reči: Planetarni prenosnik, unutrašnje dinamičke sile, oscilatorni model, deformacija, rezonansna oblast.

Uvod

UNUTRAŠNJA dinamička opterećenja u sklopovima mašinskih sistema posledica su međusobne interakcije delova. Usled promene elastičnih deformacija nastaju inercijalne sile i sile sudara delova. Odstupanja oblika i dimenzija usled grešaka pri izradi i habanja, ove sile značajno pojačavaju. Klizanje i kotrljanje delova takođe doprinose uvećavanju ukupnog opterećenja mašinskih delova i po-buđuju vibracije sistema. Inercija masa koje osciluju je dodatna dinamička sila. Tako je sila uzrok, a istovremeno i posledica vibriranja.

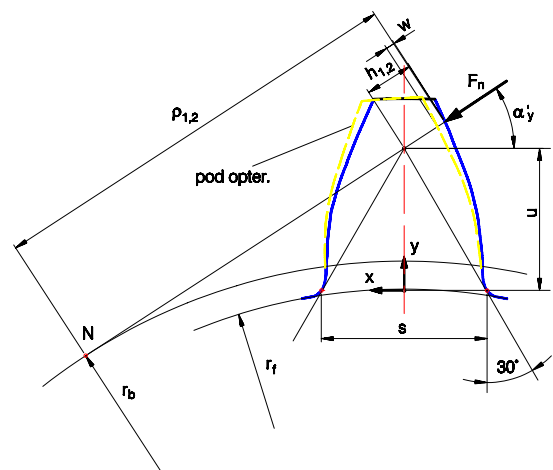
Sile usled vibriranja mogu biti pojačanog intenziteta, ako se ostvaruju sopstvenim učestanostima i ako se ove učestanosti poklope sa učestanostima pobudnih sila.

Deformacije zubaca u toku sprezanja unutrašnjeg ozubljenja

Osobine sistema zavise od: krutosti zubaca, karakteristika prigušenja nekih elemenata sistema, ugiba vratila i deformacija oslonaca.

Krutost zubaca se u procesu povezivanja periodično menja. Tako razmatran sistem sa parametarskom pobudom oscilovanja uzima u obzir i prekid kontakata. Ova parametarska pobuda je uslovljena stepenastom promenom krutosti zubaca na prelazu od zone jednoparne na dvoparnu spregu. Zakon menjanja krutosti zubaca, zavisi od vrste sprege i određuje vrstu funkcije pobude oscilatornog sistema. Do funkcije promene krutosti zubaca (uzimajući zubac kao konzolu male dužine izloženu dejstvu sile čiji je pravac upravan na bok i tangira osnovni krug poluprečnika r_b – sl.1) i odgovarajuće funkcije pobude dolazi se određivanjem deformacije para zubaca.

Osnove za određivanje deformacija para zubaca u dodiru opisao je Veber 1953. godine. Prema ovom rešenju, deformacija para zubaca u sprezi u pravcu normale u



Slika 1. Karakteristični parametri zupca [6]

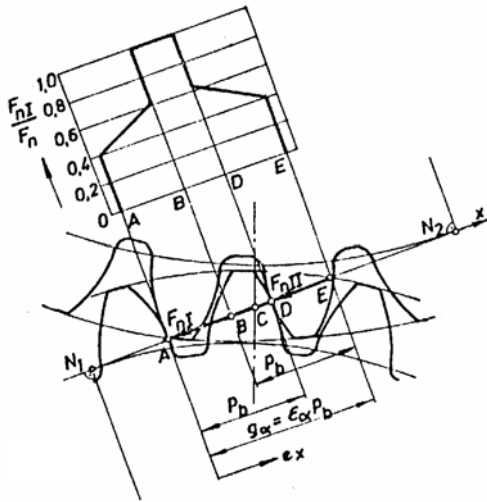
trenutnoj tački dodira w jednaka je zbiru deformacija usled savijanja jednog i drugog zupca w_1 i w_2 i deformacije bokova oba zupca usled gnječenja, tj. Hercovog pritiska w_H [5]:

$$w = w_1 + w_2 + w_H \quad (1)$$

pri čemu se oznaka (1) odnosi na sprezanje samo jednog para zubaca ne uključujući raspodelu sile na parove zubaca u sprezi ($F_n = \text{const.}$). Korišćenjem oznaka na sl.2, deformacija usled savijanja zubaca malog zupčanika može da se prikaže izrazom:

$$w_1 = \frac{F_n \cos \alpha_y}{b E} \left[10,92 \int_0^u \frac{(u-y)^2}{(2x)^3} dy + 3,1(1+0,294tg^2 \alpha_y) \int_0^u \frac{dy}{2x} + \dots \right. \\ \left. + 5,2 \frac{u^2}{s^2} + \frac{u}{s} + 1,4(1+0,294tg^2 \alpha_y) \right] \cdot 10^{-3}$$

¹⁾ Vojnotehnička akademija VJ, 11000 Beograd, Ratka Resanovića 1



Slika 2. Raspedela normalne sile F_n na parove zubaca [7]

Za w_2 važi isti izraz, dok je deformacija bokova oba zupca:

$$w_{II} = \frac{F_n}{b} \frac{2(1-\nu^2)}{\pi E} \left[\ln \left(\frac{h_1 h_2 \pi E}{2(1-\nu^2) \rho_m F_n} \frac{b}{F_n} \right) - \frac{\nu}{1-\nu} \right] 10^{-3} \text{ m} \quad (3)$$

gde su: ν – Poasonov koeficijent, E – modul elastičnosti i

$\rho_m = \frac{\rho_1 \rho_2}{\rho_1 + \rho_2}$ – ekvivalentni poluprečnik krivine bokova zubaca u trenutnoj tački dodira.

Deformacije usled savijanja su najveće pri dodiru na vrhu zupca. Na sl.2 dat je dijagram raspodele normalne sile F_n na parove zubaca, počev od prve tačke dodira na dodirnici A do poslednje E . Uz pretpostavku da je u sprezi samo jedan par zubaca, u krajnjim tačkama dodira ukupan zbir deformacija w je najveći. Međutim, pri sprezanju pravozubih zupčanika, pri dodiru u tim položajima, u sprezi je još po jedan par zubaca, te se ukupna normalna sila F_n raspodeljuje, a deformacija svakog od parova zubaca smanjuje [7].

U trenutku kada u spregu ulazi novi par zubaca (tačka A) u tački D se dodiruje prethodni par. Odnos normalnih sila na bokovima zubaca, ako ne postoji razlika u koracima spregnutih zupčanika, jednak je odnosu krutosti zubaca u trenutnim tačkama dodira [5]:

$$\frac{F_{nA}/b}{F_{nD}/b} = \frac{c_A}{c_D} \quad (4)$$

i važi da je:

$$\frac{F_n}{b} = \frac{F_{nA}}{b} + \frac{F_{nD}}{b} \quad (5)$$

Krutost zubaca u trenutku dodira u tačkama A i D je:

$$c_A = \frac{F_n/b}{w_A}; \quad c_D = \frac{F_n/b}{w_D} \quad (6)$$

Iz jednačina (4 i 5) sledi da je:

$$F_{nA}/b = \frac{c_A F_n/b}{c_A + c_D}; \quad F_{nD}/b = \frac{c_D F_n/b}{c_A + c_D} \quad (7)$$

(2) a deformacije zubaca pri dodiru u tačkama A i D pri dvostrukoj sprezi su:

$$w_A = \frac{F_{nA}/b}{c_A} = \frac{F_n/b}{c_A + c_D} \quad (8)$$

$$w_D = \frac{F_{nD}/b}{c_D} = \frac{F_n/b}{c_A + c_D}$$

Radi uopštavanja utvrđenih raspodela sile i deformacija u tačkama A i D , na ceo tok sprezanja, može se umesto krutosti c_A i deformacije w_A pisati krutost prvog para zubaca c_I i deformacija w_I , a umesto c_D i w_D krutost i deformacija drugog para zubaca u sprezi c_{II} i w_{II} . Tada se mogu upštiti jednačine (7 i 8) i prevesti u oblik:

$$(F_n/b)_I = \frac{c_I}{c_I + c_{II}} F_n/b = \xi_I F_n/b \quad (7a)$$

$$(F_n/b)_{II} = \frac{c_{II}}{c_I + c_{II}} F_n/b = \xi_{II} F_n/b$$

$$w_I = \frac{F_n/b}{c_I + c_{II}}; \quad w_{II} = \frac{F_n/b}{c_I + c_{II}} \quad (8a)$$

gde su: ξ_I i ξ_{II} – faktori podele opterećenja na parove zubaca u sprezi.

Shodno promeni deformacija, menja se i krutost parova zubaca u sprezi u toku sprezanja jer je:

$$c = \frac{F_n/b}{w} \quad (9)$$

Funkcija promene krutosti parova zubaca u sprezi $c(t)$ je periodična vremenska funkcija s periodom koji je jednak vremenskom intervalu između ulazaka dva susedna para zubaca u spregu, tj. vremenu potrebnom da se par zubaca pomeri iz tačke A u tačku D :

$$T = 1/nz \quad (10)$$

gde je n – učestanost obrtanja zupčanika u s^{-1} .

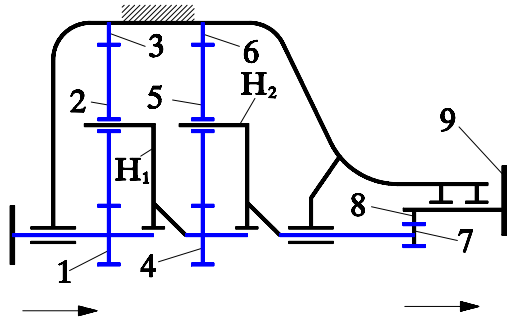
Amplituda promene krutosti zubaca može kod promene sprege da se promeni pomoću variranja stepena sprezanja ili ugla sprezanja, dok karakter promene krutosti zubaca može da bude izmenjen uvođenjem pomeranja profila.

Na vrstu oscilacija i opterećenje koje se javlja u spregama zubaca zupčanika u velikoj meri utiču parametri prigušenja sprege, vratila i ležišta. Tačno određivanje parametara prigušenja veoma je važno u predkritičnoj zoni glavne rezonanse, a takođe, u slučaju promene konstrukcionih parametara zupčastog prenosnika. Na osnovu postojećeg iskustva, smatra se da se kod promene konstrukcionih veličina koeficijent prigušenja skoro ne menja, tj. opterećenja rastu sa povećanjem konstrukcionih veličina. Kod prenosnika s malim greškama izrade prigušenje je bilo toliko veliko da se sistem sa parametarskom pobudom oscilovanja po svom ponašanju malo razlikovao od obične linijske pobude.

Posmatrani planetarni prenosnik ima dva planetarna reda (stepena prenosa), koji se sastoje od tri satelita u sprezi sa centralnim zupčanikom, venčanika, nosača satelita i izlazne prirubnice, a šematski je prikazan na sl.3.

Posmatra se unutrašnji zupčasti par koji se sastoji od

malog zupčanika – satelita z_2 sa spoljašnjim zupcima i velikog zupčanika – venčanika z_3 sa unutrašnjim zupcima.



Slika 3. Šema planetarnog reduktora: 1- centralni zupčanik, 2- satelit, 3- venčanik, 9- pribirnica, H- nosač satelita

Geometrijske mere zupčastog para su:

$$\begin{aligned} m_2 = m_3 &= 2,5 \text{ mm}, & z_2 &= 43 \text{ zupca}, \\ d_2 &= 107,5 \text{ mm}, & d_{b_2} &= 100,94 \text{ mm}, \\ d_{f_2} &= 101,25 \text{ mm}, & d_{a_2} &= 112,5 \text{ mm}, \\ z_3 &= 102 \text{ zupca}, & d_3 &= 255 \text{ mm}, \\ r_{a_3} &= 124,875 \text{ mm}, & d_{b_3} &= 239,445 \text{ mm}, \\ r_{f_3} &= 130,625 \text{ mm}, & p &= 7,85 \text{ mm}, \\ p_b &= 7,37 \text{ mm}, & s &= 3,925 \text{ mm}, \\ a &= 73,75 \text{ mm}, & \varepsilon_\alpha &\approx 2, \quad b = 40 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Uz pretpostavku da je u sprezi samo jedan par zubaca, na osnovu jednačine (2) deformacija u tački dodira A je:

$$\begin{aligned} w_{2A} &= 200 \frac{\cos^2 8^\circ}{2,1 \cdot 10^5} \left[3,64 \left(\frac{0,25}{2 \cdot 2,5} \right)^3 + \right. \\ &+ 3,1 (1 + 0,294 \operatorname{tg}^2 8^\circ) \frac{0,25}{2 \cdot 2,5} + \\ &\left. + 5,2 \frac{2,5^2}{5^2} + \frac{0,25}{5} + 1,4 (1 + 0,294 \operatorname{tg}^2 8^\circ) \right] \cdot 10^{-3} \end{aligned}$$

i iznosi na zupcu zupčanika z_2 : $w'_{2A} = 2,5 \mu\text{m}$.

Deformacija u tački A zupca zupčanika z_3 je:

$$w'_{3A} = 83,74 \mu\text{m}.$$

Deformacije bokova oba zupca usled gnječenja u tački A će da se dobiju na osnovu obrasca (3) i potrebnih parametara za tačku A , tj.:

$$w'_{HA} = 200 \frac{2(1-0,3^2)}{3,14 \cdot 2,1 \cdot 10^5} \left[\ln \left(\frac{2,6 \cdot 2,6 \cdot 3,14 \cdot 2,1 \cdot 10^5}{2(1-0,3^2)10} \frac{40}{8000} \right) - \frac{0,3}{1-0,3} \right] 10^{-3}$$

i iznosi: $w'_{HA} = 4,07 \mu\text{m}$.

Ukupna deformacija u tački A prema jednačini (1) je:

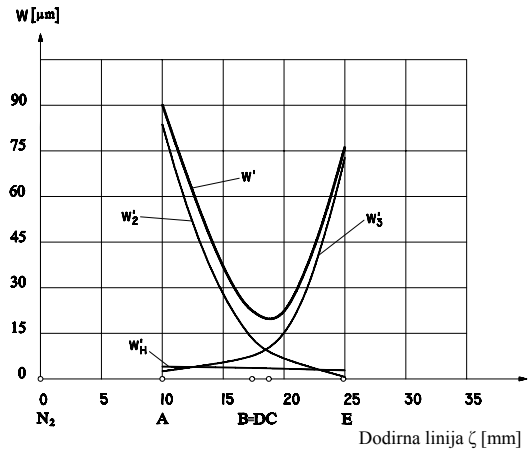
$$\begin{aligned} w'_A &= w'_{2A} + w'_{3A} + w'_{HA} = 90,26 \mu\text{m}, \\ w'_B &= w'_D = 21,92 \mu\text{m}, \quad w'_C = 18,74 \mu\text{m}, \\ w'_E &= 76,3 \mu\text{m} \end{aligned}$$

Promena deformacija u tačkama dodira zubaca za jednoparnu spregu data je na sl.4.

Međutim, pri sprezanju pravozubih zupčanika, pri dodiru u tim položajima, u sprezi je još jedan par zubaca, te se ukupna normalna sila F_n raspodeljuje, a deformacija svakog od parova zubaca smanjuje.

Intenzitet normalne sile F_n je odabran tako da su zahtevi

čvrstoće s obzirom na površinski pritisak i savijanje u podnožju zubaca zupčanika zadovoljeni i iznosi $F_n/b = 200 \text{ N/m}$.



Slika 4. Deformacije para zubaca u toku sprezanja unutrašnjeg ozubljenja

Kod posmatranog zupčastog para sa $\varepsilon_\alpha = 1,975$ u sprezi su stalno dva para zubaca. Na osnovu jednačina (6,7 i 8) i raspodele normalne sile na parove zubaca, sl.2, dobiće se deformacije u tački A kao i u drugim tačkama na profilu zupca tj.:

$$w_{2A} = \frac{F_{nA}/b}{c'_{2A}} = \frac{0,4F_n/b}{c'_{2A}} = \frac{0,4F_n/b}{W'_{2A}} = \frac{0,4 \cdot 200}{2,5} = 1 \mu\text{m}$$

Analogno tački A , odrediće se deformacije u ostalim tačkama dodira zubaca:

$$w_{2E} = \frac{F_{nE}/b}{c_{2E}} = \frac{0,4 \cdot 200}{\frac{200}{72,85}} = 29,14 \mu\text{m},$$

$$w_{2D} = \frac{F_{nD}/b}{c_{2D}} = 0,6 \cdot w_{2D} = 4,836 \mu\text{m},$$

$$w_{3A} = 33,5 \mu\text{m}, \quad w_{3D} = 6,138 \mu\text{m},$$

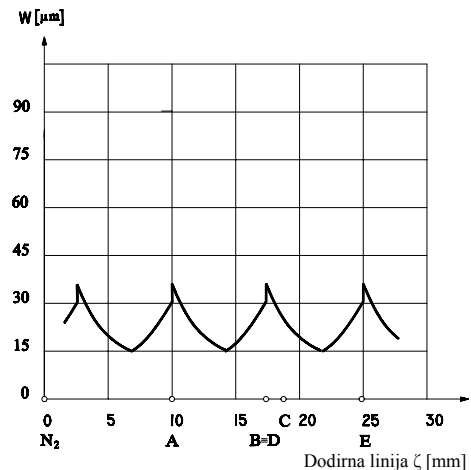
$$w_{3E} = 0,26 \mu\text{m}, \quad w_{HA} = 1,6 \mu\text{m},$$

$$w_{HE} = 1,12 \mu\text{m}, \quad w_{HD} = 2,178 \mu\text{m}.$$

Ukupne deformacije u tačkama dodira zubaca su:

$$w_A = w_{2A} + w_{3A} + w_{HA} = 36,1 \mu\text{m},$$

$$w_D = w_B = 13,152 \mu\text{m}, \quad w_E = 30,52 \mu\text{m}.$$



Slika 5. Deformacije zubaca u toku spreznja pri $\varepsilon_\alpha \approx 2$

Saglasno promeni deformacija menja se i krutost parova zubaca u sprezi u toku spreznja, a funkcija promene krutosti parova zubaca u sprezi $c(t)$ je periodična funkcija s periodom koji je jednak vremenskom intervalu između ulazaka dva susedna para zubaca u spregu, tj. vremenu potrebnom da se par zubaca pomeri iz tačke A u tačku D .

Uticao odstupanja osnovnih koraka na deformaciju zubaca zupčanika

Ako koraci pogonskog i gonjenog zupčanika nisu jednaki, tj. postoji razlika koraka $\Delta p_b = p_{bp} - p_{bg}$, raspodela sile na parove zubaca u sprezi ne odgovara izrazu (7), a funkcije promene deformacija imaju drugačiji karakter.

Ako je $\Delta p_b < 0$, u tački A se ostvaruje veća deformacija u odnosu na dodir u tački D . Povećanjem apsolutne vrednosti ove razlike koraka, sila i deformacija u tački D se smanjuju. Dodir u tački D postoji sve dok je zadovoljen sledeći uslov:

$$w'_A = \frac{F_n / b}{c_A} > |\Delta p_b|$$

U slučaju da je $\Delta p_b = 20 \mu\text{m}$, ovaj uslov je zadovoljen.

Da bi se korak na dodiru \overline{AD} izjednačio, par zubaca u tački A treba da se deformiše za veličinu Δp_b silom:

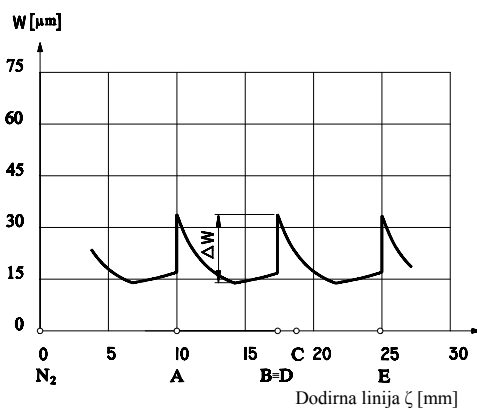
$$\Delta F_n / b = c'_A \cdot \Delta p_b = \frac{F_n / b}{w_A} \cdot 20 = 44,3 \mu\text{m}$$

Ostali deo sile se deli na parove zubaca u A i D srazmerno krutostima, odnosno ukupne deformacije su:

$$w_A = \frac{F_n / b - \Delta F_n / b}{c_A + c_D} + \Delta p_b = 33,74 \mu\text{m}$$

$$w_D = \frac{F_n / b - \Delta F_n / b}{c_A + c_D} = 13,74 \mu\text{m}, \quad w_E = 17 \mu\text{m}$$

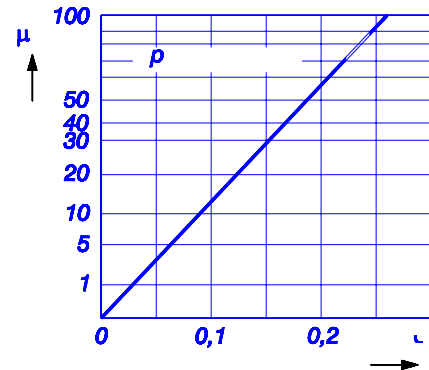
Uticao razlike koraka na promene deformacije zubaca dat je na sl.6.

Slika 6. Uticao razlike koraka $\Delta p_b = -20 \mu\text{m}$ na deformaciju zubaca

Korišćenjem dijagrama promene deformacija zubaca u sprezi zupčanika s pravim zupcima i razlikom koraka $\Delta p_b = 20 \mu\text{m}$, može da se dobije funkcija promene pomeranja zubaca zupčanika u pravcu dodirnice x_s . Usled

razlike koraka, dodir zubaca počinje za $\Delta \varepsilon_\alpha \cdot p_b$ ispred tačke A . Istovremeno se prethodni par zubaca u sprezi rasterećuje, te se u preseku linija promena deformacija ovih parova zubaca dobija minimum pomeranja x_s .

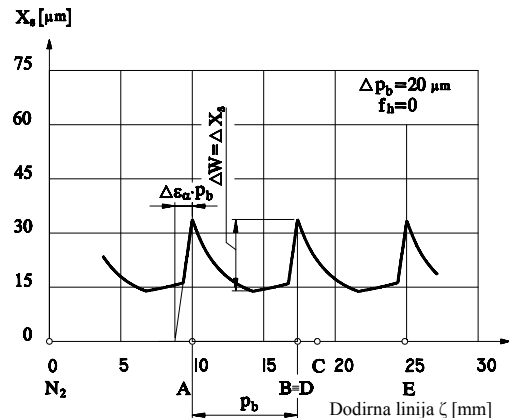
Uvećanje stepena spreznja profila zubaca $\Delta \varepsilon_\alpha$ određuje se na osnovu dijagrama prikazanog na sl.7.

Slika 7. Uticao ukupne razlike koraka na promenu stepena spreznja profila zubaca $\Delta \varepsilon_\alpha$ [7]

Za ukupnu razliku koraka:

$$\Delta p_{bu} = w'_D + |\Delta p_b| = 41,92 \mu\text{m}$$

promena stepena spreznja je $\Delta \varepsilon_\alpha = 0,166 \mu\text{m}$, te dodir zubaca počinje ispred tačke A na rastojanju $\Delta \varepsilon_\alpha \cdot p_b = 0,166 \cdot 7,37 = 1,22 \text{mm}$.

Slika 8. Statička promena pomeranja zupčanika usled deformacije zubaca i razlike koraka $\Delta p_b = 20 \mu\text{m}$

Maksimum pomeranja odgovara najvećoj deformaciji zubaca koja je pri manjim razlikama koraka Δp_b jednaka deformaciji pri dodiru zubaca između tačaka B i D , a pri većim deformaciji u prvom tački dodira A ($w_A > w'_D$).

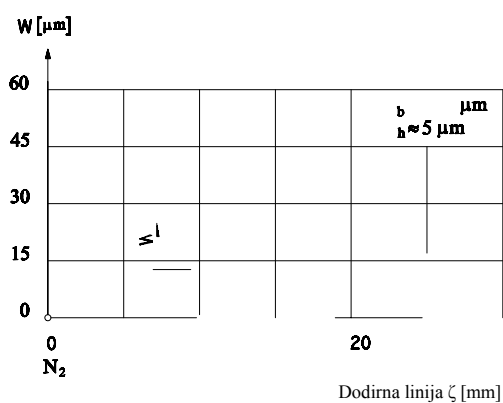
Uticao habanja zubaca na funkciju promene deformacije

Na promenu deformacije Δw utiče i habanje zubaca zupčanika u sprezi. U početku rada debljina pohabanog sloja f_h je mala u odnosu na opterećenje, odnosno deformaciju. Pojavom habanja spreznje počinje bliže tački A i završava se bliže tački E , promena deformacije je postepenija, dok je promena pomeranja u pravcu dodirnice

zupčanika $\Delta x_s = \Delta w$ približno nepromenjena u početnom periodu rada.

Daljim radom i habanjem pojavljuju se zazori između bokova zubaca (Δ) slično sprezanju s velikom razlikom koraka Δp_b . Pomeranje zubaca i zupčanika u pravcu dodirnice je $\Delta x_s = \Delta w + \Delta$. Daljim habanjem zubaca uvećava se pomeranje (Δ), te je efekat velikih habanja na vibracije zupčanika veoma sličan uticaju velikih razlika koraka iako su pohabani zupčanici bez razlike osnovnih koraka.

Isti je uticaj habanja zubaca i kod zupčanika s razlikom koraka Δp_b . Habanjem se smanjuje odstupanje položaja prve tačke dodira od položaja A ili poslednje tačke dodira od položaja E, koje je ostvareno razlikom koraka i deformacijama zubaca. Na sl.9 prikazan je uticaj habanja zubaca na promenu deformacije Δw pri razlici koraka zubaca $\Delta p_b = 20 \mu\text{m}$.



Slika 9. Uticaj habanja zubaca na promenu deformacije Δw pri razlici koraka $\Delta p_b = 20 \mu\text{m}$

Habanjem se smanjuje razlika koraka Δp_b , ali uticaj ove razlike se ne gubi, jer da bi se koraci izjednačili potrebno je da debljina pohabanog sloja bude $2f_h = \Delta p_b$, međutim, tada je veličina pomeranja $\Delta x_s = \Delta w + \Delta$, gde je $\Delta = 2f_h$.

Određivanje nivoa i karaktera dinamičkih sila posmatranih segmenata prenosnika

Dinamičko ponašanje segmenta prenosnika može da se analizira pomoću oscilatornog modela prikazanog na sl.10.

Iz modela se vidi da su moguće četiri slobode kretanja i to: dve rotacije δ_1, δ_2 , i dve translacije y_1 i y_2 . Između promenljivih postoji veza:

$$x = \delta_1 r_{b1} + y_1 - \delta_2 r_{b2} - y_2 \quad (11)$$

Uticaj parametara ozubljenja (y, x, α_n) na vibracije zupčanih parova može se ispitivati uz pretpostavku da je sila u sprezi zubaca $F_n = \text{const.}$, a da je krutost zubaca u sprezi $c(t)$ promenljiva. Međutim, time se ne omogućuje analiza uticaja odstupanja mera, pa se usvaja da je krutost zubaca u sprezi stalna i jednaka prosečnoj krutosti c_0 , a da je sila na boku zupca $F_n(t)$ promenljiva i da se menja srazmerno promeni deformacije (statičko pomeranje) zupčanika x_s .

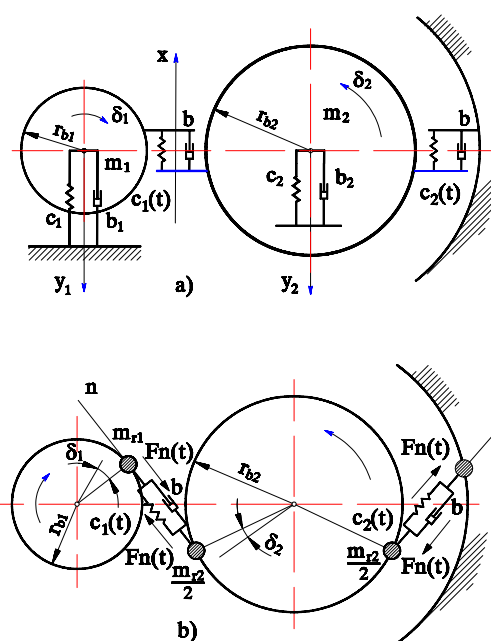
Na osnovu modela, sl.10, jednačine oscilovanja su:

$$J_1 \ddot{\delta}_1 + [c_{01} (y_1 + \delta_1 r_{b1} - y_2 - \delta_2 r_{b2})] r_{b1} + [b (\dot{y}_1 + \dot{\delta}_1 r_{b1} - \dot{y}_2 - \dot{\delta}_2 r_{b2})] r_{b1} = F_n r_{b1} \quad (12)$$

$$m_1 \ddot{y}_1 + c_1 y_1 + b_1 \dot{y}_1 + c_{01} (y_1 + \delta_1 r_{b1} - y_2 - \delta_2 r_{b2}) + b (\dot{y}_1 + \dot{\delta}_1 r_{b1} - \dot{y}_2 - \dot{\delta}_2 r_{b2}) = 0 \quad (13)$$

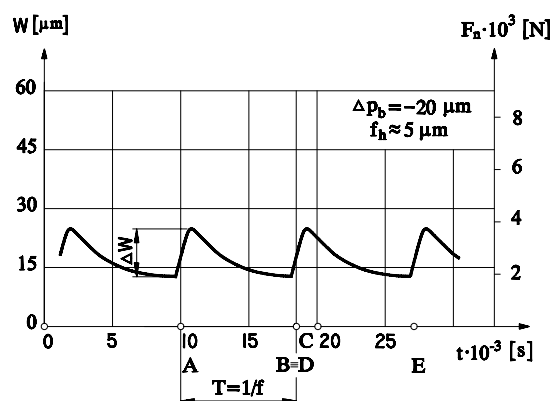
$$J_2 \ddot{\delta}_2 - [c_{01} (y_1 + \delta_1 r_{b1} - y_2 - \delta_2 r_{b2})] r_{b2} - [b (\dot{y}_1 + \delta_1 r_{b1} - \dot{y}_2 - \dot{\delta}_2 r_{b2})] r_{b2} + [c_{02} (\delta_2 r_{b2} - y_2)] r_{b2} + [b (\dot{\delta}_2 r_{b2} - \dot{y}_2)] r_{b2} = 0, \quad (14)$$

$$m_2 \ddot{y}_2 - c_{01} (y_1 + \delta_1 r_{b1} - y_2 - \delta_2 r_{b2}) - b (\dot{y}_1 + \delta_1 r_{b1} - \dot{y}_2 - \dot{\delta}_2 r_{b2}) - c_{02} (\delta_2 r_{b2} - y_2) - b (\dot{\delta}_2 r_{b2} - \dot{y}_2) = 0. \quad (15)$$



Slika 10. Model oscilovanja zupčastog para: a) u čeonom preseku spregnutih zupčanika, b) u pravcu dodirnice

Funkcija promene sile $F_n(t)$ predstavljena je na sl.11 za zupčasti par s unutrašnjim ozubljenjem.



Slika 11. Vremenska funkcija elastične pobudne sile $F_n(t)$ u sprezi zubaca

Osnovni parametri posmatranog segmenta planetarnog prenosnika su:

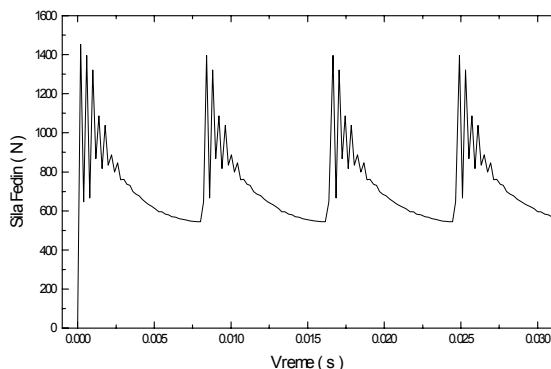
$$\begin{aligned} m_1 &= 0,5 \text{ kg} & m_2 &= 2,85 \text{ kg}, \\ c_1 &= 2000 \cdot 10^6 \text{ N/m}, & c_2 &= 160 \cdot 10^6 \text{ N/m}, \\ b_1 &= 2500 \text{ Ns/m}, & b_2 &= 200 \text{ Ns/m}, \\ b &= 3500 \text{ Ns/m}, & r_{b1} &= 21,12 \text{ mm}, \\ r_{b2} &= 50,47 \text{ mm}. \end{aligned}$$

Krutosti $c_1(t)$ i $c_2(t)$, koje su vremenske funkcije i predstavljaju krutosti veza centralni zupčanik–satelit i satelit–venčanik, zamenjene su srednjim vrednostima $c_{01} = 1,3 \cdot 10^8 \text{ N/m}$ i $c_{02} = 1,5 \cdot 10^8 \text{ N/m}$. Promena sile je saglasna promeni deformacije zubaca unutrašnjeg zupčastog para planetarnog prenosnika i generisana je za slučaj kada postoji odstupanje koraka i uticaj habanja. Koeficijenti krutosti i prigušenja zubaca u sprezi, koeficijenti krutosti i prigušenja ležišta kao i vrednosti koeficijentata krutosti i prigušenja nosača satelita izabrane su prema preporukama datim u [1,3 i 7].

Period oscilovanja $T = 1/f$, gde su $f = nz$ – učestanost spreznja zubaca, n – učestanost obrtanja, z – broj zubaca zupčanika. Kako je $n_2 = 60f/z_2$, to će za $n_1 = 800 \text{ min}^{-1}$ i $n_2 = -165 \text{ min}^{-1}$, učestanost spreznja zubaca da iznosi $f = z_2 n_2 / 60 = 118 \text{ Hz}$, a period oscilovanja $T = 1/f = 8,47 \cdot 10^{-3} \text{ s}^{-1}$.

Numerička integracija sistema diferencijalnih jednačina, kao i izlazne vrednosti unutrašnje dinamičke sile u sprezi zubaca, urađeni su u modulu SIMULINK programskog paketa MATLAB korišćenjem metode Runge-Kutta četvrtog reda.

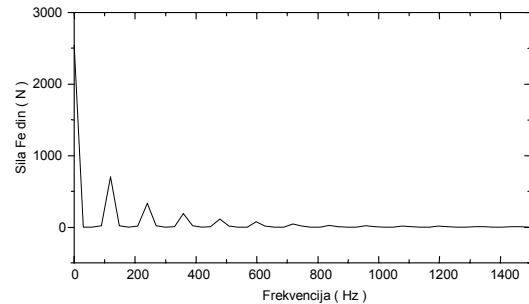
Zavisnost elastične dinamičke sile $F_{edin} = c_{02}x + b\dot{x}$ u funkciji vremena prikazana je na sl.12 na kojoj se vidi da elastična dinamička sila između zubaca zupčanika ima dve komponente, i to jednu koja potiče od pobudne sile i drugu od sopstvenog oscilovanja sistema koji je izražen u početku zahvata zubaca, dok se kasnije vibracije smanjuju ali ne iščezavaju.



Slika 12. Vremenska funkcija unutrašnje dinamičke sile

Ako se izlazne vrednosti unutrašnje dinamičke sile F_{edin} u funkciji vremena podvrgnu Furijeovoj transformaciji, dobiće se frekvencijski spektar sile oblika prikazanog na sl.13. Iz toga spektra je vidljivo da su jače izražene amplitude na frekvencijama $\approx 120 \text{ Hz}$, odnosno to je frekvencija osnovnog harmonika.

Pri radu planetarnih prenosnika javljaju se unutrašnje dinamičke sile koje mogu da se posmatraju kao elastične dinamičke sile (ovde analizirane), dinamičke sile nastale su-darom i dinamičke sile od inercije, odnosno podrhtavanja. Sve su one vremenske funkcije s određenim faznim pomerajima.



Slika 13. Frekvencijski spektar unutrašnje dinamičke sile

Zaključak

Za određivanje unutrašnjih dinamičkih sila planetarnog prenosnika razvijena je procedura i model za simulaciju. Rezultat proračuna je vremenska funkcija promene sile i njen frekvencijski spektar. Kao ulazni podaci za ovu simulaciju koriste se elastične deformacije zubaca zupčanika u sprezi, njihova odstupanja geometrije usled grešaka pri izradi i usled habanja. Osim toga, parametri mehaničkog modela su ekvivalentni masama i krutostima realnog planetarnog prenosnika, te za svaku novu konstrukciju moraju da budu posebno određeni. U radu je simulacija izvedena za planetarni prenosnik za okretanje bagera. Osim navedenih deformacija i odstupanja geometrije ozubljenja, na intenzitet i frekvenciju unutrašnjih dinamičkih sila značajan uticaj mogu da imaju i sopstvene učestanosti prenosnika, naročito kada se sa ovim učestanostima poklopi frekvencija obnavljanja poremećajne sile u sprezi zubaca ili neki njen viši harmonik. Promenom učestanosti obrtanja ili promenom parametara (krutosti i masa) u prenosniku, ova mogućnost može da bude otklonjena.

Literatura

- [1] AJRAPETOV, L.E., GENKIN, D.M. *Dinamika planetarnih mehanizmov*, Nauka, Moskva, 1980.
- [2] Grupa autora. *IMP – Elementi mašinskih konstrukcija*, Zavod za udžbenike i nastavna sredstva, Beograd, 1993.
- [3] KUMAR, A.S., SANKAR, T.S., OSMAN, M.O.M. On Dynamic Tooth Load and Stability of a Spur-Gear System Using the State-Space Approach. *Transactions of the ASME*, March 1985, vol.107, p.54-60.
- [4] LITVIN, F.L. *Teorija zubčatih zacepljenj*. Nauka, Moskva, 1968.
- [5] NIEMAN, G. *Drehnjegfehler, Zahnfederharte und Gerausch bei Stirnradern (Einfluss der Zahnform und der Zahnfehler bei Belastung nach Theorie und Versuch)*. I i II deo VDI-Z Band 112 1970., Nr 4 i Nr 8 Seite. Februar (II) i april (II) 1970.
- [6] OGNJANOVIĆ, M. *Vibracije, šum i odstupanja mera zupčanih parova - istraživanje i uzajamne zavisnosti*, dok. disertacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1984.
- [7] OGNJANOVIĆ, M. Uzajamne zavisnosti odstupanja mera, vibracije i šuma zupčastih parova, I deo. *Mašinstvo*, Beograd, 1985, no.34.
- [8] RADOSAVLJEVIĆ, L.J. *Male oscilacije materijalnog sistema sa konačnim brojem stepeni slobode*, Mašinski fakultet, Beograd, 1986.
- [9] The Math Works, Inc: *Simulink (User's Guide)*, Natick, MA, USA, 1993.
- [10] HIDAKA, T., TERAUCHI, Y., FUJII, M. Analysis of dynamic tooth load on planetary gear. *Bull. JSME*, 1980, vol.23, no.176, p.315-323.

- [11] YANG,D.C.H., LIN,J.Y. Hertzian damping, tooth friction and bending elasticity in gear impact dynamics. *Trans. ASME: J. Mech., Transmiss.,Autom. Des.*, 1987, vol.109, no.2, p.37-44.

Rad primljen: 4.5.2001.god.

