UDK: 656.02(047)=861
COSATI: 15-05, 12-01

Primena modela transportnih mreža u vojnom saobraćaju i transportu

Mr Boban Đorović, dipl.inž.[1)]

Prikazana je primena modela transportnih mreža u rešavanju problema rutinga saobraćajnih sredstava i lokacijskih problema. U rešavanju rutinga su razmatrani modeli: Clarke-Wrightov algoritam ”ušteda” i modifikovani Clarke-Wrightov algoritam ”ušteda”. Za rešavanje lokacijskih problema prikazan je model za određivanje medijane. Primena Clarke-Wrightovog algoritma ”ušteda” prikazana je za organizaciju prevoženja za potrebe vojske, a primena modela za određivanje medijane na problemu lokacije poljskog skladišta.

Ključne reči: **Modeli transportnih mreža, fuzzy aritmetika, organizacija prevoženja.**

Uvod

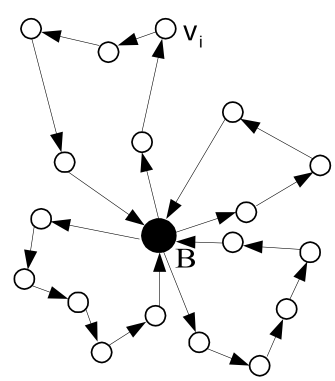
TEORIJA transportnih mreža, kao opšta saobraćajna disciplina koja se u poslednje vreme u svetu sve više razvija, bitno doprinosi boljem funkcionisanju celog saobraćajnog sistema. Primenom postojećih teorijskih modela, njihovim modifikovanjem i stvaranjem novih, ostvaruju se značajni ekonomski efekti i poboljšava kvalitet saobraćajnih usluga.

Vojska Jugoslavije ima sopstvenu saobraćajno-transportnu organizaciju, koja samostalno organizuje i izvršava saobraćajno-transportno obezbeđenje jedinica i ustanova, korišćenjem vojnih kapaciteta i usluga radnih organizacija javnog saobraćaja. U cilju poboljšanja kvaliteta organizacije prevoza, moguća je primena modela transportnih mreža. Na primeru organizacije prevoza za potrebe vojske prikazana je primena modela koji rešavaju probleme rutinga saobraćajnih sredstava, a u okviru njih Clarke-Wrightov algoritam "ušteda", kao i modifikovan Clarke-Wrightov algoritam "ušteda" zasnovan na pravilima *fuzzy* aritmetike.

Problem rutinga saobraćajnih sredstava

Problemi, koji su veoma često prisutni, jesu problemi projektovanja ruta kojima treba da se kreću saobraćajna sredstva. Za projektovanje različitih varijanti rotacije saobraćajnih sredstava, primenjuju se različite tehnike, kao što su, npr. dinamičko programiranje ili metoda grananja i ograničavanja. U rešavanju problema česta je i primena heurističkih algoritama. U najvećem broju slučajeva, primena klasičnih metoda matematičkog programiranja zahteva mnogo vremena rada računara, koje se veoma brzo povećava povećanjem broja čvorova u transportnoj mreži. Upravo zbog toga se veliki broj složenih problema na transportnim mrežama rešava heurističkim algoritmima. Heuristički algoritmi, po pravilu, ne zahtevaju mnogo vremena rada računara, pa nalaze sve veću primenu u inženjerskoj praksi jer najčešće daju rešenja relativno bliska optimalnim.

U organizovanju saobraćaja postavlja se problem određivanja skupa ruta kojima treba da se kreću saobraćajna sredstva pri izvršenju zadatka tako, da ukupno rastojanje koje pređu sva saobraćajna sredstva bude minimalno. Ako, u posmatranom zadatku, postoji n čvorova u kojima se javlja v_i $(i=1,2,...,n)$ zahteva za prevozom, ako su sva saobraćajna sredstva stacionirana u jednoj tački B (baza) i istog kapaciteta V, započinju i završavaju opsluživanje u tački B. Ako je kapacitet saobraćajnih sredstva V veći bilo od kog zahteva za prevoženjem v_i , onda je postavljeni zadatak standardni problem rutinga saobraćajnih sredstava i za njegovo rešavanje razvijen je veliki broj algoritama (sl.1).



Slika 1. Rute saobraćajnih sredstava

Prikazani zadatak se naziva standardnim problemom rutinga saobraćajnih sredstava. Standardni problem rutinga saobraćajnih sredstava se znatno usložnjava uvođenjem u razmatranje različitih karakteristika opsluge koju vrše saobraćajna sredstva, inače prisutnih u praksi. Problem rutinga je znatno složeniji kada u mreži postoji više baza

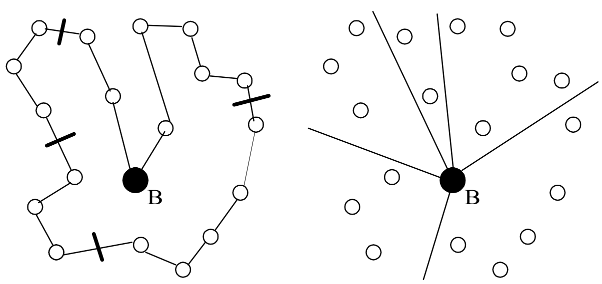
[1)] Vojnotehnička akademija VJ, 11000 Beograd, Ratka Resanovića 1 saobraćajnih sredstava, u slučajevima kada opslugu vrše saobraćajna sredstva različitih kapaciteta, kao i u slučajevima kada se u mreži javljaju stohastički zahtevi za opslugom.

U svetu je razvijen veliki broj algoritama za rešavanje standardnog problema rutinga saobraćajnih sredstava. Dva osnovna pristupa rutingu saobraćajnih sredstava su:

- ruting-zoniranje i
- zoniranje- ruting

Pristup "ruting-zoniranje" podrazumeva da se najpre projektuje samo jedna gigantska ruta koja prolazi kroz sve čvorove koji treba da budu opsluženi. Prilikom projektovanja ove rute ne vodi se računa o operativnim ograničenjima razmatranog problema (kapacitet saobraćajnih sredstava, maksimalna moguća dužina rute itd.). U drugom koraku (sl.2a), gigantska ruta se podeli na manje rute, koje se određuju uz uslov da sva operativna ograničenja budu zadovoljena.

Pristup "zoniranje-ruting" podrazumeva da se najpre cela mreža podeli na zone, a potom da se u svakoj zoni posebno rešava ruting problem (sl.2b).



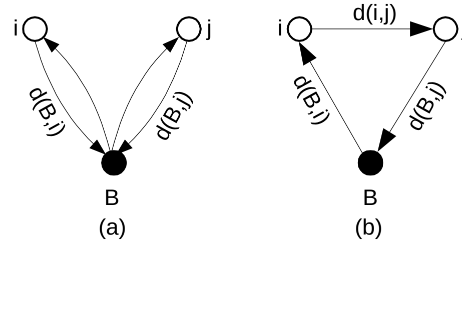
Slika 2. Pristupi "ruting-zoniranje" i "zoniranje-ruting"

Najveći broj algoritama razvijenih za rešavanje problema trgovačkog putnika [1] koristi se i za rešavanje ruting problema, s tim što se, prilikom implementacije algoritma, vodi računa o postojećim operativnim ograničenjima. Tako se, za rešavanje standardnog problema rutinga saobraćajnih sredstava, koriste algoritmi ubacivanja, Clarke-Wrightov algoritam "ušteda", 2-OPT i 3-OPT algoritam itd.

Clarke-Wrightov algoritam "ušteda" za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava

Clarke-Wrightov algoritam "ušteda" jeste jedan od najpoznatijih algoritama za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava.

Ako je *B* (baza) čvor iz koga saobraćajno sredstvo polazi i u koji se vraća na kraju opsluživanja, onda bilo koji par čvorova (i,j) to saobraćajno sredstvo može da opsluži na dva načina: u prvom slučaju, da krene iz baze, opsluži čvor i, vrati se u bazu, opsluži čvor j i ponovo se vrati u bazu (sl.3a.); u drugom slučaju, da krene iz baze, opsluži čvor i, opsluži čvor j i vrati se u bazu (sl.3b).



Slika 3. Izračunavanje "ušteda"

Uz pretpostavku da je $d(i,j)=d(j,i)$ za $\forall(i,j)$, ukupan put koji saobraćajno sredstvo pređe u prvom slučaju iznosi $2d(B,i)+2d(B,j)$, a u drugom slučaju $d(B,i)\ d(i,j)+d(B,j)$.

Ušteda $s(i,j)$, koju saobraćajno sredstvo ostvari krećući se kao u drugom slučaju, iznosi [1]:

$$s(i,j) = 2d(B,i) + 2d(B,j) - (d(B,i) + d(i,j) + d(B,j)),$$

odnosno,

$$s(i,j) = d(B,i) + d(B,j) - d(i,j) \qquad (1)$$

Znači, ušteda $s(i,j)$ je veća, kada su čvorovi i i j spojeni u jednu rutu. Pri tome, ne treba da se prekorače postojeća operativna ograničenja (kapacitet saobraćajnog sredstva i sl.).

Clarke-Wrightov algoritam "ušteda", za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava, sastoji se od sledećih algoritamskih koraka [1] :

KORAK 1: Izračunati uštede $s(i,j) = d(B,i)+d(B,j)-d(i,j)$, za svaki par (i,j) čvorova koje treba opslužiti.

KORAK 2: Izvršiti rangiranje svih ušteda i poredjati ih po veličini. Napraviti listu ušteda koja počinje najvećom uštedom.

KORAK 3: Pri razmatranju uštede $s(i,j)$ odgovarajuću granu (i,j) uključiti u delimičnu rutu ako se pri tome ne krše operativna ograničenja i ako:

a) ni čvor i, ni čvor j nisu bili uključeni ni u jednu delimičnu rutu,
b) je jedan od čvorova, i ili j, već uključen u neku postojeću delimičnu rutu, a taj čvor nije unutrašnji čvor u ruti,
c) su oba čvora, i i j, uključeni u dve različite delimične rute, i nijedan od tih čvorova nije unutrašnji u tim rutama, u kojem je slučaju moguće spojiti delimične rute u jednu.

KORAK 4: Kada je lista ušteda potrošena do kraja, završiti sa algoritmom.

Ovaj aloritam ima sekvencijalnu i simultanu verziju. Sekvencijalna verzija podrazumeva da se rute saobraćajnih sredstava projektuju u sekvenci jedna po jedna. Odnosno, prvo se u potpunosti projektuje jedna ruta, potom se ponovo posmatra lista ušteda (od najveće postojeće uštede), i u potpunosti završi projektovanje druge rute itd. U ovom pristupu, kada se u listi ušteda naidje na par čvorova koji nije uključen ni u jednu rutu, taj par čvorova se "preskače" i ostavlja za kasnije razmatranje. U toku jednog prolaza kroz listu vodi se računa samo o jednoj ruti.

Simultana verzija podrazumeva da se jednim prolaskom kroz listu ušteda, završi projektovanje svih ruta saobraćajnih sredstava, jer se u ovom slučaju, pri nailasku na par čvorova koji nije bio uključen ni u jednu rutu, odmah formiraju nove rute.

Modifikovani Clarke-Wrightov algoritam "ušteda" zasnovan na pravilima fuzzy aritmetike

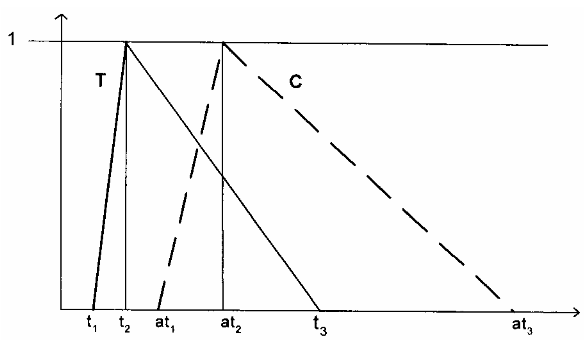
U većini modela razvijenih za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava se pretpostavlja, da su vremena putovanja, rastojanja i transportni troškovi između pojedinih parova čvorova u mreži konstantne veličine, koje su unapred poznate. S druge strane, neophodno je da se istakne da je za potrebno vreme putovanja između dva čvora u mreži povezana određena neizvesnost koja je uslovljena uslovima u kojima se odvija saobraćaj, načinom vožnje, meteorološkim uslovima, izborom pojedinih pravaca itd. Koristeći pravila *fuzzy* aritmetike, razvijen je model za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava u koji je ugrađena neizvesnost vremena putovanja između pojedinih čvorova [3].

Subjektivni osećaj u određivanju vremena putovanja nije dovoljno precizan. Najčešće dispečeri-donosioci odluke vrše subjektivnu procenu vrednosti vremena putovanja na osnovu svog iskustva i intuicije, pri čemu procenjeno vreme putovanja izražavaju kao “malo”, “dugo”, ”otprilike” itd.

Algoritam za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava, u kome su vremena putovanja i odgovarajući transportni troškovi između dva čvora u mreži tretirani kao *fuzzy* brojevi, pretpostavlja sledeća operativna ograničenja:

1. Zahtevi za opsluživanjem poznati su dispečeru unapred. Svaki zahtev je okarakterisan lokacijom i količinom koju je potrebno opslužiti.
2. Sva saobraćajna sredstva koja vrše opslugu imaju jednak kapacitet koji je dovoljan da se opsluži najmanje jedan zahtev.
3. Sva saobraćajna sredstva započinju svoje aktivnosti iz depoa u koji se i vraćaju po obavljenim aktivnostima. Saobraćajno sredstvo može više puta u toku dana da izlazi iz depoa.
4. Vremena putovanja između pojedinih parova čvorova u mreži poznata su samo aproksimativno.
5. Vozači moraju prilikom vršenja zadatka da slede rutu (redosled čvorova u koje treba doći) projektovanu od strane dispečera ili analitičara. Prilikom obilaženja sukcesivnih čvorova na ruti, vozači imaju slobodu da samostalno biraju pojedine ulice duž kojih će da voze.

Slovom *T* označen je *fuzzy* skup koji predstavlja subjektivno procenjeno vreme putovanja između neka dva čvora. Radi pojednostavljenja aritmetičkih operacija, pretpostavlja se da je vreme putovanja *T* trouglasti *fuzzy* broj (sl.4).



Slika 4. *Fuzzy* vreme i *fuzzy* troškovi putovanja

Trouglasti *fuzzy* broj *T* se najčešće izražava kao:

$$T = (t_1, t_2, t_3)$$

pri čemu su t_1, t_2 i t_3 donja granica, vrednost kojoj odgovara najveći stepen pripadnosti i gornja granica *fuzzy* broja *T*.

Pretpostavka je da su troškovi putovanja između bilo koja dva čvora u mreži linearna funkcija vremena, tj.:

$$\mathbf{C} = a*T$$

gde je: **C**– *fuzzy* broj koji predstavlja troškove putovanja između dva čvora, između kojih je vreme putovanja *fuzzy* broj *Ta*– parametar čija se vrednost utvrđuje statističkim putem.

Fuzzy troškovi putovanja **C** i odgovarajuće vreme putovanja **T** prikazani su na slikama 5 i 6. *Fuzzy* troškove putovanja **C** mogu, takođe, da se predstave kao trouglasti *fuzzy* broj, tj.:

$$\mathbf{C} = (a*t_1, a*t_2, a*t_3).$$

Uštede, koje se računaju u Clarke-Wrightovom algoritmu, definisane su relacijom:

$$\mathbf{S}(i, j) = \mathbf{C}(i, B) + \mathbf{C}(B, j) - \mathbf{C}(i, j).$$

S obzirom da su troškovi putovanja trouglasti *fuzzy* brojevi, to su odgovarajuće uštede, takođe, *fuzzy* brojevi.

Trouglasti *fuzzy* brojevi koji reprezentuju “uštede”, mogu da se izračunaju pomoću pravila *fuzzy* aritmetike. Kada su, npr. zadati trouglasti *fuzzy* brojevi, $\mathbf{A}=(a_1, a_2, a_3)$, $\mathbf{B}=(b_1, b_2, b_3)$, $\mathbf{E}=(e_1, e_2, e_3)$ i $\mathbf{F}=(f_1, f_2, f_3)$ *fuzzy* brojevi **A**(+) **B** i **E**(-)**F,** izračunavaju se na sledeći način:

$$\mathbf{A}(+)\mathbf{B} = (a_1+ b_1, a_2+ b_2, a_3+ b_3)$$

$$\mathbf{E}(-)\mathbf{F} = (e_1-f_3, e_2-f_2, e_3-f_1).$$

Posle izračunavanja “ušteda”, koje su predstavljene u obliku trouglastih *fuzzy* brojeva, neophodno je da se uštede rangiranja u opadajućem poretku. Problemu međusobnog poređenja *fuzzy* brojeva posvećen je u literaturi veći broj radova [1]. Između ostalih, ovim su se problemom bavili Yager (1981), Adamo (1981), Baas (1977) i Kwakernaak (1977), Dubois i Prade (1983) i Kaufmann i Gupta (1988). Posebno su značajni pregledni radovi Zimmermanna (1986) i Bortolana i Deganija (1985) posvećeni analizi različitih metoda za poređenje *fuzzy* brojeva. Teodorović i Kickuchi (1991) su izvršili poređenje izračunatih “ušteda” metodom koju su predložili Kaufmann i Gupta (1988).

Metod Kaufmanna i Guptae (1988) sastoji se iz sledećih koraka [1]:

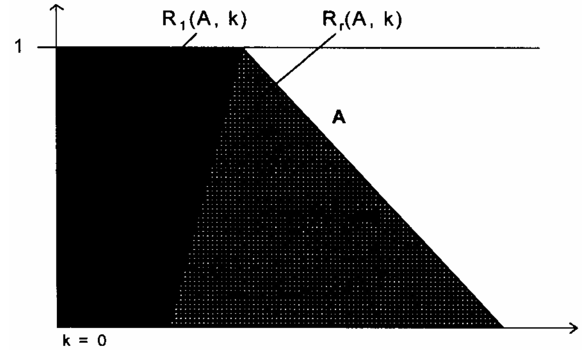
KORAK 1: Poređenje “pomerenosti” brojeva;
KORAK 2: Poređenje “srednjih vrednosti”;
KORAK 3: Poređenje “baza” *fuzzy* brojeva.

Pod “levom pomerenošću” $\mathbf{R}_l(\mathbf{A}, k)$ *fuzzy* broja **A** u odnosu na realan broj *k* podrazumeva se površina između realnog broja *k* i leve strane *fuzzy* broja **A**. “Desna pomerenost” *fuzzy* broja **A**, $\mathbf{R}_r(\mathbf{A}, k)$ definisana je površinom između realnog broja *k* i desne strane *fuzzy* broja **A**. “Pomerenost” *fuzzy* broja **A** u odnosu na realan broj *k* se definiše kao:

$$\mathbf{R}(\mathbf{A}, k) = \left[\frac{\mathbf{R_l}(\mathbf{A}, k) + \mathbf{R_k}(\mathbf{A}, k)}{2}\right].$$

Ako je *fuzzy* broj **A** trouglastog oblika i ako je *k=0*, “pomerenost” *fuzzy* broja **A** jednaka je (sl.5):

$$1.\ \mathbf{R}(\mathbf{A}, k) = \frac{a_1 + 2*a_2 + a_3}{4}$$



Slika 5. “Pomerenost” *fuzzy* broja A

Fuzzy broj **A** je manji od *fuzzy* broja **B** ako je **R**(**A**, *k*)< <**R**(**B**, *k*). Kada je **R**(**A**, *k*) = **R**(**B**, *k*), vrši se poređenje srednjih vrednosti *fuzzy* brojeva **A** i **B**. *Fuzzy* broj **A** je manji od *fuzzy* broja **B,** ako je srednja vrednost broja **A** manja od srednje vrednosti broja **B**. Kada su i srednje vrednosti međusobno jednake, vrši se poređenje "baza" trouglastih *fuzzy* brojava **A** i **B**. *Fuzzy* broj **A** je manji od *fuzzy* broja **B,** ako je "baza" broja **A** manja od "baze" broja **B**.

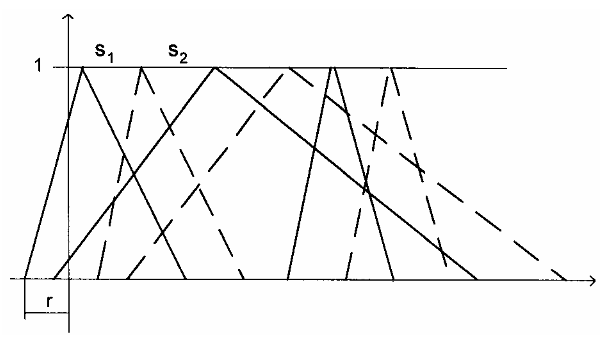
Pre rangiranja izračunatih ušteda (koje su takođe trouglasti *fuzzy* brojevi), izvršeno je pomeranje ušteda duž pozitivnog smera x-ose, tako da su sve izračunate uštede pozitivne**.** Sve izračunate uštede $\mathbf{S_1}$, $\mathbf{S_2}$, $\mathbf{S_3}$,..., pomerene su duž pozitivnog smera x-ose za vrednost *r*, tj. (sl.6).

$$\mathbf{S}_i\,(+)\ r\ =(a_{1i}+ r,\ a_{2i}+ r,\ a_{3i}+ r)$$

$$r = \left|\min_i (a_{1i})\right|$$

gde je a_{1i} – donja granica *i*-te uštede $\mathbf{S}_i$

$$\mathbf{S}_i = (a_{1i},\ a_{2i},\ a_{3i})$$



Slika 6. Pomeranje "ušteda"

Algoritam za projektovanje ruta saobraćajnih sredstava, u slučaju kada se vremena putovanja i transportni troškovi tretiraju kao *fuzzy* brojevi, sastoji se iz sledećih algoritamskih koraka:

KORAK 1: Proceniti vremena putovanja između svih parova u mreži i prikazati ih u obliku trouglastih *fuzzy* brojeva.

KORAK 2: Koristeći funkcionalnu zavisnost između vremena putovanja i transportnih troškova, izračunati transportne troškove između svih parova čvorova i prikazati ih u obliku *fuzzy* brojeva.

KORAK 3: Koristeći pravila *fuzzy* aritmetičkih operacija, izračunati *fuzzy* uštede.

KORAK 4: Pomeriti baze svih izračunatih *fuzzy* ušteda duž pozitivnog smera x-ose, tako da sve *fuzzy* uštede budu nenegativne.

KORAK 5: Izvršiti rangiranje *fuzzy* ušteda korišćenjem metoda Kaufmanna i Guptea.

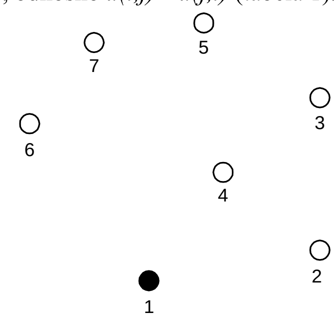
KORAK 6: Projektovati rute korišćenjem klasičanog Clarke-Wrightovog algoritma.

Primena Clarke-Wrightovog algoritma "ušteda" pri realizaciji zadataka za potrebe vojske

Primena izloženog algoritma prikazana je na primeru organizacije prevoženja putnika radi realizacije određenih zadataka u vojsci.

Baza saobraćajnih sredstava nalazi se u čvoru 1- Vojnotehničke akademije VJ, Žarkovo. Čvorovi koje treba opslužiti su mesta prikupljanja putnika i to: čvor 2- Tržni centar Banjica, čvor 3- Saobraćajni fakultet, čvor 4- Sektor ŠONID, čvor 5- Dvorište tehničkih fakulteta, čvor 6- Sava centar, i čvor 7- JU G. Banka, sl.7. Primenom Clarke-Wrightovog algoritma "ušteda", projektovane su rute saobraćajnih sredstava upotrebom simultanog pristupa.

Rastojanja između bilo koja dva čvora *i* i *j* su "simetrična", odnosno *d(i,j)= d(j,i)* (tabela 1).



Slika 7. Čvorovi koje treba opslužiti

Tabela 1. Rastojanja između čvorova, (km)

Čvor	1	2	3	4	5	6	7
1	-	8	10	9	12	11	10
2	8	-	2	2	6,5	6,5	5,5
3	10	2	-	3	5	6	5
4	9	2	3	-	4	5	4
5	12	6,5	5	4	-	4,5	2,5
6	11	6,5	6	5	4,5	-	2,5
7	10	5,5	5	4	2,5	2,5	-

Kapacitet saobraćajnog sredstva je *V*=8 (W- karavela). Broj putnika koje treba prevesti iz čvorova 2 - 7, dat je u tabeli 2.

Tabela 2. Potražnja u čvorovima

Čvor	2	3	4	5	6	7
Zahtevi	2	2	3	7	3	2

Korišćenjem (1) uštede, dobija se npr.:

$$s(3,4) = d(1,3) + d(1,4) - d(3,4)= 10+9-3=16$$

Za sve parove čvorova izračunate su odgovarajuće uštede. Ove uštede, poređene po veličini, prikazane su u tabeli 3. Najveću uštedu ima grana (5 i 7). Broj putnika koje treba prevesti je:

$$v_5+v_7=7+2>8=V$$

Zaključuje se da ne može da se spoji čvor 5 i čvor 7 zbog ograničenja kapaciteta saobraćajnog sredstva. Zbog toga se preskače ova ušteda i ispituje se sledeća ušteda po veličini.

Tabela 3. Vrednosti ušteda

Grana (*i,j*)	Ušteda s(*i,j*)	Grana (*i,j*)	Ušteda s(*i,j*)
(5,7)	19,5	(3,6)	15
(5,6)	18,5	(3,7)	15
(6,7)	18,5	(4,6)	15
(3,5)	17	(4,7)	15
(4,5)	17	(2,5)	13,5
(2,3)	16	(2,6)	12,5
(3,4)	16	(2,7)	12,5
(2,4)	15		

Drugu uštedu po veličini ima grana (5,6). Broj putnika koje treba prevesti je:

$$v_5+v_6=7+3>8=V$$

Kao što se vidi, ni ovi čvorovi ne smeju da se spoje, zbog ograničenja u pogledu kapaciteta saobraćajnog sredstva.

Sledeća po veličini ušteda je grana (6,7). Broj putnika koje treba prevesti je:

$$v_6+v_7=3+2<8=V$$

Sada sme da se spoji čvor 6 i čvor 7 jer se time ne prelazi ograničenje u pogledu kapaciteta saobraćajnog sredstva. Zbog toga prva ruta glasi: (1,6,7,1).

Sledeća grana na listi ušteda je grana (3,5). Broj putnika koji bi trebao da se nalazi u drugom saobraćajnom sredstvu je:

$$v_3+v_5=2+7>8=V$$

Ovi čvorovi ne mogu da se uključe u jednu rutu zbog prekoračenja kapaciteta saobraćajnog sredstva. Isti zaključak sledi i za granu (4,5) jer je:

$$v_4+v_5=3+7>8=V$$

Po vrednosti ušteda, sledeća je grana (2,3). Broj putnika koje treba prevesti je:

$$v_2+v_3=2+2<8=V$$

Pošto čvorovi 2 i 3 nisu ukuljučeni u postojeću rutu, otvara se nova ruta koja glasi: (1,2,3,1).

Sledeća grana po veličini uštede je grana (3,4). Čvor 4 bi mogao da se uključi u rutu, s obzirom da čvor 3 nije unutrašnji čvor (čvor 3 je susedni čvor početnom čvoru 1). Potrebno je da se proveri da li se uključivanjem čvora 4 u rutu ne ugrožava kapacitet saobraćajnog sredstva. Kako je:

$$v_2+v_3+v_4=2+2+3<8=V$$

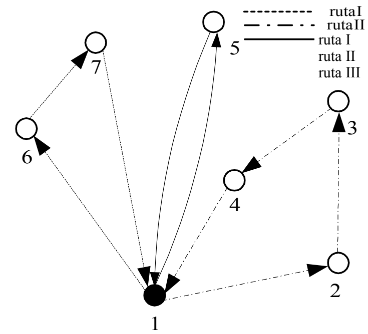
zaključak je, da čvor 4 sme da se uključi u rutu, tako da izmenjena ruta sada glasi: (1,2,3,4,1). Granu (2,4) se ne razmatra pošto su oba čvora uključena u rutu.

U slučaju grane (3,6) konstatuje se da ovi čvorovi pripadaju različitim rutama, koje ne mogu da se spoje, zato što je čvor 3 unutrašnji čvor. Isto važi i za granu (3,7). Sledeća grana je (4,6). U ovom slučaju su i čvor 4 i čvor 6 spoljašnji čvorovi, ali rute ne mogu da se spoje zbog prekoračenja ograničenja kapaciteta. Iz istog razloga rute ne mogu da se spoje ni pri razmatranju grane (4,7). Analizom grane (2,5) se vidi, da se ni čvor 5 ne može priključiti ruti (1,2,3,4,1) zbog ograničenja kapaciteta:

$$v_2+v_3+v_4+v_5=2+2+3+7>8=V$$

Razmatranjem grana (2,6) i (2,7), vidi se da su čvorovi 2,6 i 7 spoljašnji u dvema rutama, međutim ove rute ne mogu da se spoje zbog ograničenja kapaciteta. Kako je razmotrena kompletna lista ušteda, i formirane rute (1,6,7,1) i (1,2,3,4,1), a svi čvorovi nisu pridruženi rutama (čvor 5), onda se formira još jedna ruta (1,5,1). S obzirom da su svi čvorovi pridruženi rutama, konačne rute glase:

Ruta I: (1,6,7,1)
Ruta II: (1,2,3,4,1)
Ruta III: (1,5,1)
Rute su prikazane na sl.8.



Slika 8. Rute dobijene primenom Clarke-Wrightovog algoritma "ušteda"

Lokacijski problemi

Od položaja određenih objekata na transportnoj mreži bitno zavise kavlitet saobraćajnih usluga i ukupni troškovi transportnog sistema. Polazeći od karakteristika pojedinih lokacijskih problema, kao i od do sada razvijenih lokacijskih modela, moguće je izvršiti više klasifikacija lokacijskih problema. Jedna od bitnijih klasifikacija je prema vrsti objekta na mreži. Prema toj klasifikaciji, lokacijski problemi se dele na: medijane, centre i objekte sa prethodno definisanim perfomansama sistema. U slučaju problema medijane, potrebno je locirati jedan ili više objekata na mreži tako, da se minimizira prosečno rastojanje (prosečno vreme putovanja, prosečni transportni troškovi) od korisnika do objekta. Kod centara potrebno je locirati jedan ili više objekata na mreži tako, da se minimizira rastojanje do najudaljenijeg korisnika. Za objekte sa prethodno definisanim perfomansama sistema potrebno je locirati jedan ili više objekata na mreži tako, da se zadovolje unapred definisani standardi u pogledu pređenih rastojanja, vremena putovanja, vremena čekanja na opslugu ili nekog drugog atributa. Ovaj tip problema se naziva problemima zahtevanja. U nastavku rada će biti prikazana primena modela za određivanje medijane, i to primena za određivanje lokacije jednog ili više poljskih skladišta (PSk).

Lokacijski problemi medijane

Problem medijane prvi je formulisao Hakimi (1964) [2].

Posmatra se neorijentisana mreža **G=(N,A)** koja ima $\boldsymbol{n}$ čvorova. Sa $\boldsymbol{a_i}$ je označen broj zahteva za opslugu iz čvora $\boldsymbol{i}$ i čvora $\boldsymbol{j}$, a sa $\boldsymbol{p}$ broj objekata koje treba locirati na mreži. Objekte je moguće locirati u bilo kom od $\boldsymbol{n}$ čvorova. U razmatranje se uključuju i binarne promenljive X_{ij} koje se definišu na sledeći način:

$$X_{ij}=\begin{cases}1, & \text{ukoliko } i \text{ dobije opslugu u objektu lociranom u čvoru } j\\ 0, & \text{u ostalim slučajevima}\end{cases}$$

Prilikom lociranja $\boldsymbol{p}$ objekta teži se minimiziranju ukupnog pređenog rastojanja između objekta i korisnika, pa je problem $\boldsymbol{p}$ medijana moguće da se formuliše na sledeći način:

$$\text{minimiziranjem } \mathbf{F}=\sum_{i=1}^{n}\sum_{j=1}^{n} a_i d_{ij} x_{ij} \qquad (2)$$

uz ograničenja:

$$\sum_{j=1}^{n} x_{ij} = 1, i = 1,2,...,n \qquad (3)$$

$$\sum_{j=1}^{n} x_{jj} = p \tag{4}$$

$$x_{ij} \geq x_{ij}, i, j, = 1, 2, ..., n; i \neq j \tag{5}$$

$$x_{ij} \in \{0,1\} i, j = 1, 2, ..., n \tag{6}$$

Definisana kriterijumska funkcija (2) minimizira ukupno pređeno rastojanje između objekata i korisnika. Prvo ograničenje (3) je da svaka jedinica bude snabdevana iz samo jednog objekta. Drugim ograničenjem (4) se ukazuje, da treba da postoji ukupno ***p*** objekata. Svaki klijent lociran na lokaciji gde se nalazi objekat, opslužuje se iz tog objekta (5) i (6), što je iskazano kroz treće ograničenje.

Hakim je dokazao da postoji najmanje jedan skup ***p*-medijana** u čvorovima mreže **G**, što znači da ***p*** optimalnih lokacija objekata na mreži, mora da se nalazi isključivo u čvorovima. Na osnovu ove činjenice, potrebno je da se ispitaju samo lokacije u čvorovima.

Za rešavanje ovog problema u poslednjih četvrt veka razvijen je veliki broj algoritama.

Algoritam za generisanje skupa dopustivih rešenja podrazumeva ispitivanje svih mogućih rešenja ***p*-medijana**, izračunavanje odgovarajućih vrednosti definisane kriterijumske funkcije i određivanje optimalnog rešenja.

Ovakav je pristup moguće primeniti jedino u slučaju mreža sa manjim brojem čvorova, na koje treba da se locira manji broj objekata.

Broj mogućih različitih rasporeda ***p*** objekata, na mreži u kojoj postoji ***n*** čvorova, jednak je broju kombinacija bez ponavljanja od ***n*** elemenata ***p***-te klase, tj. jednak je $\binom{n}{p}$.

Algoritam za određivanje lokacije poljskog skladišta

Jednostavan algoritam, kojim se generiše skup dopustivih rešenja i određuje lokacija jednog **PSk**, sastoji se od sledećih algoritamskih koraka:

KORAK 1: Izračunati dužine najkraćih puteva d_{ij} između svih parova čvorova (*i,j*) mreže **G** i prikazati ih u matrici najkraćih puteva **D** (čvorovi ***i*** predstavljaju moguće lokacije za **PSk**, a čvorovi ***j*** predstavljaju lokacije jedinica kojima je snabdevanje neophodno).

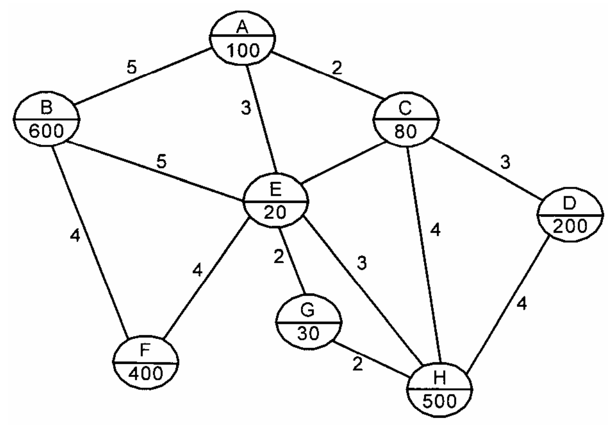
KORAK 2: Pomnožiti ***j***– tu kolonu matrice najkraćih puteva sa količinama tereta a_j iz čvora ***j***. Elementi $a_j \cdot d_{ij}$ matrice $\left[a_i \cdot d_{ij}\right]$ predstavljaju transportni rad koji ostvare prevozna sredstva iz čvora ***j*** kada se opslužuju iz čvora ***i***. Matricu $a_j \cdot d_{ij}$ označiti sa **D'**.

KORAK 3: Izvršiti sumiranje duž svake vrste ***i*** matrice **D'**. Izraz $\sum_{j=1}^{n} a_j \cdot d_{ij}$ predstavlja ukupni transportni rad u slučaju da je **PSk** locirano u čvoru ***i***.

KORAK 4: Čvor čijoj vrsti odgovara najmanji ukupni transportni rad, predstavlja lokaciju poljskog skladišta.

Problem koji treba da se reši sastoji se u sledećem: *Gde locirati **PSk** tako, da ukupni transportni rad ostvaren prilikom snabdevanja jedinica iz tog skladišta **PSk** bude minimalan?*

Potrebe jedinica date su (sl.9) u tonama a rastojanja između jedinica u kilometrima.



Slika 9. Rastojanje i potrebe jedinica za lokaciju jedne medijane

Dužine najkraćih puteva između svih parova čvorova mreže date su u matrici:

$$[d_{ij}] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 5 & 2 & 5 & 3 & 7 & 5 & 6 \\ 5 & 0 & 7 & 10 & 5 & 4 & 7 & 8 \\ 2 & 7 & 0 & 3 & 2 & 6 & 4 & 4 \\ 5 & 10 & 3 & 0 & 5 & 9 & 6 & 4 \\ 3 & 5 & 2 & 5 & 0 & 4 & 2 & 3 \\ 7 & 4 & 6 & 9 & 4 & 0 & 6 & 7 \\ 5 & 7 & 4 & 6 & 2 & 6 & 0 & 2 \\ 6 & 8 & 4 & 4 & 3 & 7 & 2 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

Matrica $\left[a_i \cdot d_{ij}\right]$ ima vrednosti:

$$\left[a_i \cdot d_{ij}\right] = \begin{array}{c c} & \begin{array}{cccccccc} A & B & C & D & E & F & G & H \end{array} \\ \begin{array}{c} A \\ B \\ C \\ D \\ E \\ F \\ G \\ H \end{array} & \begin{bmatrix} 0 & 3000 & 160 & 1000 & 60 & 2800 & 150 & 3000 \\ 500 & 0 & 560 & 2000 & 100 & 1600 & 210 & 4000 \\ 200 & 4200 & 0 & 600 & 40 & 2400 & 120 & 2000 \\ 500 & 6000 & 240 & 0 & 100 & 3600 & 180 & 2000 \\ 300 & 3000 & 160 & 1000 & 0 & 1600 & 60 & 1500 \\ 700 & 2400 & 480 & 1800 & 80 & 0 & 180 & 3500 \\ 500 & 4200 & 320 & 1200 & 40 & 2400 & 0 & 1000 \\ 600 & 4800 & 320 & 800 & 60 & 2800 & 60 & 0 \end{bmatrix} \end{array}$$

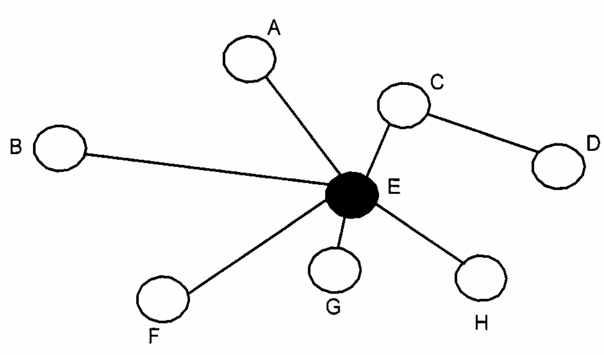
Sumiranje po vrstama matrice $\left[a_i \cdot d_{ij}\right]$ dobijaju se vrednosti ukupnog transportnog rada (tabela 1), ako bi **PSk** bilo locirano na lokacijama, duž čijih vrsta se vrši sumiranje.

Poljsko skladište treba da se locira na lokaciju označenu kao **E** (tabela 4) jer je ukupni transportni rad najmanje 7620 (tkm). U slučaju da su planeri ili donosioci odluka spremni da prihvate i rešenje, koje nije optimalno, iz drugih razloga koji mogu da budu dominantni, u datom primeru **PSk** može da se locira i na lokaciju označenu kao **B**, jer vrednost kriterijumske funkcije ne odstupa bitno od optimalnog rešenja (lokacije **E**).

Tabela 4: Ostvareni broj putničkih kilometara zavisno od lokacije objekta

Lokacija objekta je u čvoru	Broj ostvarenih putničkih kilometara	Lokacija objekta je u čvoru	Broj ostvarenih putničkih kilometara
A	10170	E	7620
B	8970	F	9140
C	9760	G	9660
D	12620	H	9440

Na sl.10 prikazana je medijana locirana u čvoru **E,** kao i ostali čvorovi.



Slika 10. Lokacija medijane

Algoritam za određivanje lokacije više poljskih skladišta primenom algoritama za generisanje skupa dopustivih rešenja

Algoritam za generisanje skupa dopustivih rešenja podrazumeva ispitivanje svih mogućih rešenja ***p*-PSk**, izračunavanje odgovarajućih vrednosti, definisane kriterijumske funkcije i određivanje optimalnog rešenja.

Broj mogućih rasporeda ***p*-PSk** na mreži, gde je razmešteno ***n*** jedinica, jednak je broju kombinacija (7) bez ponavljanja od ***n*** elemenata ***p*-**te klase.

$$\binom{n}{p} = \frac{n \cdot (n-1) \cdot (n-2) \cdot ... \cdot [n-(p-1)]}{1 \cdot 2 \cdot ... \cdot (p-1) \cdot p} = \frac{n!}{p! \cdot (n-p)!} \quad (7)$$

za $p=1,2,\ldots,n$

Jasno je, da je za veći broj jedinica i veći broj mogućih lokacija **PSk** potrebno izračunati enormno veliki broj vrednosti. Tako npr., za jedinice locirane na 20 lokacija, ako se želi da odabere 5 lokacija za **PSk**, potrebno je da se izračuna 15 504 vrednosti, a za isti broj lokacija skladišta, za jedinice locirane na 40 lokacija potrebno je da se izračuna 658 008 vrednosti, što je u realnom vremenu nemoguće bez korišćenja računara.

Algoritam za generisanje skupa dopustivih rešenja sastoji se u sledećem:

***n*-**ukupan broj čvorova u mreži (ukupan broj kandidata za lokaciju ***p*-PSk**)

d_{ij} -dužina najkraćeg puta od čvora ***i*** do čvora ***j***

$d'_{ij} = a_j x d_{ij}$ - transportni rad koji ostvare prevozna sredstva locirana u čvoru ***j***, a koja se snabdevaju iz **PSk** lociranog u čvoru ***i***

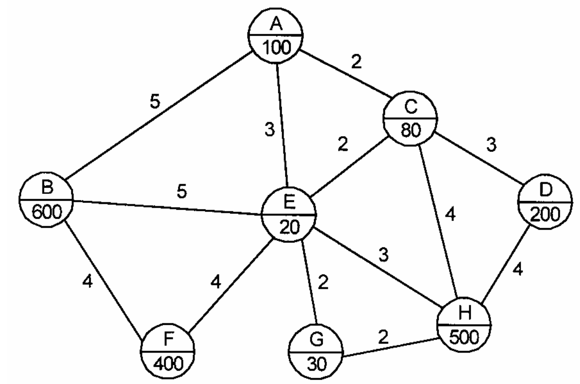
D'- matrica čiji su elementi d'_{ij}

$x_p = \{v_{j1,}v_{j2,...,}v_{jp}\}$ **-** jedan od mogućih podskupova od ***p*** – lokacija

Za svaki od $\binom{n}{p}$ podskupova ***p*** – lokacija potrebno je izračunati sumu:

$$\sum_{j=1}^{n} \min\{d'_{j1j}, d'_{j2j,...,}d'_{jpj}\} \quad (8)$$

Podskup ***p*** – lokacija kome odgovara najmanja vrednost sume (8), predstavlja skup lokacija na kojima treba locirati ***p*-PSk**. Za dati primer (sl.11), ako je potrebno locirati dva **PSk** po istoj kriterijumskoj funkciji, ukupni broj kombinacija jednak je $\binom{n}{p} = \binom{8}{2} = 28$.



Slika 11. Rastojanje i potrebe jedinica za dve medijane

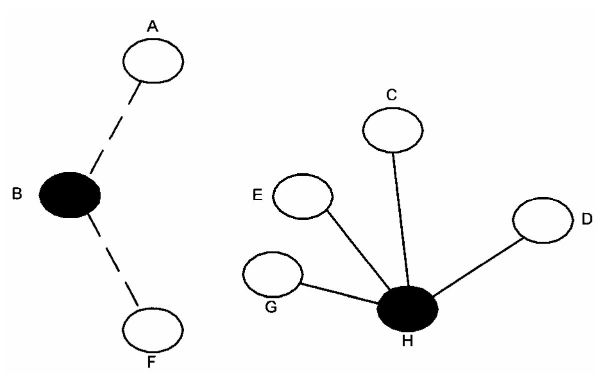
Vrednosti ukupnog transportnog rada za svih 28 mogućih slučajeva lociranja medijane date su u tabeli 5.

Tabela 5. Ukupni transportni rad zavisno od lokacije medijana

Redni broj	Par časova u kojima su medijane	Ukupno pređeno rastojanje	Redni broj	Par časova u kojima su medijane	Ukupno pređeno rastojanje
1.	(A,B)	5970	15.	(C,E)	6960
2.	(A,C)	8160	16.	(C,F)	5560
3.	(A,D)	8170	17.	(C,G)	8640
4.	(A,E)	7380	18.	(C,H)	7500
5.	(A,F)	6770	19.	(D,E)	6620
6.	(A,G)	7600	20.	(D,F)	5400
7.	(A,H)	6880	21.	(D,G)	8380
8.	(B,C)	4560	22.	(D,H)	8460
9.	(B,D)	4620	23.	(E,F)	5420
10.	(B,E)	4620	24.	(E,G)	7100
11.	(B,F)	6530	25.	(E,H)	5920
12.	(B,G)	4660	26.	(F,G)	5460
13.	(B,H)	3340	27.	(F,H)	4240
14.	(C,D)	8960	28.	(G,H)	8260

Najmanji ukupni transportni rad, ako se **PSk** locira na lokacije **B** i **G,** je 3340 (tkm).

Iz **PSk** lociranog na lokaciju označenu kao **B** snabdevale bi se jedinice razmeštene na lokaciju koja je označena kao **A**,**F**, a iz **PSk** lociranog na lokaciju koja je označena kao **H** snabdevale bi se jedinice razmeštene na lokacije označene kao **C**,**D**,**E**,**G** (sl.12).



Slika 12. Lokacija dve medijane

Sledeće rešenje koje najmanje odstupa od zadate kriterijumske funkcije dobilo bi se, ako bi se za dati primer **PSk** locirale na lokacije označene kao **F** i **H.**

Zaključak

Primenom metoda transportnih mreža eliminišu se empirijska rešenja u organizaciji prevoženja, a time se postiže veća efikasnost u radu saobraćajnog organa. Pored toga, primenom ovih naučnih metoda postiže se: smanjenje broja ruta, manji broj angažovanih sredstava, smanjenje dužina ruta, smanjenje koeficijenta nultih vožnji, smanjenje potrošnje goriva, povećanje koeficijenta iskorišćenja puta, povećanje koeficijenta iskorišćenja rada. Algoritam omogućava izradu odgovarajućih aplikacija, čime se proces projektovanja ruta saobraćajnih sredstava ubrzava.

Primenom algoritma za generisanje skupa dopustivih rešenja i matematičkog modela lokacijskog problema medijane, eliminiše se planiranje zasnovano na iskustvu, a povećeva se efikasnost prilikom snabdevanja, smanjuju se naprezanja, bolje se koriste resursi, povećava se pouzdanost, skraćuju se putevi transporta i smanjuje se verovatnoća uništavanja prevoznih sredstava. Planerima i donosiocima odluka, ovaj algoritam i izrada softverske aplikacije može pružiti veliku pomoć u rešavanju problema manevra rezervama.

Literatura

[1] TEODOROVIĆ,D. *Transportne mreže, algoritamski pristup.* Univerzitet u Beogradu, Beograd, 1996.

[2] TEODOROVIĆ,D. *Transportne mreže.* Savez inženjera i tehničara saobraćaja i veza Jugoslavije, Beograd, 1984.

[3] TEODOROVIĆ,D., KIKUCHI,S. *Fuzzy skupovi i primene u saobraćaju.* Saobraćajni fakultet, Beograd, 1994.

Rad primljen: 5.3.2001.god.