UDK: 681.511.2(047)=861
COSATI: 14-02, 14-07

Optimalno upravljanje linearnim singularnim sistemima s kašnjenjem

Dr Mihajlo P. Lazarević, dipl.inž.[1)]
Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]
Mr Milorad V. Rančić, dipl.inž.[3)]
Veselin S. Mulić, dipl.inž.[3)]

Pokazano je kako se linearni singularni sistem s kašnjenjem može da prevede u svoj odgovarajući oblik bez kašnjenja. Ovo uprošćenje omogućava efikasnu primenu postojećih optimizacionih postupaka razvijenih za singularne sisteme.

Ključne reči: **Teorija singularnih sistema, optimizacija sistema, sistem s kašnjenjem.**

Uvod

SINGULARNI sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom algebarskih i diferencijalnih jednačina, što ne dozvoljava njihovo predstavljanje u klasičnom obliku vektorske diferencijalne jednačine stanja, a samim tim i onemogućava njihovo rešavanje uobičajenim metodama koje se koriste za rešavanje "*normalnih*" sistema.

U tom smislu, algebarske jednačine predstavljaju ograničenje nametnuto rešenju, odnosno, rešavanju dela sistema koji sadrži diferencijalne jednačine.

Matematički opis ovih sistema u prostoru stanja izgleda ovako:

$$\begin{aligned} E\dot{\underline{x}}(t) &= A\underline{x}(t) + B\underline{u}(t), \quad \underline{x}(t_o) = \underline{x}_0 \\ \underline{x}_i(t) &= C\underline{x}(t), \end{aligned} \tag{1}$$

gde je matrica E u nekom smislu obavezno *singularna*, $\underline{x}(t) \in R^n$ vektor stanja, $\underline{u}(t) \in R^m$ vektor upravljanja. Konstantne matrice A,B,C su odgovarajućih dimenzija.

U odnosu na tzv. "normalne" sisteme $(\det E \neq 0)$ koji po broju daleko prevazilaze ovde razmatranu klasu sistema, brojni radovi su pokazali da ovako formirani modeli imaju izvesne prednosti, kao što su:

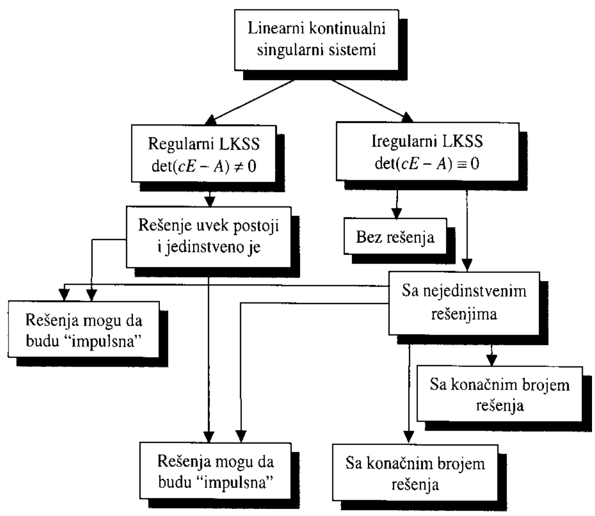
- zadržavanje bitnih fizičkih svojstava u samom modelu;
- blisku povezanost sa stvarnim fizičkim promenljivima stanja sistema i, u izvesnom smislu, bolje pokazuju strukturu razmatranog sistema ili procesa;
- ne zahtevaju eliminaciju spregnuto promenljivih veličina, što je i praktično nemoguće u nelinearnim slučajevima;
- ispisivanje bilansnih i drugih jednačina daleko je neposrednije s posebnom pogodnošću da su iste iskazane kroz stvarne fizičke veličine;

Sama činjenica da su singularni sistemi iskazani kombinacijom algebro-diferencijalnih jednačina, povlači za sobom niz specifičnosti i osobenosti koje ih jasno izdvajaju i razlikuju u odnosu na tzv. "normalne" sisteme.

U tom smislu, razmatranje egzistencije, jedinstvenosti i struktura tih rešenja predstavlja fundamentalno pitanje. Mimo toga, postojanje impulsnih članova i vremenskih izvoda ulaznih veličina u kretanju singularnih sistema čini ih još više specifičnim, a samim tim i privlačnijim s naučnog stanovišta.

Za kvalitetnu analizu dinamičkog ponašanja singularnih sistema neophodno je, pri zadatim početnim uslovima, rešiti sistem jed. (1).

S obzirom na postojeće mogućnosti njenog rešavanja, kao i dobijanja krajnjeg rezultata, singularni sistemi mogu da se klasifikuju kao što je to prikazano na sledećoj sl.1.



Slika 1.

[1)] Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
[2)] Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4
[3)] Viša tehnička škola, 23000 Zrenjanin, Đorđa Stratimirovića 23

Preliminarna razmatranja

Posebnu klasu singularnih sistema čine ***linearni singularni sistemi s kašnjenjem.*** Singularni sistemi su do sada veoma mnogo proučavani u literaturi, Campbell (1980).

U posebnom slučaju, njihov se opis može dati u sledećem obliku:

$$E\dot{\underline{x}}(t) = M_o\underline{x}(t) + M_1\underline{x}(t-\tau_x) + N_o\underline{u}(t) + N_1\underline{u}(t-\tau_u) \qquad (2)$$

gde su:

$M_o, M_1 \in R^{nxn}$, $N_o, N_1 \in R^{nxm}$, $\underline{x}(t) \in R^n$ vektor stanja, $\underline{u}(t) \in R^m$ vektor upravljanja, a τ_x i τ_u čista vremenska konstantna kašnjenja prisutna u stanju, odnosno u upravljanju.

Prvi radovi klasičnog optimalnog upravljanja potiču od Bendera i Lauba, (1985,1987,a,b), gde je ovaj problem rešen prvo za kontinualne, a zatim za diskretne singularne sisteme.

Identičan problem su rešavali Ibrahim et. al (1990) za sisteme sa čistim vremenskim kašnjenjem, a sa pozicije teorije singularnih sistema.

Ostali radovi: Cobb (1983), Kučera (1986), Lorass-Nagy et.al (1986) bave se sličnom problematikom i imaju manji značaj.

U ***Dodacima A - E*** dati su kratki izvodi iz teorije linearnih singularnih sistema neophodni za razumevanje materije koja se izlaže u nastavku.

Postavka problema

Neka je dat *linearni singularni sistem s kašnjenjem* opisan jed. (2).

Formulacija problema je sledeća:

Naći vektor upravljanja $\underline{u}(t)$ takav, da vektor stanja $\underline{x}(t)$ zadovoljava početne uslove, pri čemu upravljanje $\underline{u}(t)$ i njime određeno stanje $\underline{x}(t)$ minimiziraju kriterijum performanse u formi:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\underline{x}^T(t)Q\underline{x}(t) + \underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)\right]dt \qquad (3)$$

pri čemu su: Q i R realne simetrične matrice; Q je pozitivno određena, a R je pozitivno poluodređena matrica.

Problem je veoma složen, pa se za njegovo rešavanje predlaže sledeći postupak:

Moguće je pokazati da se sistem dat jed.(2) može da aproksimira linearnim singularnim sistemom bez kašnjenja. Posle toga treba primeniti postojeće postupke i sprovesti optimizaciju kao npr. u Bender, Laub (1987.a)

Rešenje problema: glavni rezultati

Ako članove jed. (3) koji sadrže čisto vremensko kašnjenje razvijemo u Tejlorov red, dobija se:

$$\underline{x}(t-\tau_x) = \sum_{k=0}^{\infty}\underline{x}^{(k)}(t)(-1)^k\tau_x^k/k! \qquad (4)$$

$$\underline{u}(t-\tau_u) = \sum_{k=0}^{\infty}\underline{u}^{(k)}(t)(-1)^k\tau_u^k/k! \qquad (5)$$

Uzimajući prvih r članova jed. (3) postaje:

$$\begin{aligned} E\frac{d\underline{x}(t)}{dt} &= M_o\underline{x}(t) + M_1\underline{x}(t) + \sum_{k=0}^{r}(-1)^k M_1\tau_x^k\underline{x}^{(k)}/k! \\ &+ N_o\underline{u}(t) + N_1\underline{u}(t) + \sum_{k=1}^{r}(-1)^k N_1\tau_u^k\underline{u}^{(k)}/k! \end{aligned} \qquad (6)$$

Uvode se sledeće oznake:

$$A_0 = M_0 + M_1 \qquad (7)$$

$$A_k = (-1)^k M_1\tau_x^k/k! \qquad 1 \le k \le r \qquad (8)$$

kao i:

$$w = \begin{bmatrix} \underline{x} \\ \underline{x}^{(1)} \\ \vdots \\ \underline{x}^{(r-2)} \\ \underline{x}^{(r-1)} \end{bmatrix} \quad A = \begin{bmatrix} 0 & I_n & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & I_n & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & I_n \\ A_0^* & A_1^* & A_2 & \dots & A_{r-1} \end{bmatrix}$$
$$B_0 = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ N_0 + N_1 \end{bmatrix} \quad B_k = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \\ (-1)^k N_1\tau_u^k/k! \end{bmatrix} \qquad (9)$$

pri čemu su:

$$A_o^* = A_0 + A_1 \quad i \quad A_1^* = A_1 - E \qquad (10)$$

Jed. (6) može da se napiše u obliku:

$$C\frac{d\underline{w}}{dt} = A\underline{w} + \sum_{k=0}^{r}B_k\underline{u}^{(k)} \qquad (11)$$

gde je:

$$C = diag\{I_n, I_n, ..., I_n, -A_r\} \qquad (12)$$

Ovde se može dati napomena. Naime, ukoliko je matrica M_1 u jed.(2) nesingularna, i matrica A_r u jed. (12) je takođe nesingularna. Tada se bez gubitka u opštosti može da uzme da je i $A_r = I_n$. Indeks performanse preinačuje se tada u:

$$J = \frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\underline{w}^T(t)\tilde{Q}\underline{w}(t) + \underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)\right]dt \qquad (13)$$

gde je:

$$\tilde{Q} = \begin{bmatrix} Q & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \\ \vdots & \vdots & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad (14)$$

S ciljem da se eliminišu izvodi vektora upravljanja u jed. (11), uvode se sledeće smene:

$$\underline{\tilde{x}}(t)=\begin{bmatrix} \underline{w}-B_r\underline{u}^{(r-1)} \\ \underline{u}^{(1)} \\ \underline{u}^{(2)} \\ \vdots \\ \underline{u}^{(r-1)} \\ \underline{u}^{(r)} \end{bmatrix} \tag{15}$$

$$\tilde{A}=\begin{bmatrix} A & B_1 & B_2 & B_3 & \dots & [L] & 0 \\ 0 & 0 & I_m & 0 & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_m & \dots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & I_m \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{16}$$

$$\tilde{B}=\begin{bmatrix} B_0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} \qquad L=(AB_r+B_{r-1}) \tag{17}$$

$$\tilde{E}=diag\{I_n, I_m, I_m, ..., I_m, 0\} \tag{18}$$

Sada se polazni sistem transformiše u :

$$\tilde{E}\dot{\underline{\tilde{x}}}(t)=\tilde{A}\underline{\tilde{x}}(t)+\tilde{B}\underline{u}(t) \tag{19}$$

Jed. (19) je poznata singularna diferencijalna jednačina, zbog činjenice da je i ovde $\det\tilde{E}=0$. Sada se indeks performanse koristi u svojoj uobičajenoj formi:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\underline{\tilde{x}}^T\tilde{Q}^*\underline{\tilde{x}}(t)+\underline{u}^T(t)R\underline{u}(t)\right]dt \tag{20}$$

gde je:

$$\tilde{Q}^*=\begin{bmatrix} \tilde{Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & \tilde{Q}B_r & 0 \\ 0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & 0 & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ 0 & \vdots & \dots & \dots & \dots & \vdots & \vdots \\ B_r^T\tilde{Q} & 0 & \dots & \dots & \dots & B_r^T\tilde{Q}B_r & \vdots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & 0 \end{bmatrix} \tag{21}$$

Dalje sledi optimizacija ***singularnog sistema bez kašnjenja***.

Još jedan mogući pristup istom problemu jeste da se indeks performanse uvede na sledeći način:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left\{\sum_{k=0}^{q}\left(\underline{x}^{(k)}\right)^T Q_k\underline{x}^{(k)}+\sum_{k=0}^{q}\left(\underline{u}^{(k)}\right)^T R_k\underline{u}^{(k)}\right\}dt \tag{22}$$

Sistem dat jed. (2) se na potpuno isti način svodi na oblik dat jed. (11), pri čemu se uvodi i:

$$E=diag\{I_{rn}, I_{rm}, 0\} \tag{23}$$

$$F=\begin{bmatrix} A & B_1 & B_0 & & L & 0 \\ 0 & 0 & 0 & F_0 & 0 & 0 \\ 0 & I_m & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & I_{m(r-3)} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & & I_m & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & I_m \\ 0 & 0 & -I_m & & 0 & 0 \end{bmatrix} \tag{24}$$

$$F_0=\begin{bmatrix} B_2 & B_3 & \dots & B_{r-2} \\ I_m & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 \end{bmatrix} \qquad D=\begin{bmatrix} 0 \\ I_m \end{bmatrix} \tag{25}$$

Matrica L i transformisani vektor stanja $\tilde{x}$ definisani su ranije i zadržavaju svoja prethodna značenja.

Koristeći prethodno označavanje dobija se konačno:

$$E\dot{\underline{\tilde{x}}}(t)=F\underline{\tilde{x}}(t)+D\underline{u}(t) \tag{26}$$

a uz indeks performanse dat sa:

$$J=\frac{1}{2}\int_0^{t_f}\left[\underline{x}^T(t)G\underline{x}(t)\right]dt \tag{27}$$

gde su:

$$G=\begin{bmatrix} G_1 & G_2 \\ G_2^T & G_3 \end{bmatrix} \tag{28}$$

$$Q=diag\{Q_o, Q_1, ..., Q_r\} \tag{29}$$

$$G_1=diag\{Q, R_1, R_o, R_2, ..., R_{r-2}\} \tag{30}$$

$$G_2=\left.\begin{bmatrix} QB_r & 0 \\ 0 & 0 \\ \vdots & \vdots \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\right\} \; r \quad \text{vrsta} \tag{31}$$

$$G_3=diag\left\{B_{r-1}^TQB_{r-1}+R_{r-1}, R_r\right\} \tag{32}$$

Ovako transformisani sistem može da se podvrgne svim poznatim postupcima i metodama razvijenim za optimizaciju singularnih sistema bez kašnjenja, što je bio, i jeste osnovni doprinos ovoga rada.

Zaključak

U ovom radu je pokazano kako je moguće ***linearni singularni sistem s kašnjenjem*** prevesti *u svoj odgovarajući (aproksimativni) oblik bez kašnjenja*. Ovo uprošćenje omogućava efikasnu primenu postojećih optimizacionih postupaka razvijenih za singularne sisteme.

Literatura

[1] BENDER,D.J. *Descriptor Systems and Geometric Control Theory*, Ph.D.Thesis, University California at Santa Barbara, USA, 1985.a.

[2] BENDER,D.J. Singular Riccati Equations for Singular Systems, *Proc. MTNS*, Stockholm, Sweden, 10-14 June (1985.b), p.10–14.

[3] BENDER,D.J. Lyapunov-Like Equations and Reachability/Observability Gramians for Descriptor Systems, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, 1987, *AC-32,* no.4, p.343-348.

[4] BENDER,D.J., LAUB,J.A. The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, Fl, (1985), p.957–962.

[5] BENDER,D.J., LAUB,J.A. The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems: Discrete-Time Case. *Automatica*, 1987.a, vol.23, no.1, p.71–85.

[6] BENDER,D.J., LAUB,J.A. The Linear Quadratic Optimal Regulator for Descriptor Systems, *IEEE Trans. Atomat. Cont*., 1987.b, *AC-32,* no.8, p.672–688.

[7] CAMPBELL,S.L. Optimal Control of Autonomous Linear Processes with Singular Matrices in the Quadratic Cost Functionals, *SIAM J. Control and Optimization*, 1976, vol.14, no.6, p.1092–1106.

[8] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations*, Pitman, Marshfield, Mass., 1980.

[9] CAMPBELL,S.L. *Singular Systems of Differential Equations II*, Pitman, Marshfield, Mass., 1982.

[10] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue on Semistate Systems, vol.5, no.1, 1986.

[11] *Circuits, Systems and Signal Processing*, Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, vol.8, no.3, 1989.

[12] COBB,D. Descriptor Variable Systems and Optimal State Regulation, *IEEE Trans. Automat. Cont*., 1983, *AC-28*, no.5, p.601–611.

[13] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,A.S., JOVANOVIĆ,B.M. *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja,* GIP Kultura, Beograd, 1996.

[14] DEBELJKOVIĆ,LJ.D., MILINKOVIĆ,A.S., JOVANOVIĆ,B.M., JACIĆ,A.LJ. *Diskretni singularni sistemi automatskog upravljanja,* GIP Kultura, Beograd, 1998.

[15] IBRAHIM,E.Y., LOVASS-NAGY,V., MUKUNDAN,R., SCHILLING,J.R. Free Final-Time Optimal Control of Descriptor Systems, *Int. J. Control*, 1988, vol.48, no.1, p.407–416.

[16] IBRAHIM,E.Y., LOVASS-NAGY,V., MUKUNDAN,R., POWERS,L.D., SCHILLING,J.R. A Note on Optimal Control of Linear Time-Delay Systems Using Descriptor-Variable Theory, *J. Franklin Inst*., 1990, vol.327, no.6, p.893–901.

[17] KUCERA,V. Stationary LQG Control of Singular Systems, *IEEE Trans. Automat. Cont.*, 1986, vol.AC-31, no.1, p.31–39.

[18] LAZAREVIĆ,M.P., DEBELJKOVIĆ,LJ.D., JOVANOVIĆ,B.M., RANČIĆ,M., MULIĆ,S.V. *Optimalno upravljanje linearnih singularnih sistema sa kašnjenjem.* Zbornik radova HIPNEF 2000, Beograd, oktobar 2000, p.138-143.

[19] LEWIS,F.L. Preliminary Notes on Optimal Control for Singular Systems, *IEEE Proc. on CDC*, Ft. Lauderdale, FL (1985), p.266–272.

[20] LEWIS,F.L. A Survey of Linear Singular Systems, *Circ. Syst. Sig. Proc.*, 1986.a, vol.5, no.1, p.3–36.

[21] LEWIS,F.L. *Recent Work in Singular Systems.* Proc. Int. Symp. on Sing. Syst., Atlanta, GA (1987.a), p.20–24.

[22] LIU,X., ZHANG,S. Optimal Control Problem for Linear Time-Varying Descriptor Systems. *Int. J. Control*, 1989, vol.49, no.5, p.1441-1452.

[23] NIKOUKHAH,R., WILLSKY,S.A. Generalized Riccati Equations for Two-Point Boundary-Value Descriptor Systems. *IEEE Proc. on CDC*, Los Angeles, CA (1987), p.1140–1141.

[24] OWENS,H.D., DEBELJKOVIĆ,LJ.D. Consistency and Liapunov Stability of Linear Decsriptor Sysatems: a Geometric Approach. *IMA Journal of Math. Control and Information*, 1985, no.2, p.139-151.

[25] PANDOLFI,L. On the Regulator Problem for Linear Degenerate Control Systems. *JOTA*, 1981, vol.33, no.2, p.241–254.

[26] SARIĆ,V.B. *Koncept hiperenergetske stabilnosti nestacionarnih nelinearnih vremenski kontinualnih sistema automatskog upravljanja.* Magistarska teze, Mašinski fakultet, Beograd, 1999.

Dodatak A

NEKA OSNOVNA PITANJA POSTOJANJA I JEDINSTVENOSTI REŠENJA SISTEMA SINGULARNIH LINEARNIH DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA

Razmatra se kontinualni linearni stacionarni singularni sistem:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0, \tag{A1}$$

Ako je *matrični par* $(sE + A)$ *regularan,* tj. ukoliko je:

$$\det(sE + A) \neq 0,\ s \in C, \tag{A2}$$

tada rešenja sistema, datog jed. (A1), postoje i jedinstvena su, a ukoliko su im pridruženi konzistentni početni uslovi, ona su ***glatka*** (ne sadrže impulse) i mogu se dobiti u zatvorenom obliku.

Definicija A1. Neka matrice $E,\ A \in C^{n\times n}$ i $t_0 \in \Re$. Vektor $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x} \in \Re^n$ naziva se konzistentni početni vektor pridružen trenutku t_0 ako jed. (A1) ima jedinstveno rešenje.

Jed. (A1) je *traktabilna* u trenutku t_0, ako ima jedinstveno rešenje za svaki konzistentni početni vektor **x**, pridružen trenutku t_0.

Ako je homogena jednačina $E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)$ traktabilna u nekom trenutku $t_0 \in \Re$, onda je ona traktabilna u svakom trenutku $t \in \Re$, pa se jednostavno kaže da je ona *traktabilna.*

Teorema A1. Za $E,\ A \in C^{n\times n}$, homogena algebro-diferencijalna jed. (A1) je *traktabilna* ako, i samo ako postoji skalar $\lambda \in C$, takav da postoji matrica $(\lambda E + A)^{-1}$.

Rešljivost linearnog singularnog sistema

Rešljivost sistema datog jed. (A1) može da se ispituje prema sledećoj teoremi Yip, Sincovec (1981).

Teorema A2. Sledeći izrazi su ekvivalentni:

a) (A,E) je rešljivo, $[\det(sE - A) \neq 0]$,

b) Ako je X_0 nulti prostor matrice $A,$ a skup X_i je takav da:

$$X_i = \{\mathbf{x}(t)\colon A\mathbf{x}(t) \in EX_{i-1}\} \tag{A3}$$

tada je:

$$\aleph(E) \cap X_i = \{\mathbf{0}\}, \forall i = 0,1 \tag{A4}$$

c) Ako je Y_0 nulti prostor matrice A^T, a skup:

$$Y_i = \{\mathbf{x}(t)\colon A\mathbf{x}(t) \in EY_{i-1}\} \tag{A5}$$

tada je:

$$\aleph(E^T) \cap Y_i = \{\mathbf{0}\}, \forall i = 0,1 \tag{A6}$$

d) Matrica:

$$G(n) = \begin{bmatrix} E & 0 & \cdots & 0 \\ A & E & \cdots & 0 \\ 0 & A & \cdots & 0 \\ \vdots & & & \vdots \\ \vdots & & & E \\ 0 & & \cdots & A \end{bmatrix} \}n+1 \tag{A7}$$

ima pun rang po kolonama za $n = 1,2,\ ...$

e) Matrica:

$$F(n)=\underbrace{\begin{bmatrix} E & A & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & E & A & \cdots & 0 \\ 0 & 0 & E & \cdots & 0 \\ \vdots & & & & \vdots \\ \vdots & & & & E \\ 0 & & \cdots & & A \end{bmatrix}}_{n+1} \tag{A8}$$

ima pun rang po vrstama za n =1,2, ...

Poseban prilaz *rešljivosti* je pojednostavljeni "*shuffle algoritam*". U algoritmu se modifikuje jedan poredak matrica dimenzija $n \times 2n$.

Počinje se poretkom:

$$E \quad A$$

Za singularnu matricu *E,* sprovodi se niz operacija sa vrstama celog poretka dovodeći ga u formu:

$$\begin{matrix} T & A_1 \\ 0 & A_2 \end{matrix}$$

gde T ima n kolona, ali manje od n vrsta. Matrice A_1 i A_2 su delovi desne strane poretka, nakon operacije sa vrstama A_1 i T su istih dimenzija.

Sledeći korak je dovođenje poretka u formu:

$$\begin{matrix} T & A_1 \\ A & 0 \end{matrix}$$

Zamena donjih delova se i naziva "*shuffle*".

Ako je $n \times n$ matrica na levoj strani poretka nesingularna, algoritam se završava (sistem je rešljiv). U suprotnom, on se nastavlja na isti način izvođenjem operacija sa vrstama, da bi se dobile nulte vrste na levoj strani, a zatim zamenom odgovarajućih vrsta s desne na levu stranu i obrnuto.

Za linearne singularne sisteme u *prinudnom radnom režimu*, razvijen je odgovarajući "shuffle" algoritam.. Zainteresovani ćitalac upućuje se na lit. Debeljković et al. (1996).

Dodatak B

NEKA OSNOVNA PITANJA VEZANA ZA POSTOJANJE KONZISTENTNIH I NEKONZISTENTNIH POČETNIH USLOVA

Konzistentni početni uslovi

Rešenje "*normalnog*" (nesingularnog) sistema jednačina se može odrediti, kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu, za proizvoljne početne uslove. Zbog singularnog karaktera ovde razmatranog sistema diferencijalnih jednačina koji *svi mogući početni uslovi nisu prihvatljivi.* Oni početni uslovi koji su prihvatljivi nazivaju se *konzistentnim.*

Osnovno obeležje konzistentnih početnih uslova je da oni generišu *glatka* rešenja, a ako se razmatranom sistemu jednačina pridruže nekonzistentni uslovi, javiće se impulsno ponašanje na početku njihove integracije.

Polazi se od vektorske jednačine stanja singularnog sistema:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t), \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{B1}$$

Skup svih vektora $\mathbf{x}_0$, koji obrazuju potprostor konzistentnih početnih uslova, u oznaci W_k, može da se odredi iz uslova:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\,\mathbf{x}_0 = \mathbf{0} \tag{B2}$$

što je ekvivalentno sa:

$$W_k = \aleph(I-\hat{E}\hat{E}^D) \tag{B3}$$

gde indeks "D" označava Drazinovu inverziju matrice, a

$$\hat{E} = (\lambda \quad E - A)^{-1} E \tag{B4}$$

Klasično određivanje konzistentnih početnih uslova za razmatrani sistem se određuje uz pomoć sledećih rezultata:

Lema B1. Ako se $\bar{W}_j$ (j ≥ 0) generiše sekvencom:

$$\begin{gathered} \bar{W}_0 = \Re^n \ , \\ \bar{W}_{j+1} = (\lambda \quad E-A)^{-1} E \bar{W}_j \quad , \quad \lambda \in C \end{gathered} \tag{B5}$$

tada je:

$$\bar{W}_j = W_j \ , \ (j \geq 0) \tag{B6}$$

gde je W_j potprostor konzistentnih početnih uslova *kontinualnog* singularnog sistema, Owens, Debeljkovic (1985).

Teorema B1. Pod uslovima Leme B1., $\mathbf{x}_0$ je vektor konzistentnih početnih uslova za *autonomni kontinualni singularni* sistem dat jed. (B1) ako, i samo ako $\mathbf{x}_0 \in W_q$. Šta više, $\mathbf{x}_0$ tada generiše jedinstveno rešenje ($\mathbf{x}(t)$: $t \geq 0$) takvo, da $\mathbf{x}(t) \in W_q$ za $\forall t \geq 0$, Owens, Debeljković (1985).

Potprostor konzistentnih početnih uslova može da se odrediti prevođenjem polaznog sistema na njegovu *normalnu kanoničku formu*:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t) \tag{B7}$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t) \tag{B8}$$

Tada algebarski deo sistema u potpunosti definiše taj prostor, odnosno:

$$\mathbf{0} = A_3 x_{10} + A_4 x_{20} \tag{B9}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$W_k = \aleph\left(\begin{bmatrix} A_3 & A_4 \end{bmatrix} \right) \tag{B10}$$

gde je $\aleph(\cdot)$ nulti prostor matrice $(\cdot)$.

Dodatak C

ODREĐIVANJE REŠENJA SINGULARNOG SISTEMA DIFERENCIJALNIH JEDNAČINA I KRETANJE SINGULARNOG SISTEMA U PROSTORU STANJA

Razmatraće se rešenja sistema kada su matrice E i A kvadratne.

Slobodni radni režim

Pogodno je kontinualni singularni sistem prikazati kao:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) + A\mathbf{x}(t) = 0, \quad \mathbf{x}(0) = \mathbf{x}_0 \tag{C1}$$

Teorema C1. Neka je jed.(C1) traktabilna. Tada je njeno rešenje dato sa:

$$\mathbf{x}(t)=e^{-\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)}\hat{E}\hat{E}^D\,\mathbf{q},\qquad \mathbf{q}\in C^n \tag{C2}$$

Stanje $\mathbf{x}_0$ je konzistentno početno stanje za datu homogenu jednačinu, ako, i samo ako je:

$$\mathbf{x}_0=\hat{E}\hat{E}^D\,\mathbf{x}_0 \tag{C3}$$

Kretanje se može odrediti i sledećim prilazom, Sarić (1999).

Neka je sistem dat sa:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t),\mathbf{x}(t_0)=\mathbf{x}_0 \tag{C4}$$

Do rešenja diferencijalne matrične jed.(C4) može da se dođe direktnom integracijom. U tu svrhu, ako se jed.(C4) pomnoži sa leve strane matricom $\phi(t-\tau)$, a zatim integrali u granicama od t_0 do t, dobija se:

$$\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)E\,\dot{\mathbf{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)A\,\mathbf{x}(\tau)\mathrm{d}\tau. \tag{C5}$$

Koristeći parcijalnu integraciju, leva strana jed. (C5) dobija oblik:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)E\,\dot{\mathbf{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\\&=\phi(t-\tau)E\mathbf{x}(\tau)\,/_{t_0}^{t}-\int_{t_0}^{t}d\phi(t-\tau)E\,\mathbf{x}(\tau).\end{aligned} \tag{C6}$$

Pošto važi:

$$\begin{aligned}&\mathrm{d}\phi(t-\tau)=\\&=\frac{d\phi\ \ (t-\tau)}{d(t-\tau)}\cdot\frac{d(t-\tau)}{d\tau}\cdot d\tau\ =-\dot{\phi}(t-\tau)d\tau\end{aligned} \tag{C7}$$

konačno se dobija:

$$\begin{aligned}&\int_{t_0}^{t}\phi(t-\tau)E\,\dot{\mathbf{x}}(\tau)\mathrm{d}\tau=\phi(0)E\mathbf{x}(t)-\\&-\phi(t-t_0)E\mathbf{x}(t_0)+\int_{t_0}^{t}\dot{\phi}(t-\tau)E\,\mathbf{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{C8}$$

pa jed. (C8) poprima formu:

$$\begin{aligned}&\phi(0)E\mathbf{x}(t)=\phi(t-t_0)E\mathbf{x}(t_0)-\\&-\int_{t_0}^{t}\left(\dot{\phi}(t-\tau)E-\phi(t-\tau)A\right)\mathbf{x}(\tau)\mathrm{d}\tau\end{aligned} \tag{C9}$$

Matrica $\phi(t)$ ima osobine:

$$\dot{\phi}(t)E\equiv\phi(t)A,\quad \forall t>0 \tag{C10}$$

$$\phi(0)E=E \tag{C11}$$

Tada jed. (C9) postaje:

$$E\mathbf{x}(t)=\phi(t-t_0)E\mathbf{x}(t_0) \tag{C12}$$

Za $t_0=0$,

$$E\mathbf{x}(t)=\phi(t)E\mathbf{x}(0) \tag{C13}$$

Jed. (C12) je, očigledno, rešenje jed.(C4), sa fundamentalnom matricom $\phi(t)$ koja, prema prethodnoj analizi, mora da zadovolji uslove (C10) i (C11).

Fundamentalna matrica sistema (C4), može da se odredi i primenom Laplasove transformacije na jed.(C10):

$$\lambda\phi(\lambda)E-\phi(0)E=\phi(\lambda)A \tag{C14}$$

Uzimajući u obzir jed. (C11), dobija se:

$$\phi(\lambda)=E(\lambda E-A)^{-1} \tag{C15}$$

odnosno:

$$\phi(t)=\bullet^{-1}\left\{E(\lambda E-A)^{-1}\right\} \tag{C16}$$

Isti rezultat se dobija i primenom Laplasove transformacije na jed.(C4), a za rešenje u obliku (C12):

$$\mathbf{x}(\lambda)=(\lambda E-A)^{-1}E\mathbf{x}(0) \tag{C17}$$

$$E\mathbf{x}(\lambda)=E(\lambda E-A)^{-1}E\mathbf{x}(0) \tag{C18}$$

i konačno:

$$E\mathbf{x}(t)=\phi(t)E\mathbf{x}(0) \tag{C19}$$

gde je $\phi(t)$ određeno jed.(C16).

Ako se izvrši transformacija jed.(C4) u smislu da važi:

$$\begin{aligned}&E(\lambda E+A)^{-1}(\lambda E+A)\,\dot{\mathbf{x}}(t)=\\&=A(\lambda E+A)^{-1}(\lambda E+A)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{C20}$$

dobija se:

$$\tilde{E}\,\dot{\tilde{\mathbf{x}}}(t)=\tilde{A}\,\tilde{\mathbf{x}}(t) \tag{C21}$$

gde je:

$$\begin{aligned}&\tilde{E}=E(\lambda E+A)^{-1}\ ,\ \tilde{A}=A(\lambda E+A)^{-1}\\&\tilde{\mathbf{x}}(t)=(\lambda E+A)\mathbf{x}(t)\end{aligned} \tag{C22}$$

Primenjujući analizu sličnu prethodnoj, rešenje diferencijalne jed.(C21) se dobija u obliku:

$$\tilde{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(t)=\tilde{\phi}(t)\tilde{E}\,\tilde{\mathbf{x}}(0),\ t_0=0 \tag{C23}$$

Fundamentalna matrica $\tilde{\phi}(t)$ se određuje iz:

$$\dot{\tilde{\phi}}(t)\tilde{E}\equiv\tilde{\phi}(t)\tilde{A} \tag{C24}$$

$$\tilde{\phi}(0)\tilde{E}=\tilde{E} \tag{C25}$$

Matrična funkcija $\tilde{\phi}(t)=\tilde{E}^De^{\tilde{E}^D\tilde{A}\,t}\tilde{E}$, $t>0$ je rešenje matrične jed.(C24) pod određenim uslovima, koji slede iz sledećeg razmatranja:

$$\dot{\tilde{\phi}}(t)\tilde{E}=\tilde{E}^De^{\tilde{E}^D\tilde{A}\,t}\tilde{E}^D\tilde{A}\tilde{E}\tilde{E}=\tilde{E}^De^{\tilde{E}^D\tilde{A}\,t}\tilde{E}\tilde{E}\tilde{E}^D\tilde{A} \tag{C26}$$

Pošto važi:

$$\tilde{A}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{A} \quad \wedge \quad \tilde{E}\tilde{E}^D = \tilde{E}^D\tilde{E} \tag{C27}$$

jednakost (C24) će biti zadovoljena, ako važi:

$$\tilde{E}^2\tilde{E}^D = \tilde{E} \tag{C28}$$

Uzimajući u obzir osobinu Drazinove inverzije: $F^{k+1}F^D = F^k$, $k = \mathrm{Ind}(F)$ potrebno je da važi: $\mathrm{Ind}\left(\tilde{E}\right) = 1$.

Konačno se dobija:

$$\dot{\tilde{\phi}}(t)\tilde{E} = \tilde{E}^D e^{\tilde{E}^D\tilde{A}\,t}\tilde{E}\tilde{A} = \tilde{\phi}(t)\tilde{A} \tag{C29}$$

Uslov dat jed. (C25):

$$\tilde{\phi}(0)\tilde{E} = \tilde{E}^D\tilde{E}\tilde{E} = \tilde{E}\tilde{E}\tilde{E}^D = \tilde{E} \tag{C30}$$

je takođe zadovoljen za $\mathrm{Ind}\left(\tilde{E}\right) = 1$, odnosno za $\mathrm{rang}\left(\tilde{E}\right) = \mathrm{rang}\left(\tilde{E}^2\right)$.

Prinudni radni režim

Teorema C2. Neka matrica ($\lambda E + A$) ima inverznu matricu za neki skalar λ i neka je ulazna funkcija $\mathbf{u}(t)$ k-puta diferencijabilna u okolini početnog trenutka t_0. Tada nehomogena jednačina:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t)+A\mathbf{x}(t)=B\mathbf{u}(t) \tag{C31}$$

ima opšte rešenje:

$$\mathbf{x}(t)= e^{-\hat{E}^D\hat{A}(t-t_0)}\hat{E}\hat{E}^D\,\mathbf{q}+ e^{-\hat{E}^D\hat{A}t}\int_{t_0}^{t} e^{\hat{E}^D\hat{A}\tau}\,\hat{E}^D\hat{\mathbf{u}}(\tau)d\tau+ \\ +(I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\hat{E}\hat{A}^D)^i\,\hat{A}^D\hat{B}\,\mathbf{u}^{(i)}(t) \tag{C32}$$

Označimo sa:

$$\mathbf{w} = (I-\hat{E}\hat{E}^D)\sum_{i=0}^{k-1}(-1)^i(\hat{E}\hat{A}^D)^i\,\hat{A}^D\hat{\mathbf{u}}^{(i)}$$

Vektor $\mathbf{w}$ je nezavisan od izbora skalara λ. Stanje $\mathbf{x}_0$ je konzistentno početno stanje pridruženo $t_0 \in \Re$ za nehomogenu jednačinu, ako zadovoljava uslov:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)(\mathbf{x}_0-\mathbf{w}(0))=\mathbf{0} \tag{C33}$$

Nehomogena jed. (C31) je traktabilna u trenutku t_0 i njeno jedinstveno rešenje, s početnim uslovom $\mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0$, dato je jed. (C32), gde je $\mathbf{q} = \mathbf{x}_0$.

Treba primetiti da za traktabilnu homogenu vektor početnih uslova mora da zadovolji:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)\,\mathbf{x}_0=\mathbf{0} \tag{C34}$$

ili u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathbf{x}_0 \in \Re(\hat{E}^k) \tag{C35}$$

Slično, za nehomogenu jednačinu, vektor početnih uslova zadovoljava:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)(\mathbf{x}_0-\mathbf{w}_0)=\mathbf{0} \tag{C36}$$

odnosno:

$$(I-\hat{E}\hat{E}^D)(\mathbf{x}(t)-\mathbf{w}(t))=\mathbf{0} \tag{C37}$$

ili, u ekvivalentnoj notaciji:

$$(\mathbf{x}(t)-\mathbf{w}(t)) \in \Re(\hat{E}^k)\ ,\ \forall t\,. \tag{C38}$$

Dodatak D

MATRICA PRENOSNIH FUNKCIJA SINGULARNOG SISTEMA

Posmatra se kontinualni singularni sistem:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t)=A\mathbf{x}(t)+B\mathbf{u}(t) \tag{D1}$$

$$\mathbf{x}_i(t)=C\mathbf{x}(t) \tag{D2}$$

Koristeći Laplasovu transformaciju, pri svim početnim uslovima jednakim nuli sledi:

$$W(s) = C[sE-A]^{-1}B = C\frac{adj[sE-A]}{\det(sE-A)}B \tag{D3}$$

prenosna matrica kontinualnog singularnog sistema, sa svojim karakterističnim polinomom:

$$f_E(s)=\det(sE\text{-}A) \tag{D4}$$

Matricu prenosnih funkcija mogu da oforme samo oni sistemi kod kojih je: $\det(sE-A) \neq 0$, za neko $s \in C$. Kada je $\det(sE-A) \equiv 0, \forall s$, sistem nema matricu prenosnih funkcija, ali on ipak može ostvariti odgovarajuće dinamičko ponašanje, pri čemu se njegovo *ulazno-izlazno ponašanje* definiše relacijom:

$$R(s)\mathbf{X}_i(s)=Q(s)\mathbf{U}(s) \tag{D5}$$

gde su $R(s)$ i $Q(s)$ odgovarajući polinomi, Debeljković et al. (1995).

Dodatak E

IMPULSNO PONAŠANJE SINGULARNOG SISTEMA

Osobina rešljivosti singularnog sistema jednačina direktno zavisi od matrica E i A. Ukoliko postoji jedinstveno rešenje, ono će se dobiti uz korišćenje odgovarajućih početnih uslova. Izbor početnih uslova određuje pojavu ili eksponencijalnih ili impulsnih modova. U praksi se teži eksponencijalnim modovima koji garantuju ***glatka*** rešenja bez pikova, tj. impulsa. Za početne uslove koji generišu glatka rešenja se kaže da su konzistentni (saglasni). Impulsno kretanje singularnih sistema može da se javi i u slobodnom radnom režimu, *kada se pojave proizvoljni početni uslovi.*

Za singularni sistem:

$$E\,\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t) \tag{E1}$$

$$\mathbf{x}_i(t) = C\mathbf{x}(t) \tag{E2}$$

važi:

Broj stepeni slobode sistema, tj. broj nezavisnih vrednosti koje početni vektor $E\mathbf{x}(0)$ može uzeti, redukovan je na:

1.

$$q = \text{rang } E < n \tag{E3}$$

pa je broj stepeni slobode manji od reda sistema.

2. Matrica prenosnih funkcija $W(s)$ ne mora više da bude striktno svojstvena i obično može da se predstavi u obliku dva sabirka, od kojih prvi ima tu osobinu, a drugi odgovara nekom polinomu po s.
3. Može da se definiše stepen karakterističnog polinoma matričnog para (E,A) kao:

$$\text{degree det}(sE - A) = r \leq q < n \tag{E4}$$

U ovom slučaju, odziv sistema u slobodnom radnom režimu sadrži eksponencijalne modove na r konačnih učestanosti, ali takođe i $(q\text{-}r)$ impulsnih članova ili $(q\text{-}r)$ modova *beskonačne učestanosti.*

Da bi se pokazalo postojanje impulsa u rešenju singularnog sistema diferencijalnih jednačina, jed.(E1 - E2), dekomponovaće se prostor stanja $X \in \Re^n$ u dva potprostora, tako da je $X = X_1 \oplus X_2$, pri $\dim X_1 = n_1$. Na ovaj način se dolazi do Vajerštrasove kanoničke forme:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = J\,\mathbf{x}_1(t) + B_1\,\mathbf{u}(t) \tag{E5}$$

$$N\dot{\mathbf{x}}_2(t) = I\,\mathbf{x}_2(t) + B_2\,\mathbf{u}(t) \tag{E6}$$

gde su $\mathbf{x}_1 \in \Re^{n_1}$, $\mathbf{x}_2 \in \Re^{n_2}$, J je Žordanov oblik, a N nilpotentni matrični oblik indeksa nilpotentnosti ν.

Podsistem dat jed.(E5) je ***spor***, jer u osnovi odgovara po formi "normalnom" sistemu i ima svoju usporenu dinamiku ograničene učestanosti.

Podsistem dat jed.(E6) je ***brz,*** jer sadrži nedinamička ograničenja i neograničene je učestanosti, što se posebno vidi iz rešenja sistema datog jed. (E5 - E6):

$$\begin{aligned} \mathbf{x}_1(t) &= e^{Jt}\,\mathbf{x}_1(0) + \int e^{J(t-\tau)} B_1\,\mathbf{u}(\tau)\mathrm{d}\tau \\ \mathbf{x}_2(t) &= -\sum_{i=0}^{\nu-1} \delta^{(i-1)}(t) N^i\,\mathbf{x}_2(0) - \sum_{i=0}^{\nu-1} N^i B_2\,\mathbf{u}^{(i)} \end{aligned} \tag{E8}$$

gde $\mathbf{u}^{(i)}(t)$ predstavlja i-ti izvod funkcije $\mathbf{u}(t)$, a, $(i-1)$ izvod impulsne funkcije.

Impulsi u jed. (E.6) su određeni strukturom matrice $N = \text{diag}\,[N_1, \ldots, N_k]$. U stvari, svaki $k \times k$ $(k > 1)$ nilpotentni blok ima $k-1$ stepeni slobode i određuje $k-1$ nezavisnih impulsnih kretanja u slobodnom radnom režimu. Takođe je očigledno da su trivijalni (1×1) nilpotentni blokovi predstavljeni samo nedinamičkim algebarskim ograničenjima. Stoga se singularni sistemi sastoje iz *dinamičkog dela* i *nedinamičkih ograničenja.* Dinamika sistema se stoga sastoji od *eksponencijalnog* i *impulsnog* ponašanja.

Rad primljen: 12.1.2001.god.