UDK: 621.833.6(047)=861
COSATI: 13-09

Teorijsko određivanje snage u ozubljenju nekih funkcionalnih modula planetarnih prenosnika

Dr Mladen Pantić, dipl.inž.[1)]

Za funkcionalne module koji se najčešće koriste u projektovanju složenih planetarnih prenosnika, određeni su tokovi efektivne i cirkulirajuće snage. Njihov prikaz dat je na kinematičkim šemama. Utvrđeni tokovi snage su osnova u izvođenju analitičkih izraza za snagu u ozubljenju. Dobijeni izrazi prikazani su tabelarno i mogu se upotrebiti za efikasno određivanje stepena korisnosti.

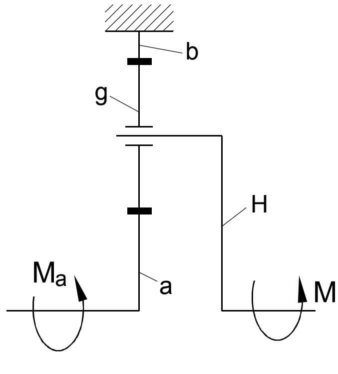
Ključne reči: **Planetarni prenosnik, stepen korisnosti, snaga u ozubljenju, funkcionalni modul.**

Uvod

SNAGA u ozubljenju je ona snaga koja se prenosi međusobnim sprezanjem zubaca dva zupčanika. Poznato je da običan zupčasti prenosnik prenosi snagu isključivo na ovaj način. Kod planetarnog prenosnika, onaj deo snage koji se prenosi na način kao kod običnog zupčastog prenosnika, naziva se snaga u ozubljenju (snaga u sprezanju, snaga zupčanja, snaga relativnog kretanja ili snaga valjanja), a deo snage koji se prenosi prenosnim kretanjem elemenata planetarnog prenosnika naziva se snaga spajanja (snaga prenosnog kretanja). Poznavanje vrednosti snage u ozubljenju je veoma značajno za određivanje stepena korisnosti primenom jedne od poznatih metoda.

Određivanje snage u ozubljenju

Snaga u ozubljenju dva zupčanika se definiše kao proizvod obrtnog momenta koji prenosi dati zupčanik i razlike ugaonih brzina tog zupčanika i nosača satelita [1].



Slika 1. Jednoredni planetarni prenosnik

Za jednoredni planetarni prenosnik, prikazan na sl.1, snaga u ozubljenju zupčanika sa spoljašnjim ozubljenjem (zupčanici **a** i **g**) iznosi:

$$P'_{oz} = M_a \left|\omega_a - \omega_H\right| \tag{1}$$

a snaga u unutrašnjem ozubljenju (zupčanici **g** i **b**) iznosi:

$$P''_{oz} = M_b \left|\omega_b - \omega_H\right| \tag{2}$$

gde su: M_a – obrtni moment na centralnom zupčaniku, M_b – obrtni moment na epiciklu, ω_a – ugaona brzina centralnog zupčanika i ω_H – ugaona brzina nosača satelita.

Gubici snage u ozubljenju planetarnog prenosnika najčešće se izračunavaju pomoću stepena korisnosti. Stepen korisnosti u svim ozubljenjima planetarnog prenosnika definisan je u [1] sledećim analitičkim izrazom:

$$\eta = \frac{P_{uz} - P_{tuk}}{P_{uz}} = 1 - \frac{P_{tuk}}{P_{uz}} \tag{3}$$

gde je: P_{uz} – snaga ulaznog elementa prenosnika koja se prenosi relativnim kretanjem i P_{tuk} – snaga trenja u svim ozubljenjima zupčastih parova.

Snaga ulaznog elementa prenosnika, koja se prenosi relativnim kretanjem, predstavlja deo ukupne snage na ulazu u prenosnik (P_u). Drugu komponentu ukupne ulazne snage je deo snage koji se prenosi prenosnim kretanjem (P_{up}). Međusobni odnos navedenih snaga dat je sledećom relacijom [1]:

$$P_u = P_{uz} + P_{up} \tag{4}$$

Odnos veličina P_{uz} i P_u se definiše kao koeficijent prenosa ulazne snage relativnim kretanjem elemenata prenosnika i analitički se izražava na sledeći način:

$$c_r = \frac{P_{uz}}{P_u} \tag{5}$$

Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem pokazuje u kojoj se meri u nekom ostvarenom funkcionalnom stanju prenosnika, ukupna ulazna snaga prenosi relativnim

[1)] Vojnotehničkik institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

kretanjem.

U planetarnom prenosniku, zavisno od njegove ostvarene konfiguracije, može da postoji jedan ili više tokova snage. Svaki tok snage sastoji se od snage koja se prenosi prenosnim kretanjem i snage koja se prenosi relativnim kretanjem. Ukupna snaga (P_{uz}) na ulazu u prenosnik, koja se prenosi relativnim kretanjem, jednaka je zbiru snaga koje se prenose relativnim kretanjem u svim tokovima, što se analitički izražava na sledeći način:

$$P_{uz} = P_{z1} + P_{z2} + \ldots + P_{zj} + \ldots + P_{zw} = \sum_{j=1}^{w} P_{zj} \qquad (6)$$

gde je : w – ukupan broj tokova snage u prenosniku.

U ozubljenju gde prolaze samo tokovi efektivne (korisne) snage, koja se prenosi relativnim kretanjem, snaga je jednaka efektivnoj snazi ($P_{ozj} = P_{zj}$).

U slučaju da kroz ozubljenje osim toka efektivne snage prolazi i tok cirkulirajuće snage, snaga u ozubljenju biće uvećana za onu vrednost cirkulirajuće snage koja se prenosi relativnim kretanjem, što se za **j**-to ozubljenje, analitički izražava na sledeći način:

$$P_{ozj} = P_{zj} + P_{czj} \qquad (7)$$

gde je: P_{czj} – cirkulirajuća snaga u **j**-tom ozubljenju koja se prenosi relativnim kretanjem.

Za određivanje cirkulirajuće snage, koja se prenosi relativnim kretanjem, potrebno je da se poznaje cirkulirajući moment (M_c) i ugaona brzina elementa planetarnog prenosnika za koji se određuje cirkulirajuća snaga, kao i ugaona brzina nosača satelita planetarnog reda kome pripada razmatrani element. Tako, na primer, za element $\boldsymbol{a_2}$ planetarnog prenosnika, analitički izraz za cirkulirajuću snagu glasi:

$$P_{cza_2} = M_{ca_2} \left| \omega_{a_2} - \omega_{H_2} \right| \qquad (8)$$

Snaga trenja svih ozubljenja opterećenih i neopterećenih zupčastih parova (P_{tuk}), određuje se pomoću sledećeg izraza:

$$P_{tuk} = P_t + P_{tn} \qquad (9)$$

gde su : P_t – snaga trenja u svim ozubljenjima (spoljašnjim i unutrašnjim) opterećenih zupčastih parova i P_{tn} – snaga trenja u svim ozubljenjima (spoljašnjim i unutrašnjim) neopterećenih zupčastih parova.

Snaga trenja svih ozubljenja opterećenih zupčastih parova jednaka je zbiru snaga trenja u svakom opterećenom ozubljenju, što se može analitički izraziti:

$$P_t = \sum_{j=1}^{N} P_{tj} \qquad (10)$$

gde su: N – ukupan broj ozubljenja svih opterećenih zupčastih parova i P_{tj} – snaga trenja u **j**-tom ozubljenju opterećenog zupčastog para.

Snaga trenja u uzubljenju zavisi, pored ostalih parametara, i od snage u ozubljenju. Način njenog određivanja dat je u [1].

Ukupna snaga trenja u ozubljenju neopterećenih zupčastih parova jednaka je zbiru snaga trenja u svim neopterećenim ozubljenjima:

$$P_{tn} = \sum_{j=1}^{M} P_{tnj} \qquad (11)$$

gde su: M – ukupan broj ozubljenja svih neopterećenih zupčastih parova i P_{tnj} – snaga trenja u **j**-tom ozubljenju neopterećenog zupčastog para.

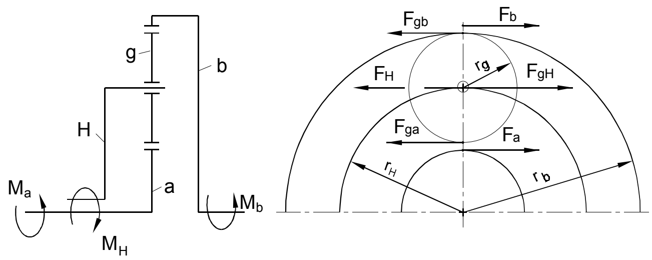
Da bi se odredila snaga u jednom od ozubljenja potrebno je da se prethodno odrede obimne sile i momenti odgovarajućih elemenata planetarnih prenosnika.

Sile i momenti u zahvatu zubaca zupčanika planetarnog prenosnika nalaze se u međusobnoj vezi. Planetarni red nekog složenog planetarnog prenosnika opterećen je samo u slučaju ako na sva tri njegova osnovna elementa (centralni zupčanik, epicikl i nosač satelita) deluju momenti M_a, M_b i M_H. Ako se zanemare sila trenja i inercione sile, suma momenata osnovnih elemenata planetarnog prenosnika jednaka je nuli, što se analitički izražava na sledeći način:

$$\Sigma M = M_\alpha + M_b + M_H = 0 \qquad (12)$$

Da bi se odredili momenti koji se javljaju kod planetarnih prenosnika potrebno je odrediti sile koje deluju na bokove zubaca zupčanika u zahvatu, kao i sile na nosaču satelita. Sve sile planetarnog prenosnika moraju da budu u ravnoteži. Radijalne komponente sila u zahvatu ne utiču na vrednost obrtnih momenata, pa će se analiza izvesti samo sa obimnim komponentama sila.

Momenti i obimne sile, koji deluju na elemente jednorednog planetarnog prenosnika, prikazani su na sl.2.



Slika 2. Obimne sile i momenti elemenata jednorednog planetarnog prenosnika

Spoljašnji moment M_a, doveden na centralni zupčanik $\boldsymbol{a}$, izaziva na satelitu **g** unutrašnju obimnu silu:

$$F_{ga} = -F_a \qquad (13)$$

Ako se centralni zupčanik nalazi u ravnoteži, suma momenata na njemu jednaka je nuli:

$$M_a + F_a r_a = 0 \qquad (14)$$

Na osnovu izraza (13 i 14) dobija se:

$$F_{ga} = \frac{M_a}{r_a} \qquad (15)$$

Analogno se određuje unutrašnja obimna sila F_{gb} izazvana na satelitu spoljašnjim momentom M_b, koji prenosi epicikl **b**:

$$F_{gb} = \frac{M_b}{r_b} \qquad (16)$$

Iz uslova ravnoteže satelita nastaju sledeće jednačine:

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma M = F_{ga}r_g - F_{gb}r_g = 0 \\ F_{ga} = F_{gb}\end{array}\right\} \tag{17}$$

i

$$\left.\begin{array}{c}\Sigma F = F_{ga} + F_{gb} + F_{gH} = 0 \\ F_{gH} = -2F_{ga}\end{array}\right\} \tag{18}$$

gde je: F_{gH} – unutrašnja obimna sila, koja se od nosača satelita prenosi na satelit.

Od satelita se prenosi na nosač H sila suprotnog smera $F_H = -F_{gH}$), tako da se i nosač satelita nalazi u ravnoteži, što može da se izrazi analitički:

$$M_H + F_H r_H = 0 \tag{19}$$

Imajući u vidu da unutrašnji prenosni odnos k predstavlja veličinu r_b/r_a, na kraju se dobijaju sledeći izrazi:

$$M_b = M_a k \tag{20}$$

$$M_H = -M_a\left(1+k\right) \tag{21}$$

Izrazi (20 i 21) važe za sve tročlane planetarne prenosnike.

Proizvod ugaone brzine ω_l, l-tog elementa planetarnog prenosnika i spoljašnjeg obrtnog momenta M_l, proporcionalan je snazi P_l, koja se dovodi na taj element ili se odvodi sa njega. U slučaju poklapanja smera rotacije elemenata sa smerom delovanja spoljašnjeg momenta – snaga se dovodi, a u slučaju kada se smerovi ne poklapaju – snaga se odvodi.

Saglasno zakonu o održavanju energije za jednoredni planetarni prenosnik, kada svi elementi rotiraju konstantnim brojem obrtaja i kada nisu uzeti u obzir gubici na trenje, važe sledeći izrazi:

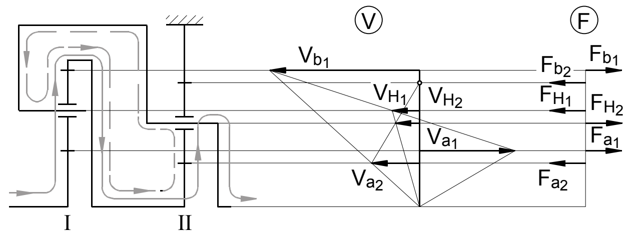
$$\left.\begin{array}{c}\Sigma P = P_a + P_b + P_H = 0 \\ M_a\omega_a + M_b\omega_b + M_H\omega_H = 0\end{array}\right\} \tag{22}$$

Određivanje snage u ozubljenju funkcionalnih modula

Teorijsko definisanje, kinematička analiza i značaj funkcionalnih modula u projektovanju složenih planetarnih prenosnika snage dati su u [2].

Jednačine (17-21) predstavljaju međusobnu zavisnost dinamičkih veličina jednorednog planetarnog prenosnika za uslov kada se zanemaruju inercijalne sile, primenjene su na funkcionalnim modulima, bez obzira da li su oni blokirani (ukupni prenosni odnos iznosi i=1) ili ne (i≠1), u cilju određivanja momenata opterećenja elemenata i tokova snage.

Određivanje tokova efektivne i cirkulirajuće snage (tamo gde ona postoji) izvršeno je korišćenjem metode obimnih sila i brzina, čiji je grafički prikaz, za funkcionalni modul strukturne formule $\underline{a_1}b_2\overline{H_1H_2}\left(b_1 - a_2\right)$, dat na sl.3. Tok efektivne snage označen je punom linijom, a za cirkulirajuću snagu prikazan je isprekidanom linijom.

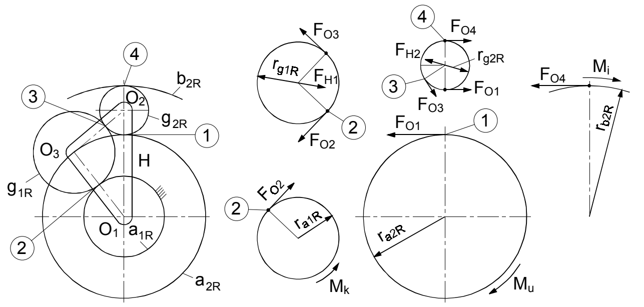


Slika 3. Tokovi efektivne i cirkulirajuće snage dvorednog funkcionalnog modula i obimne sile i brzine na satelitima

Korišćenjem ove metode, smer toka snage se određuje na osnovu smerova obimnih sila i brzina tako, što se smatra da se snaga dovodi u tačku osnovnog elementa prenosnika gde se poklapaju smerovi obimne sile i brzine. U suprotnom slučaju, u razmotrenoj tački snaga se odvodi.

U pogledu dinamičke ravnoteže, od svih funkcionalnih modula, najkarakterističniji su modul tipa RAVIGNEAUX strukturne formule $\underline{a_{2R}}a_{1R}b_{2R}$ i njegov inverzni modul strukturne formule $\underline{b_{2R}}\overline{a_{1R}}a_{2R}$.

Na sl.4, prikazani su kinematička šema funkcionalnog modula strukturne formule $\underline{a_{2R}}a_{1R}b_{2R}$ i obimne sile u tačkama zahvata zubaca njegovih zupčanika.



Slika 4. Obimne sile u zahvatu zubaca zupčanika funkcionalnog modula tipa RAVIGNEAUX

Na prikazanom funkcionalnom modulu, snaga se dovodi na centralni zupčanik $\boldsymbol{a_{2R}}$, a odvodi sa epicikla $\mathbf{b_{2R}}$, pri čemu je centralni zupčanik prvog planetarnog reda $\boldsymbol{a_{1R}}$ zakočen momentom M_k, koji je jednak proizvodu sile F_{02} i poluprečnika r_{a1R}.

Na osnovu jednačina ravnoteže, dobijeni su sledeći analitički izrazi za obimne sile:

$$F_{01} = M_u \frac{1}{r_{a2R}} \tag{23}$$

$$F_{02} = F_{03} = M_u \frac{1 + 2k_1 - k_2}{k_2 - k_1}\,\frac{1}{r_{a2R}} \tag{24}$$

$$F_{04} = M_u \frac{1 + k_1}{k_2 - k_1}\,\frac{1}{r_{a2R}} \tag{25}$$

gde je: M_u – obrtni moment na ulazu u prenosnik.

Usvajanjem pretpostavke da se unutrašnji prenosni odnosi nalaze međusobno u relaciji $k_2 - k_1 > 0$, na osnovu prethodnih izraza, može da se zapazi da su smerovi obimnih sila F_{01} i F_{02} jednoznačno određeni bez obzira na vrednost unutrašnjih prenosnih odnosa, dok smerovi sila F_{02} i F_{03} zavise od vrednosti unutrašnjih prenosnih odnosa.

U slučaju kada je vrednost izraza $1+2k_1-k_2$ pozitivna, smerovi sila F_{02} i F_{03} su isti kao na sl.4.

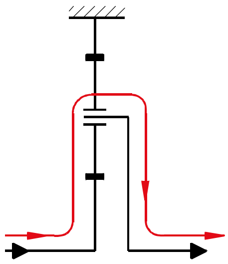
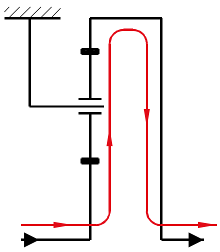
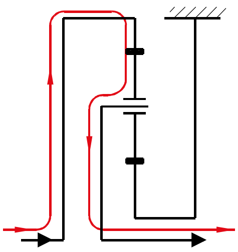
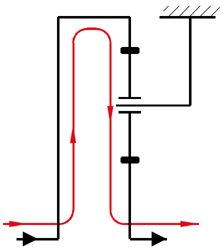
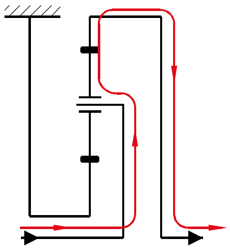
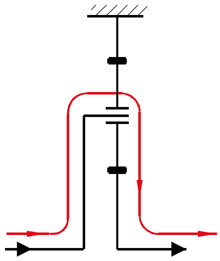
Kada navedeni izraz ostvari vrednost jednaku nuli ($1+2k_1-k_2 = 0$, odnosno $k_1 = (k_2-1)/2$), vrednosti sila u zahvatu zubaca satelita jednake su nuli ($F_{02} = F_{03} = 0$), pa su ovi zupčanici, zajedno sa centralnim zupčanikom prvog planetarnog reda, rasterećeni. Moment kočenja zupčanika a_{1R} postaje nula, a snaga se prenosi samo preko drugog planetarnog reda, pri čemu se ostvaruje prenosni odnos $i = -k_2$.

Pri ostvarivanju negativne vrednosti izraza $1+2k_1-k_2$, dolazi do promene smerova sila F_{02} i F_{03} i njihovih intenziteta, kao i momenata kočenja zupčanika $\boldsymbol{a_{1R}}$.

Snaga u ozubljenju i stepen korisnosti funkcionalnog modula su funkcije unutrašnjih prenosnih odnosa i ulazne snage i takođe zavise od ostvarene vrednosti razmatranog izraza.

Na osnovu poznavanja obimne sile i relativne obimne brzine u zahvatu zubaca zupčanika, određuje se snaga u ozubljenju.

Tabela 1. Tokovi snage i snaga u ozubljenju jednorednih funkcionalnih modula

Proizvoljna oznaka modula	Tok snage	Snaga u ozubljenju $P'_{oz} = P''_{oz}$
JM1		$P_u \dfrac{k}{1+k}$
JM2		P_u
JM3		$P_u \dfrac{1}{1+k}$
JM4		P_u
JM5		$P_u \dfrac{1}{1+k}$
JM6		$P_u \dfrac{k}{1+k}$

Tokovi snage i analitički izrazi za snagu u ozubljenju (spoljašnjem i unutrašnjem) za jednoredne funkcionalne module kod kojih je **i≠1**, dati su u tabeli 1 (ukupna snaga na ulazu u prenosnik u ovoj tabeli i sledećim tabelama označena je kao P_u).

Najveća vrednost snage u ozubljenju pojavljuje se na funkcionalnim modulima JM2 i JM4, zbog toga što se prenos snage ostvaruje samo relativnim kretanjem (nosač satelita je zakočen). Kod funkcionalnih modula oznaka JM3 i JM5 javlja se najmanja vrednost snage u zahvatu zubaca zupčanika.

Na osnovu (5), izvedeni su analitički izrazi za koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem i prikazani su u tabeli 2.

Tabela 2. Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem za jednoredne funkcionalne module

Proizvoljna oznaka modula	JM1	JM2	JM3	JM4	JM5	JM6
Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem, c_r	$\dfrac{k}{1+k}$	1	$\dfrac{1}{1+k}$	1	$\dfrac{1}{1+k}$	$\dfrac{1}{1+k}$

Analizom izraza datih u tabelama 1 i 2, uočava se da je kod jednorednih funkcionalnih modula snaga koja se prenosi relativnim kretanjem jednaka snazi u ozubljenju. Ovo nastaje zbog toga što nema prisustva cirkulirajuće snage.

Za dvoredne funkcionalne module sa prenosnim odnosom **i≠1**, u tabeli 3, dati su analitički izrazi za snagu u ozubljenju i tokovi efektivne (puna linija) i cirkulirajuće snage (isprekidana linija).

Od ukupno deset dvorednih funkcionalnih modula cirkulirajuća snaga se pojavljuje na pet, koji se u opštem slučaju smatraju nepovoljnim u pogledu unutrašnjih opterećenja i stepena korisnosti. Međutim, pošto vrednost unutrašnjih opterećenja i stepena korisnosti zavisi od unutrašnjih prenosnih odnosa, zavisno od njihove izabrane vrednosti, mogu da se jave slučajevi da funkcionalni moduli kod kojih postoji cirkulirajuća snaga budu povoljniji u pogledu konstrukcijskog izvođenja od modula gde se ona ne pojavljuje. Snaga u ozubljenju je funkcija ulazne snage i unutrašnjih prenosnih odnosa prvog i drugog planetarnog reda.

Izvedeni analitički izrazi za koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem dati su u tabeli 4.

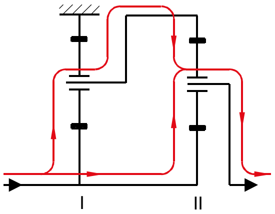
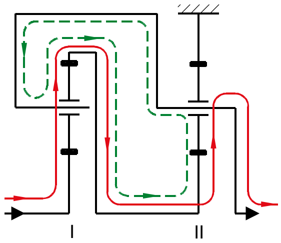
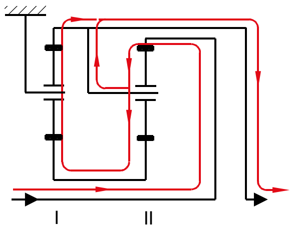
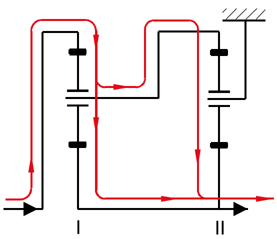
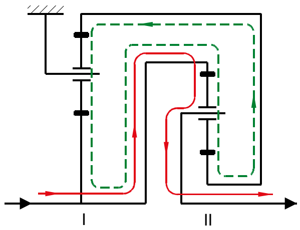
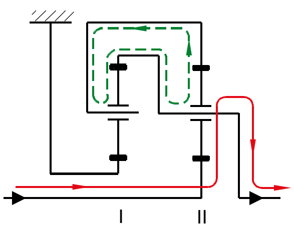
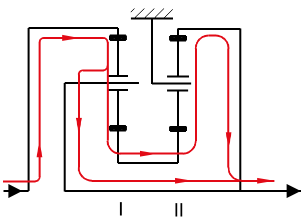
Za ovu vrstu modula kao i za troredne i funkcionalne module tipa RAVIGNEAUX u kombinaciji, nisu posebno analizirani njihovi odgovarajući inverzni moduli, zbog toga što je mala verovatnoća njihove primene, zbog utvrđenih nepovoljnih vrednosti kinematskih parametara (prenosnih odnosa).

Tokovi snage i izvedeni analitički izrazi za snagu u ozubljenju za funkcionalne module tipa RAVIGNEAUX , prikazani su u tabeli 5. Proizvoljne oznake funkcionalnih modula koje se nalaze u zagradama odnose se na inverzne module, čiji tokovi snage imaju suprotan smer od prikazanog, a ostvaruju se po istim konturama.

Cirkulirajuća snaga postoji na sledećim funkcionalnim modulima: RM3, RM9, RM10, RM11, RM14, RM17, RM20 i RM23. Intenzitet ove snage zavisi od vrednosti ulazne snage i unutrašnjih prenosnih odnosa planetarnih redova.

U slučaju kada je centralni zupčanik prvog planetarnog reda neopterećen, svi takvi moduli u funkcionalnom pogledu transformišu se u jednoredne funkcionalne module: RM4, RM5, RM16, RM18, RM22 i RM24.

Tabela 3. Tokovi snage i snaga u ozubljenju dvorednih funkcionalnih modula

Proizvoljna oznaka modula	Tokovi snage	Snaga u ozubljenju	
		I pl. red	II pl. red
1	2	3	4
DM1		$P_u \frac{k_1 k_2}{(1+k_1+k_2)(1+k_1)}$	$P_u \frac{k_1 k_2}{(1+k_1+k_2)(1+k_2)}$
DM2		$P_u \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 - 1}$	$P_u \frac{k_1 k_2}{k_1 k_2 - 1}$
DM3		$P_u \frac{k_1}{1+k_1+k_2}$	$P_u \frac{1+k_1}{1+k_1+k_2}$
DM4		$P_u \frac{1+k_2}{1+k_1+k_2}$	$P_u \frac{1+k_1}{1+k_1+k_2}$
DM5		$P_u \frac{1}{k_1 k_2 - 1}$	$P_u \frac{k_2 (1+k_1)}{(k_1 k_2 - 1)(1+k_2)}$
DM6		$P_u \frac{k_1 k_2}{(1+k_1)(1+k_1+k_2)}$	$P_u \frac{k_2}{1+k_1+k_2}$
DM7		$P_u \frac{1+k_2}{1+k_1+k_2}$	$P_u \frac{k_2}{1+k_1+k_2}$

nastavak tabele 3

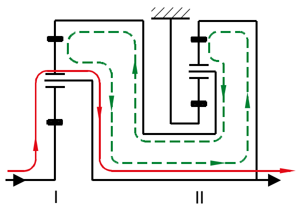
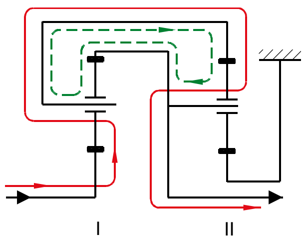
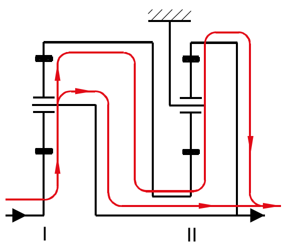
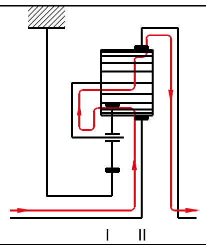
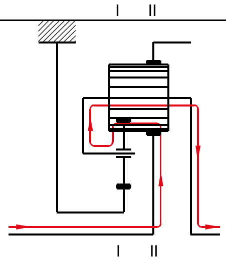
DM8		$P_u \frac{k_1}{1+k_1+k_2}$	$P_u \frac{k_1 k_2}{(1+k_2)(1+k_1+k_2)}$
DM9		$P_u \frac{k_1}{1+k_1+k_2}$	$P_u \frac{1+k_1}{1+k_1+k_2}$
DM10		$P_u \frac{k_1(1+k_2)}{1+k_1(1+k_2)}$	$P_u \frac{k_1 k_2}{1+k_1(1+k_2)}$

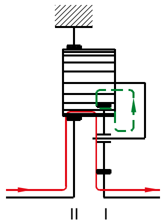
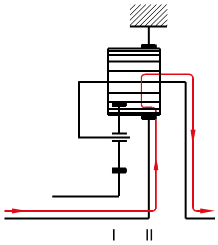
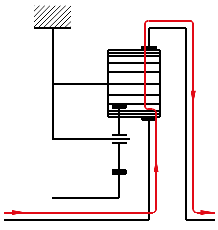
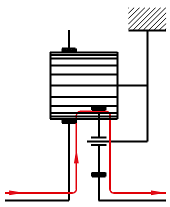
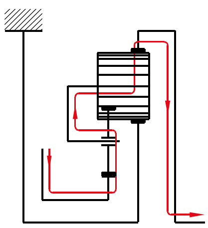
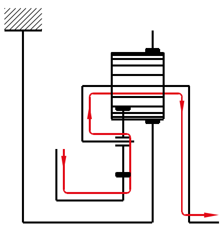
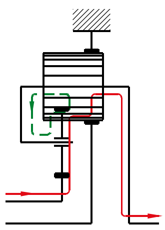
Tabela 4. Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem za dvoredne funkcionalne module

Proizvoljna oznaka modula	DM1	DM2	DM3	DM4	DM5
Koeficijent prenosa snage relativnim kretan-jem, c_r	$\frac{k_1 k_2 (k_1+k_2+2)(1+k_1)^{-1}}{(1+k_2)(1+k_1+k_2)}$	$\frac{k_2}{1+k_2}$	$\frac{1+k_1}{1+k_1+k_2}$	$\frac{1+k_2}{1+k_1+k_2}$	$\frac{1+k_1}{k_1(1+k_2)}$
Proizvoljna oznaka modula	DM6	DM7	DM8	DM9	DM10
Koeficijent prenosa snage relativnim kretan-jem, c_r	$\frac{k_2}{1+k_1+k_2}$	$\frac{k_2}{1+k_1+k_2}$	$\frac{k_1 k_2 (1+k_2)^{-1}}{1+k_1+k_2}$	$\frac{1+k_1}{1+k_1+k_2}$	$\frac{k_1 k_2}{1+k_1(1+k_2)}$

Tabela 5. Tokovi snage i snaga u ozubljenju RAVIGNEAUX funkcionalnih modula

<table>
<tr><td rowspan="3">Proizvoljna oznaka modula</td><td rowspan="3">Tokovi snage</td><td colspan="4">Snaga u ozubljenju</td></tr>
<tr><td colspan="2">I pl. red</td><td colspan="2">II pl. red</td></tr>
<tr><td colspan="2">P'_{oz}</td><td>P'_{oz}</td><td>P''_{oz}</td></tr>
<tr><td>1</td><td>2</td><td colspan="2">3</td><td>4</td><td>5</td></tr>
<tr><td rowspan="3">RM1
(RM13)</td><td rowspan="3"></td><td>$k_1 > \frac{k_2-1}{2}$</td><td>$P_u \frac{k_1(1+2k_1-k_2)}{(k_2-k_1)(1+k_1)}$</td><td rowspan="3">$P_u \frac{k_1}{1+k_1}$</td><td rowspan="3">$P_u \frac{k_1}{k_2-k_1}$</td></tr>
<tr><td>$k_1 = \frac{k_2-1}{2}$</td><td>0</td></tr>
<tr><td>$k_1 < \frac{k_2-1}{2}$</td><td>$P_u \frac{k_1(k_2-2k_1-1)}{(k_2-1)(1+k_1)}$</td></tr>
<tr><td>RM2
(RM19)</td><td></td><td colspan="2">$P_u \frac{k_1}{1+k_1}$</td><td>$P_u \frac{k_1}{1+k_1}$</td><td>/</td></tr>
</table>

nastavak tabele 5

RM3 (RM9)		$P_u \dfrac{k_2}{k_2-k_1}$	$P_u \dfrac{k_2}{1+k_1}$	$P_u \dfrac{k_2(1+k_1)}{(1+k_2)(k_2-k_1)}$
RM4 (RM24)		/	$P_u \dfrac{k_2}{1+k_2}$	$P_u \dfrac{k_2}{1+k_2}$
RM5 (RM18)		/	P_u	P_u
RM6 (RM12)		P_u	P_u	/
RM7 (RM15)		$P_u \dfrac{1}{1+k_1}$	$P_u \dfrac{k_2-k_1}{(1+k_1)(1+k_2)}$	$P_u \dfrac{1}{1+k_2}$
RM8 (RM21)		$P_u \dfrac{1}{1+k_1}$	$P_u \dfrac{1}{1+k_1}$	/
RM10 (RM23)		$P_u \dfrac{k_2}{k_2-1}$	/	$P_u \dfrac{k_2}{k_2-1}$

nastavak tabele 5

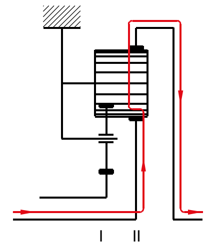
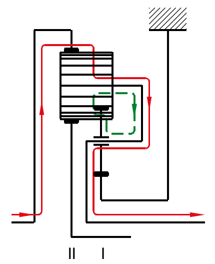
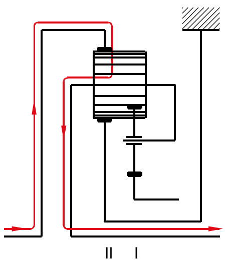
RM11 (RM17)		P_u	/	P_u
RM14 (RM20)		$P_u \dfrac{k_1}{k_2 - k_1}$	/	$P_u \dfrac{k_1}{k_2 - k_1}$
RM16 (RM22)		/	$P_u \dfrac{1}{1+k_2}$	$P_u \dfrac{1}{1+k_2}$

Tabela 6. Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem za RAVIGNEAUX funkcionalne module

Proizvoljna oznaka modula	RM1 RM13	RM2 RM19	RM3 RM9	RM4 RM24	RM5 RM18	RM6 RM12
Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem, c_r	$\dfrac{k_1}{1+k_1}$		$\dfrac{k_2}{1+k_2}$		1	
Proizvoljna oznaka modula	RM7 RM15	RM8 RM21	RM10 RM23	RM11 RM17	RM14 RM20	RM16 RM22
Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem, c_r	$\dfrac{1}{1+k_1}$		0.2÷0.9	1	0.2÷0.9	$\dfrac{1}{1+k_2}$

Da bi se izveli matematički izrazi za koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem (c_r), izvršena je analiza tokova snage svakog funkcionalnog modula. Pri tome je utvrđeno da izrazi za koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem imaju jednostavan matematički oblik za sve funkcionalne module osim za RM10, RM23, RM14 i RM20. Koeficijent c_r je funkcija unutrašnjih prenosnih odnosa, a za module gde je nosač satelita nepokretan, njegova vrednost jednaka je jedinici.

Za funkcionalne module RM10, RM23, RM14 i RM20 koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem osim od unutrašnjih prenosnih odnosa, zavisi i od broja zubaca satelita g_1 odnosno geometrije trougla $O_1O_2O_3$ (sl.4), tako da je konačni oblik njegovog analitičkog izraza u velikoj meri kompleksan. Zbog toga je, za ove funkcionalne module, pri određivanju koeficijenta c_r potrebno poznavati brojeve zubaca svih zupčanika. Analizom nekih realizovanih konstrukcija utvrđeno je da se vrednost koeficijenta c_r kreće u granicama od 0.2 do 0.9.

U tabeli 6 dati su analitički izrazi ili numeričke vrednosti koeficijenta c_r za osnovne i inverzne funkcionalne module.

Tokovi snage i analitički izrazi za snagu u ozubljenju, za tri razmatrana troredna funkcionalna modula dati su u tabeli 7.

Cirkulirajuća snaga se pojavljuje na modulima proizvoljne oznake TM1 i TM3, dok je na modulu TM2 prisutna samo efektivna snaga koja se grana na tri toka. Grananje efektivne snage na tri toka i nepostojanje cirkulirajuće snage doprinose da je funkcionalni modul TM2 znatno povoljniji u pogledu unutrašnjih opterećenja njegovih elemenata od modula TM1.

Izvedeni matematički obrasci za koeficijent c_r dati su u tabeli 8.

Analizom dobijenih izraza uočava se, da je koeficijent c_r funkcija tri promenljive (unutrašnjih prenosnih odnosa k_1, k_2 i k_3). Vrednosti ovih promenljivih za funkcionalne module TM2 i TM3 nalaze u granicama $k_{min} - k_{max}$, dok se za modul TM1 one moraju posebno odrediti. Definisanje vrednosti parametara k_1, k_2 i k_3 u ovom slučaju je uslovljeno ostvarivanjem realnih vrednosti ukupnog prenosnog odnosa i koeficijenta c_r. Analizom je utvrđeno da se vrednosti unutrašnjih prenosnih odnosa moraju nalaziti u sledećim granicama:

Tabela 7. Tokovi snage i snaga u ozubljenju trorednih funkcionalnih modula

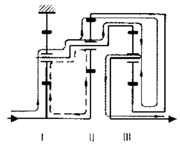
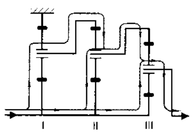
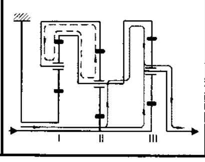
Proizv. oznaka modula	Tokovi snage	Snaga u ozubljenju		
		I pl. red	II pl. red	III pl. red
		$P'_{oz}=P''_{oz}$	$P'_{oz}=P''_{oz}$	$P'_{oz}=P''_{oz}$
TM1		$P_u\frac{(k_2k_3+k_2+1)\,k_1}{(k_2k_3+k_2-k_1)\,(1+k_1)}$	$P_u\frac{k_1}{k_2k_3+k_2-k_1}$	$P_u\frac{k_1k_3}{(k_2k_3+k_2-k_1)\,(1+k_3)}$
TM2		$P_u\frac{k_1k_2k_3}{[(1+k_1)(1+k_2)+(1+k_1+k_2)k_3](1+k_1)}$	$P_u\frac{k_1k_2k_3}{[(1+k_1)(1+k_2)+(1+k_1+k_2)k_3](1+k_2)}$	$P_u\frac{k_1k_2k_3^2}{[(1+k_1)(1+k_2)+(1+k_1+k_2)k_3](1+k_3)}$
TM3		$P_u\frac{k_1k_2k_3}{[(1+k_1)(1+k_3)+k_2](1+k_1+k_2)}$	$P_u\frac{k_2k_3\,(1+k_1+k_2)}{[(1+k_1)(1+k_3)+k_2](1+k_3)(1+k_1+k_2)}$	$P_u\frac{k_2k_3\,(1+k_1+k_2)}{[(1+k_1)(1+k_3)+k_2](1+k_3)(1+k_1+k_2)}$

Tabela 8. Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem za troredne funkcionalne modul

Proizvoljna oznaka modula	TM1	TM2	TM3
Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem, c_r	$\frac{2k_1k_3}{(k_2k_3+k_2-k_1)(1+k_3)}$	$\frac{2k_1k_2k_3^2(1+k_3)^{-1}}{(1+k_1)(1+k_2)+(1+k_1+k_2)k_3}$	$\frac{2k_2k_3\,(1+k_3)^{-1}}{(1+k_1)\,(1+k_3)+k_2}$

Tabela 9. Tokovi snage i snaga u ozubljenju funkcionalnih modula RAVIGNEAUX u kombinaciji

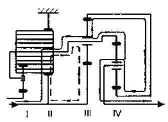
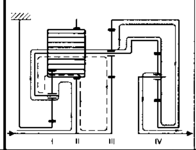
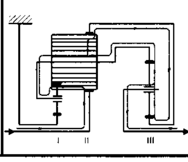
Proizv. oznaka modula	Tokovi snage	Snaga u ozubljenju				
		I pl. red	II pl. ed		III pl. red	IV pl. red
		P'_{oz}	P'_{oz}	P''_{oz}	$P'_{oz}=P''_{oz}$	$P'_{oz}=P''_{oz}$
RMK1		/	$P_u\frac{(k_3k_4+k_3+1)\,k_2}{(k_3k_4+k_3-k_2)(1+k_2)}$		$P_u\frac{k_2}{k_3k_4+k_3-k_2}$	$P_u\frac{k_2k_4}{(k_3k_4+k_3-k_2)(1+k_4)}$
RMK2		$P_u\frac{(k_3k_4+k_3+1)\,k_1}{(k_3k_4+k_3-k_1)(1+k_1)}$		/	$P_u\frac{k_1}{k_3k_4+k_3-k_1}$	$P_u\frac{k_1k_4}{(k_3k_4+k_3-k_1)(1+k_4)}$
RMK3		$P_u\frac{[k_2\,(1+k_3)-2k_1-1]\,k_1}{(k_2k_3+k_2-k_1)(1+k_1)}$	$P_u\frac{k_1}{1+k_1}$	$P_u\frac{k_1k_2}{k_2k_3+k_2-k_1}$	$P_u\frac{k_1k_3}{(k_2k_3+k_2-k_1)(1+k_3)}$	/

Tabela 10. Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem za funkcionalne module RAVIGNEAUX u kombinaciji

Proizvoljna oznaka modula	RMK1	RMK2	RMK3
Koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem, c_r	$\frac{2k_2k_4}{(k_3k_4+k_3-k_2)(1+k_4)}$	$\frac{2k_1k_4}{(k_3k_4+k_3-k_1)(1+k_4)}$	$\frac{2k_1k_3}{(k_2k_3+k_2-k_1)(1+k_3)}$

$$k_1\in\left\{k_{1\min},\min\left[\frac{k_2\,(1+k_3)^2}{1+3k_3},k_1\max\right]\right\} \tag{26}$$

$$k_2\in\left[k_{2\min},\ k_{2\max}\right] \tag{27}$$

$$k_3\in\left[k_{3\min},\ k_{3\max}\right] \tag{28}$$

Za funkcionalni modul tipa RAVIGNEAUX u kombinaciji sa jednorednim ili dvorednim funkcionalnim modulom, tokovi snage i izvedeni analitički izrazi za snagu u ozubljenju dati su u tabeli 9.

Sa aspekta vrednosti unutrašnjih opterećenja, najpovoljniji je modul oznake RMK3, jer se kod njega ne pojavljuje cirkulirajuća snaga. Osim toga, ovaj modul je i najkompaktniji jer sadrži samo tri planetarna reda.

Izvedeni analitički izrazi za koeficijent prenosa snage relativnim kretanjem dati su u tabeli 10.

Vrednosti unutrašnjih prenosnih odnosa za funkcionalne module RMK2 i RMK3 nalaze se u dijapazonu $k_{\min} - k_{\max}$, dok je za funkcionalni modul RMK1 vrednost prenosnih odnosa definisana izrazima (26, 27 i 28) s tim, što je u ovom slučaju indeks unutrašnjih prenosnih odnosa povećan za jedan u odnosu na indeks odgovarajućih prenosnih odnosa funkcionalnog modula TM1.

Zaključak

Projektovanje složenih planetarnih prenosnika snage znatno se pojednostavljuje primenom funkcionalnih modula. Jedan od osnovnih parametara funkcionalnih modula je stepen korisnosti. Pri određivanju njegove vrednosti potrebno je obuhvatiti što veći broj relevantnih parametara: unutrašnji prenosni odnosi planetarnih redova, opterećenje, raspodela radnih režima prenosnika, broj obrtaja, način podmazivanja, stanje radnih površina zubaca zupčanika, vrsta maziva i drugi. Postoji relativno mali broj metoda kojima su obuhvaćeni navedeni parametri, a neke od njih, kao što su Kornilajeva i Kombinovana, zahtevaju poznavanje vrednosti snage u ozubljenju. Određivanje vrednosti ove snage je relativno dug proces koji počinje sa utvrđivanjem tokova efektivne i cirkulirajuće snage u prenosniku (najčešće primenom neke od grafo-analitičkih metoda). Analizom dobijenih analitičkih izraza za snagu u ozubljenju funkcionalnih modula, zapaža se da njena vrednost zavisi od vrste funkcionalnog modula, vrednosti unutrašnjih prenosnih odnosa i ulazne snage. Vrednosti snage u ozubljenju se primenom izvedenih analitičkih izraza jednostavno određuju, i uzimaju se u postupku pri određivanju stepena korisnosti. Osim toga, utvrđivanjem tokova snage pojednostavljuje se određivanje opterećenja, a time i naprezanja elemenata planetarnog prenosnika.

Literatura

[1] PANTIĆ,M. *Gubici snage u ozubljenju kao parametar za formiranje optimalne kinematske šeme planetarnih prenosnika primenjenih u sistemu za prenos snage motornih vozila.* doktorska disertacija, Mašinski fakultet u Beogradu, 1997.

[2] PANTIĆ,M. Teorijsko definisanje i kinematička analiza funkcionalnih modula neophodnih u projektovanju složenih planetarnih prenosnika snage. *Naučnotehnički pregled,* 1998, vol.XLVIII, no.4, p.120.

[3] KRJUKOV,A.D., HARČENKO,A..P. *Vibor transmisij guseničnih i kolesnih mašin.* Mašinostroenie, Leningrad, 1963.

[4] KUDRJAVCEV,V,N. *Planetarnie i gidromehaničeskie peredoči kolesnih i guseničnih mašin.* Mašinostroenie, Moskva, 1966.

[5] NOSOV,N.A. *Rasčot i konstruirovanie guseničnih mašin.* Mašinostroenie, Leningrad, 1972.

[6] MACMILLAN,R.H. Power Flow and Loss in Differential Mechanisms. *Jnl. Mech. Eng. Science*, 1961, vol.3, no.1, p.120-128.

[7] PANTIĆ,M. *Analysis and Synthesis of Multiple Speed Transmissions of the Planetary Gear Type.* M. Sc. Thesis. Cranfield Institute of Technology, 1987.

Rad primljen: 19.10.2000.god.