UDK: 519.718(047)=861
COSATI: 14-07, 12-01

Neljapunovljeva stabilnost linearnih deskriptivnih sistema

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Dr Đura Koruga, dipl.inž.[1)]
Dr Stevan A. Milinković, dipl.inž.[2)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]

Razmatra se dinamika vremenski stacionarnih deskriptivnih linearnih sistema. Za ovu klasu sistema formulisan je, izveden i dokazan čitav niz teorema, koje u formi dovoljnih uslova, omogućavaju efikasno ispitivanje njihove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Ključne reči: **Deskriptivni sistemi, prostor stanja, linearna algebra, matrične metode, neljapunovljeva stabilnost.**

Uvod

DESKRIPTIVNI sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom diferencnih i algebarskih jednačina. Pitanja postojanja rešenja, njegove jedinstvenosti i određivanje fundamentalne matrice znatno otežava njihovu analizu i sintezu.

Ovi sistemi poznati su u literaturi kao deskriptor sistemi ili kao sistemi sa polustanjem i, konačno, kao sistemi dati u generalisanoj formi modela u prostoru stanja. Oni se prirodno pojavljuju u mnogim inženjerskim disciplinama i problemima, kao što su električna i magnetna kola, optimizacionim problemima, velikim sistemima i kao granični slučaj singularno-perturbovanih sistema. Prisutni su i u ekonomiji i demografiji, a najčešće se susreću kao diskretna forma kontinualnih singularnih sistema u situacijama kada je potreban njihov numerički tretman ili korišćenje cifarskih računara. Obiman pregled do sada postignutih rezultata na polju proučavanja ove klase sistema može da se nađe u dva broja poznatog časopisa *Circuit, Systems and Signal Processing* (1986, 1989), kao i u monografijama Debeljković et al. (1996, 1998.b).

U praksi je često od posebnog interesa, ne samo da se ispita stabilnost sistema po Ljapunovu, nego i da se utvrdi, što je od daleko većeg značaja, da li trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja dosežu ili ostaju unutar ranije propisanih granica. Sistem može da bude stabilan u smislu Ljapunova, a potpuno neupotrebljiv sa stanovišta njegovih pokazatelja prelaznog procesa. Tu se u prvom redu misli na nedozvoljeni preskok ili neprihvatljivo dugo vreme smirenja. Zbog toga je sasvim opravdano posmatrati kretanje sistema unutar unapred propisanih granica, koje mogu da se usvoje u obliku hipercilindara u prostoru stanja koji mogu da budu shvaćeni kao skupovi dozvoljenih stanja u kojima se sistem može zadesiti. Isti ti skupovi mogu da budu stacionarni ili vremenski promenljivi i potrebno je da budu unapred definisani. Pored toga, od posebnog je interesa da se i dinamičko ponašanje sistema posmatra na konačnom vremenskom intervalu.

Granice do kojih dostiže odziv sistema, bilo u slobodnom režimu, bilo u prinudnom radnom režimu, predstavljaju veoma značajan problem s inženjersko-tehničke tačke gledišta. Uvažavajući ovu činjenicu, pojavio se veliki broj definicija praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Ove definicije se zasnivaju na unapred određenim granicama dozvoljenih početnih stanja sistema, kao i na dozvoljenim granicama u kojima se očekuje kretanje razmatranog sistema. U inženjerskim primenama, ova činjenica dobija posebnu težinu, a nekada postaje i krucijalna, kada se, npr. radi o procenama kretanja sistema u prostoru stanja i neophodnosti uvođenja adekvatnog upravljanja. Samim tim, izučavanje koncepta neljapunovljeve stabilnosti predstavlja poseban izazov za svakog istraživača, posebno kod deskriptivnih sistema gde se ovakvi problemi izuzetno usložnjavaju, uvažavajući njihovu specifičnost.

Motivisani *kratkom diskusijom* praktične stabilnosti koja se pojavila u monografiji La Salle i Lefschet (1961), Weiss i Infante (1965, 1967) uveli su čitav niz definicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu vremenski kontinualnih sistema, a na vremenski invarijantnim skupovima.

Koncept stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu prvi su na diskretne sisteme primenili Michel i Wu (1969). Praktičnu stabilnost ili *stabilnost na skupovima*, kroz razmatranje i procenu kvantitativnog ponašanja trajektorija kretanja na konačnom vremenskom intervalu, dali su Heinen (1970), i Heinen i Wu (1971), koji su i prvi našli potrebne i dovoljne uslove ovog koncepta stabilnosti, koristeći prilaz sa pozicija Ljapunova i *diskretnih Ljapunovljevih funkcija.* Dalje proširenje ovih rezultata dao je Weiss (1972), razmatrajući različite aspekte praktične stabilnosti diskretnih sistema, kao i pitanja njihove realizacije i upravljivosti. Istu ovu problematiku Weiss i Lam (1973) su proširili na izučavanje složenih nelinearnih diskretnih sistema. Veoma efikasne, dovoljne uslove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu linearnih diskretnih sistema, izražene preko normi i/ili sopstvenih

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

vrednosti odgovarajućih matrica, dali su Weiss i Lee (1971). S druge strane, Lam i Weiss su primenili (1974), po prvi put, koncept tzv. *konačne stabilnosti* na diskretne sisteme čija se kretanja odvijaju unutar vremenski promenljivih skupova u prostoru stanja. Nekoliko jednostavnijih definicija vezanih za skupove koji predstavljaju diferencne jednačine, a samim tim i diskretne sisteme automatskog upravljanja, dali su Shanholt (1974). Grippo i Lampariello (1976) uopštili su sve prethodne rezultate i dali potrebne i dovoljne uslove različitih vidova praktične stabilnosti diskretnih sistema, inspirisani definicijama praktične stabilnosti i nestabilnosti koje je ranije uveo Heinen (1970). Isti autori primenili su prethodne rezultate u analizi tzv. *velikih sistema,* Grippo i Lampariello (1978).

Praktičnu stabilnost, sa unapred zadatim vremenom smirenja, razmatrao je, po prvi put , Debeljković (1979.a), a u vezi sa analizom različitih klasa *linearnih diskretnih sistema*, dovoljno opštih da uključe vremenski stacionarne i nestacionarne, autonomne, i sisteme u prinudnom radnom režimu, kao i sisteme čije je ponašanje iskazano kroz *funkcionalnu matricu sistema*. U pomenutom radu izvedeni su i dovoljni uslovi praktične nestabilnosti, kao i diskretna verzija poznate Bellman - Gronwallove leme. U preostalim radovima, Debeljković (1979.b, 1980.a, 1980.b.) bavi se sličnim problemima i parcijalno iznosi bazične rezultate rada, (1979.a). Za posebnu klasu vremenski diskretnih sistema, sa specifičnom strukturom funkcionalne matrice sistema, izvedeni su u radu autora Debeljkovića (1993), dovoljni uslovi praktične stabilnosti. I konačno, Bajić (1983) u svom radu sprovodi kvantitativnu analizu odziva jedne klase diskretnih, homogenih, nestacionarnih, bilinearnih sistema sa stacionarnim linearnim delom a na bazi koncepta praktične stabilnosti. Dobijeni rezultati omogućavaju utvrdjivanje granica do kojih doseže odziv razmatrane klase sistema.

Koncept praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu na klasu *linearnih deskriptivnih diskretnih sistema,* prvi su dali Debeljković, Djordjević (1985), Debeljković i Owens (1986), Debeljković (1986), i Owens i Debeljković (1986). Ljapunovljevu teoriju stabilnosti za diskretne deskriptivne sisteme prvi su dali Owens i Debeljković (1985) u formi *slabe matrične jednačine Ljapunova*, koja se u odredjenim slučajevima može iskoristiti u modifikovanom obliku čak i za ispitivanje neljapunovljeve stabilnosti ove klase sistema. Granice do kojih dosežu trajektorije i pitanje postojanja rešenja posebne klase diskretnih deskriptivnih sistema bili su predmet razmatranja u radu Dihovicni et al. (1996), a ti su rezultati kasnije znatno poboljšani u radu Bajić et al. (1998) gde su bile razmatrane i osobine robusnosti stabilnosti ovog koncepta za izučavanu klasu sistema. Dalje proširenje rezultata izloženo je u radu Debeljković et al. (1998.a), gde je u formi dovoljnih uslova prezentovan rezultat koji omogućava efikasnu proveru stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu *linearnih, stacionarnih diskretnih deskriptivnih sistema.*

U ovom kratkom pregledu pomenuti su samo rezultati vezani za različite klase vremenski diskretnih deskriptivnih sistema.

Ovom prilikom istražuje se problem dovoljnih uslova koji garantuju da će trajektorije autonomnog ili neautonomnog diskretnog deskriptivnog sistema ostati u unapred zadatom skupu stanja na konačnom vremenskom intervalu njegovog rada. Prema saznanjima autora, ovom problematikom, za ovu klasu sistema, do sada se niko nije bavio.

Oznake i preliminarni rezultati

Razmatraju se linearni, diskretni deskriptivni sistemi, kako u slobodnom:

$$E\mathbf{y}(k+1) = A\mathbf{y}(k), \quad (k = k_0, k_0+1, \ldots) \quad \mathbf{y}(k_0) = \mathbf{y}_0 \qquad (1)$$

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_1\mathbf{x}_1(k) + A_2\mathbf{x}_2(k) \qquad (2a)$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(k) + A_4\mathbf{x}_2(k) \qquad (2b)$$

tako i u prinudnom radnom režimu:

$$E\mathbf{x}(k+1) = A\mathbf{x}(k) + \mathbf{u}(k), \quad \mathbf{x}^*(k_0) = \mathbf{x}_0^* \qquad (3)$$

definisani na diskretnom vremenskom intervalu $\mathcal{K}=\{k \in \mathbf{N}: :k_0 \le k < k_0 + k_{kon}\}$, gde k_{kon} može biti prirodan broj ili simbol ∞, tako da se stabilnost na konačnom vremenskom intervalu i praktična stabilnost sledstveno, mogu razmatrati jednovremeno. Jasno je i da je $k_0 < k_{kon}$.

U (1), $\mathbf{y}(k) \in \mathbf{R}^n$ je deskriptivni vektor stanja sa matricama $E, A \in \mathbf{R}^{n\times n}$.

U jednačinama (2a - 2b), $\mathbf{x}_1(k) \in \mathbf{R}^{n_1}$ i $\mathbf{x}_2(k) \in \mathbf{R}^{n_2}$ su podvektori stanja, a matrice A_i, $i = 1,\ldots,4$ su definisane nad poljem realnih brojeva dimenzija $n_1 \times n_1$, $n_1 \times n_2$, $n_2 \times n_1$ i $n_2 \times n_2$ sledstveno.

Kako je sistem koji se razmatra *stacionaran*, dovoljno je da se razmatraju rešenja $\mathbf{x}$ samo kao funkcije tekućeg diskretnog trenutka k i početne vrednosti vektora stanja $\mathbf{y}_0$ ili $\mathbf{x}_0$ u trenutku k_0, za koji se smatra da je fiksiran, pa prema tome je $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0)$ ili, u skraćenoj notaciji, $\mathbf{x}(k)$. Vektori $\mathbf{y}_0$ i $\mathbf{x}_0$ su vektori konzistentnih početnih uslova koji generišu diskretnu sekvencu rešenja $(\mathrm{x}(k)$: $k \ge 0)$.

Označimo sa φ_I skup svih konzistentnih početnih vrednosti, koje se mogu dodeliti sistemu datom jed. (2a – 2b). Sa $\mathtt{M} \in \mathbf{R}^n$ označimo linearnu višestrukost određenu jed. (2b) kao:

$$\mathtt{M} = \{\mathbf{x}(k) \in \mathbf{R}^n : \ 0 = A_3\mathbf{x}_1(k) + A_4\mathbf{x}_2(k)\} \qquad (4)$$

Za sistem (2a – 2b), u opštem slučaju $\varphi_I \subseteq \mathtt{M}$, pa u tom smislu vektor konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0 = [\,\mathbf{x}_{10}^T\,\mathbf{x}_{20}^T\,]^T$ mora da zadovolji $A_3\mathbf{x}_{10} + A_4\mathbf{x}_{20} = \mathbf{0}$, ili u ekvivalentnoj notaciji:

$$\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \subseteq \mathtt{M} \equiv \aleph([A_3 \ \ A_4]) \qquad (5)$$

Međutim, ako se pokaže da je *uslov ranga* dat sledećom jednačinom:

$$\text{rang}\,[A_3 \ \ A_4] = \text{rang}\,A_4 \qquad (6)$$

zadovoljen, tada je očigledno, Bajić (1995), da je $\varphi_I = \mathtt{M} = =\aleph([A_3 \ \ A_4])$ i sračunavanje φ_I ne zahteva nikakva dopunska sračunavanja, sem svođenja singularnog sistema, datog jed. (1), na svoj kanonički oblik dat jed. (2a – 2b). Da bi se dokazalo prethodno izneto tvrđenje, pretpostavimo da je rang $A_4 = r < n_2$. Tada sledi da $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \ \ A_4])$, a kada je zadovoljena i jed. (6), tada je moguće $(n_1 + n_2 - r)$ komponenti vektora $\mathbf{x}_0$ izabrati proizvoljno, tako da $\mathbf{x}_0$ bude vektor konzistentnih početnih uslova za sistem dat jed. (2a – 2b). Naime, nešto preciznije, pošto je $0 \le r \le n_2$, tada je uvek moguće, iz. jed. (2b), izabrati ceo vektor $\mathbf{x}_1$, s obzirom da je $(n_2 - r)$ komponenti vektora $\mathbf{x}_2$ prepušteno slobodnom izboru.

Sa $\mathbf{x}_2^{n_2-r}$ označimo one komponente vektora $\mathbf{x}_2$ koje se mogu slobodno izabrati, a sa $\mathbf{x}_2^r$ one čiji je izbor uslovljen. Prema tome, može se napisati $\mathbf{x}_2^r = F_1\mathbf{x}_1 + F_2\mathbf{x}_2^{n_2-r}$, gde su matrice F_1 i F_2 odgovarajućih dimenzija.

Ako je rang $A_4 = r = n_2$, i ako je vektor $\mathbf{x}_1$ izabran proizvoljno, *tada ne postoji mogućnost* da se bilo koja komponenta vektora $\mathbf{x}_2$ usvoji proizvoljno. One su tada sve striktno određene, jer je $\mathbf{x}_2^r \equiv \mathbf{x}_2$, što povlači $\mathbf{x}_2 = F_1\mathbf{x}_1$, gde je $F_1 = -A_4^{-1}A_3$. U tom slučaju, sistem dat jed. (2a – 2b) svodi se na svoj oblik dat sa $\mathbf{x}_1(k+1) = (A_1 - A_2A_4^{-1}A_3)\mathbf{x}_1(k)$, sada reda $n_1 < n$, a jedinstvenost i postojanje njegovog rešenja *su zagarantovani.*

U slučaju kada je rang $A_4 = r < n_2$, uslov dat (6) pruža mogućnost da se $\mathbf{x}_2^r$ izrazi kao $\mathbf{x}_2^r = F_1\mathbf{x}_1 + F_2\mathbf{x}_2^{n_2-r}$. S obzirom na činjenicu da se $(n_2 - r)$ komponente vektora $\mathbf{x}_2^{n_2-r}$ mogu slobodno izabrati, najprirodnije je da se usvoji da su sve jednake nuli, tako da se dobija $\mathbf{x}_2^r = F_1\mathbf{x}_1$. Tada je $\mathbf{x}_2 = \begin{bmatrix} F_1\mathbf{x}_1 \\ 0 \end{bmatrix}$, a samim tim

$$\mathbf{x}_1(k+1) = A_1\mathbf{x}_1(k) + A_2\begin{bmatrix} F_1\mathbf{x}_1(k) \\ 0 \end{bmatrix} = A_0\mathbf{x}_1(k).$$

Međutim, u ovom slučaju jedinstvenost rešenja *nije zagarantovana*.

U oba slučaja sistem dat jednačinama (2a – 2b) može da se svede na odgovarajući sistem nižeg reda, sa kovektorom $\mathbf{x}_1(k)$ kao vektorom stanja celog sistema. Samim tim, postojanje rešenja sistema datog jednačinama (2a – 2b) zagarantovano je čim je *uslov ranga*, dat jednačinama (6), zadovoljen. Pošto je $\mathbf{x}_0$ proizvoljna tačka u prostoru $\aleph([A_3, A_4])$, tada je $\varphi_I = \mathrm{M} = \aleph([A_3 \;\; A_4])$. Međutim, kada je rang $A_4 < n_2$, jedinstvenost rešenja nije zagarantovana.

Vremenski nepromenljivi skupovi, uzeti kao granice do kojih dosežu trajektorije sistema, pri njegovom kretanju u prostoru stanja su otvoreni, povezani i ograničeni. Indeks β se koristi i označava sva dozvoljena stanja sistema, a indeks α označava sva dozvoljena početna stanja sistema, tako da važi: $S_\alpha \subseteq S_\beta$. S_ε označava skup svih dozvoljenih upravljanja. U opštem slučaju, može da se napiše:

$$S_\rho = \left\{\mathbf{x}(k) \in R^n : \|\mathbf{x}(k)\|_G^2 < \rho \;\;,\;\; \forall \mathbf{x}(k) \in W_q \setminus \{0\}\right\} \tag{7}$$

ili:

$$S_G(\rho) = \{\mathbf{x}(k) \in \boldsymbol{R}^n : \|\mathbf{x}(k)\|_G^2 < \rho\} \tag{8}$$

ili:

$$S_l(\rho) = \{\mathbf{x}(k) \in \boldsymbol{R}^n : \|\mathbf{x}_l(k)\|^2 < \rho\} \;\;,\;\; l = 1\;,2\ldots \tag{9}$$

gde je G realna, simetrična, pozitivno poluodređena matrica, a W_q potprostor konzistentnih početnih uslova.

Geometrijski prilaz određivanju konzistentnih početnih uslova dali su Owens, Debeljković (1985), određujući potprostor W_q kao graničnu vrednost rekurzivnog algoritma u prostoru stanja, tipa:

$$W_0 = \Re^n, \;\; W_{j+1} = A^{-1}(EW_j), \;\; j \ge 0 \tag{10}$$

gde $A^{-1}(\cdot)$ označava inverzni lik od $(\cdot)$ pri dejstvu operatora A. Campbell et al. (1976) su pokazali da potprostor W_q predstavlja skup vektora koji zadovaljavaju sledeću relaciju:

$$\left(I - \hat{E}^D\hat{E}\right)\mathbf{x}_0 = 0\;,\;\; W_q = \aleph\left(I - \hat{E}^D\hat{E}\right)\;, \tag{11}$$

gde je: $\hat{E} = (cE - A)^{-1}E$. c je bilo koji realni skalar takav da uslov:

$$\det(cE - A) \ne 0\;,\;\; W_q \cap \aleph(E) = \{0\} \tag{12}$$

garantuje jedinstvenost rešenja generisanih iz W_q. Nulti prostor matrice F označen je sa $\aleph(F)$, a gornji indeks "D" se koristi da se ukaže na Drazinovu inverziju. Kada je matrica F reda $n\times n$, tada matrica F^D označava Drazinovu inverziju sa sledećim osobinama:

$$FF^D = F^DF,\;\; F^DFF^D = F^D,\;\; F^DF^{k+1} = F^k \tag{13}$$

gde je k indeks matrice F definisan kao najmanji nenegativni ceo broj takav da važi:

$$rank\; F^{j+1} = rank\; F^j \tag{14}$$

Neka $|\mathbf{x}|_{(\cdot)}$ označava bilo koju vektorsku normu (tj.,= =1,2,∞) a $\|(\cdot)\|$ matričnu normu indukovanu tim vektorom. Ovde se koristi sledeća notacija: $|\mathbf{x}|_2 \overset{\Delta}{=} (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ a $\|(\cdot)\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}(A^*A)$. Gornji indeks $*$ i T označava konjugovanu transpoziciju i transpoziciju, sledstveno.

Da bi se podrobno i sveobuhvatno shvatila geneza i primena koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu na *diskretne singularne sisteme*, izlažu se neophodne definicije koje će se kasnije povezati sa odgovarajućim rezultatima, odnosno teoremama.

Prethodni rezultati

Definicije stabilnosti

Definicija 1. Sistem dat (1) *praktično je stabilan* u odnosu na $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ ako, i samo ako postoji $\mathbf{y}_0 \in W_q$, koji zadovoljava uslov:

$$\|\mathbf{y}_0\|_G^2 < \alpha \tag{15}$$

povlači da je:

$$\|\mathbf{y}(k)\|_G^2 < \beta\;,\;\; \forall k \in \mathrm{K} \tag{16}$$

(Debeljković, Owens (1986), Owens, Debeljković (1986)).

Definicija 2. Sistem dat jed. (1) *praktično je nestabilan* u odnosu na $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ ako, i samo ako postoji $\mathbf{y}_0 \in W_q$, koji zadovoljava uslov:

$$\|\mathbf{y}_0\|_G^2 < \alpha \tag{17}$$

i trenutak $k^* \in \mathcal{K}$, takav da je ispunjen uslov:

$$\|\mathbf{y}(k^*)\|_G^2 \ge \beta \tag{18}$$

Debeljković, Owens (1986), Owens, Debeljković (1986).

---

*) Date definicije mogu se u kondenzovanoj formi dati kao:

Definicija 1a. Sistem dat jed. (1) je $\{K, \alpha, \beta, G\}$ praktično stabilan ako $\mathbf{y}_0 \in W_q \cap S_G(\alpha)$ povlači $\mathbf{y}(k, \mathbf{y}_0) \in S_G(\beta)$ za $\forall k \in \mathcal{K}$.

Definicija 1b. Sistem dat jed. (1) je $\{K, \alpha, \beta, G\}$ praktično nestabilan ako postoji neko $y_0 \in W_q \cap S_G(\alpha)$, i neko rešenje $\mathbf{y}(\cdot, \mathbf{y}_0)$ takvo, da $\mathbf{y}(k^*, \mathbf{y}_0) \notin S_G(\alpha)$, za neko $k^* \in \mathcal{K}$.

Obe prethodne definicije date su u kontekstu moguće analize samo *regularnih* disktretnih singularnih sistema*⁾.

Da bi se obezbedio jednovremeni tretman kako *regularnih*, tako i *iregularnih diskretnih singularnih sistema*, uvode se sledeće definicije, analogne onima za kontinualne singularne sisteme, ranije date u radovima Bajić (1995), Debeljković et al. (1995).

Definicija 3. Rešenja sistema datog jed. (2a – 2b) su $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *ograničena* ako, i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_G(\alpha)$ povlači $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) \in S_G(\beta)$ za $\forall k \in \mathcal{K}$.

Definicija 4. Rešenje $\mathbf{x}$ sistema datog jed. (2a – 2b) je $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *neograničeno* ako, i samo ako za neko $\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_G(\alpha)$ postoji $\mathbf{x}(k^*, \mathbf{x}_0) \notin S_G(\beta)$ za neko $k^* \in \mathcal{K}$.

U prethodnim definicijama matrica G može uzeti bilo koju specifičnu formu. Tako je npr., najprirodnije uzeti $G=E^THE$, gde je H neka realna simetrična, pozitivno određena matrica, tako da je $\|\mathbf{x}(k)\|_G = \sqrt{\mathbf{x}^T(k)G\mathbf{x}(k)}$ norma na W_q.

Uvažavajući specifičnu strukturu matrice E, pogodno je prethodne dve definicije blago preformulisati na sledeći način.

Definicija 5. Rešenja sistema datog jed. (2a – 2b) su $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *ograničena* ako, i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_2/\beta_1)$ povlači $\mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) \in S_1(\beta_1) \cap S_2(\beta_2)$ za $\forall k \in \mathcal{K}$.

Definicija 6. Rešenje $\mathbf{x}$ sistema datog jednačinama (2a–2b) je $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *neograničeno* ako, i samo ako za neko $\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_2/\beta_1)$ postoji diskretni trenutak $k^* \in \mathcal{K}$ takav, da $\mathbf{x}(k^*, \mathbf{x}_0) \notin S_1(\beta_1) \cap S_2(\beta_2)$.

Definicija 7. Rešenja sisteme datog (3) su $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, \varepsilon\}$, $\alpha < \beta$, *praktično stabilna* ako, i samo ako $\mathbf{x}_0^* \in W_q \cap S_\alpha$ povlači $\mathbf{x}(k_0, \mathbf{x}_0^*) \in S_\beta$ za $\forall k \in \mathcal{K}$ sve dokle god $\hat{\mathbf{u}}(j) \in S_\varepsilon$ za $\forall j = 0, 1, \ldots, k-1$, gde je $\hat{\mathbf{u}}(i) = (cE - A)^{-1}\mathbf{u}(i)$, a $c \in \mathbb{R}$ tako da je matrični par (E, A) *regularan*.

Definicije od 1 - 7 mogu se dobiti kao posebni slučajevi opšteg generičkog koncepta stabilnosti, datog u Bajić (1992.b).

Pre prelaska na formulaciju i dokaze neophodnih teorema, daje se kratka rekapitulacija jednog važnog rezultata iz teorije kvadratnih formi.

Stav 1. Ako je $\mathbf{x}^T(k)R\mathbf{x}(k)$ kvadratna forma na $\boldsymbol{R}^n$, tad postoje brojevi $\lambda(R)$ i $\Lambda(R)$ koji zadovoljavaju relaciju $-\infty < \lambda(R) \leq \Lambda(R) < +\infty$, tako da:

$$\lambda(R) \leq \frac{\mathbf{x}^T(k)R\mathbf{x}(k)}{V(\mathbf{x}(k))} \leq \Lambda(R), \quad \forall \mathbf{x}(k) \in W_q \setminus \{0\} \tag{19}$$

sa matricom $R = R^T > 0$**⁾ i sopstvenim vrednostima:

$$\begin{aligned}&\lambda(R,G,W_q) = \\ &= \min\left\{\mathbf{x}^T(k)R\mathbf{x}(k) : \mathbf{x}(k) \in W_q \setminus \{\boldsymbol{0}\}, \mathbf{x}^T(k)G\mathbf{x}(k) = 1\right\}\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}&\Lambda(R,G,W_q) = \\ &= \max\left\{\mathbf{x}^T(k)R\mathbf{x}(k) : \mathbf{x}(k) \in W_q \setminus \{\boldsymbol{0}\},\ \mathbf{x}^T(k)G\mathbf{x}(k) = 1\right\}\end{aligned} \tag{21}$$

Matrica G se bira tako, da se uzmu u obzir moguća fizička ograničenja nametnuta veličinama stanja i budućoj sekvenci rešenja ($\mathbf{x}(k)$: $k \geq 0$). Najprirodniji njen izbor za ovu klasu problema je $G = E^THE$, kao što je već ranije bilo spomenuto.

Uslovi stabilnosti

Teorema 1. Sistem dat (1), *praktično je stabilan* u odnosu na $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\Lambda^k(A^THA, G, W_q) \leq \beta/\alpha, \quad \forall k \in \mathcal{K} \tag{22}$$

gde je $\Lambda(\cdot)$ definisano sa (21).

Teorema 2. Sistem dat jed. (1), *praktično je nestabilan* u odnosu na $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ ako postoji pozitivan skalar $\delta \in]0, \alpha[$ i diskretni trenutak $k^* \in \mathcal{K}$ ($k^* > k_0$) takav da je zadovoljena sledeća nejednačina:

$$\lambda^{k^*}(A^THA, G, W_q) > \beta/\delta \tag{23}$$

gde je $\lambda(\cdot)$ definisano jed. (20).

Prethodne teoreme izvorno su bile date u radu Debeljković, Owens (1986), a kasnije u radu Owens, Debeljković (1986), blago preformulisane i stilski doterane, pa se stoga njihov dokaz izostavlja.

Mimo koncepta praktične stabilnosti, od posebnog je značaja i *domen praktične stabilnosti*, imajući u vidu da singularni sistemi mogu imati jedno ili više rešenja. Samim tim, jasno je da, ako su *sva rešenja* koja polaze iz skupa tačaka $\varphi_I \cap S_G(\alpha)$ $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *ograničena*, tada je i razmatrani sistem $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *praktično stabilan*. S druge strane, ukoliko postoji *bar jedno* rešenje koje je $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *neograničeno*, tada je i razmatrani sistem $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *praktično nestabilan*.

Prethodna razmatranja, a i ona koja slede, u osnovi izlažu rezultate date u radu Bajić et al. (1998).

Ako se vratimo pitanju *potencijalnog domena praktične stabilnosti*, onda je prikladno iskoristiti i atribut "*slabi*" domen, jer je jasno da se za svako $\mathbf{y}(k_0)$ ili $\mathbf{x}(k_0)$ uzeto iz tog domena, ne može garantovati zahtevana osobina sistema u pogledu njegove *praktične stabilnosti*. U tom smislu, moguće je samo za svako $\mathbf{y}(k_0)$ ili $\mathbf{x}(k_0)$ iz tog domena garantovati postojanje *bar jednog rešenja* sa specifičnom karakterizacijom u svetlu *praktične stabilnosti*.

Potencijalni (slabi) domen $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *praktične stabilnosti sistema*, datog jed. (2a – 2b), definisaće se na sledeći način:

$$\begin{aligned}\mathsf{P} = \{&\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_G(\alpha): \\ &(\exists \mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}_0)),\ (\forall k \in \mathcal{K}),\ \mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) \in S_G(\beta)\}\end{aligned} \tag{24}$$

Na analogni način definisaće se i *potencijalni* (*slabi*) *domen* $\{\mathrm{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *praktične stabilnosti* istog sistema kao:

$$\mathsf{A} = \left\{\begin{array}{c}\mathbf{x}_0 \in \varphi_I \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_2/\beta_1) \\ (\exists \mathbf{x}(\cdot, \mathbf{x}_0))(\forall k \in \mathrm{K}\ )\ \mathbf{x}(k, \mathbf{x}_0) \in S_1(\beta_1) \cap S_2(\beta_2)\end{array}\right\} \tag{25}$$

Kao osnovni zadatak nameće se procena (estimacija) definisanih domena. U tu svrhu, iskoristiće se *Ljapunovljeva direktna metoda*, a ocene traženih domena biće označene sa: $\mathrm{P}_e \subseteq \mathrm{P}$ i $\mathrm{A}_e \subseteq \mathrm{A}$. Valja napomenuti da se u ovim razmatranjima neće zahtevati regularnost matričnog

**⁾ Skraćena oznaka za realnu simetričnu pozitivno određenu matricu para (E, A).

Razmatranja postojanja specifičnih ograničenih rešenja razmatranog diskretnog singularnog sistema, jednačinama (2a – 2b) baziraju se na sledećim zaključcima.

– Rešenja sistema datog jednačinama (2a – 2b) moraju da pripadaju skupu:

$$\mathbf{x}(k_0, \mathbf{x}_0) \in \aleph\left([L \quad -I_{n_2}]\right) \tag{26}$$

Ako uz zadovoljen uslov ranga, (27),

$$\text{rang}\,[A_3 \quad A_4] = \text{rang}\,A_4 \tag{27}$$

postoje i rešenja sistema datog jednačinama (2a – 2b) koja zadovoljavaju i (28):

$$\mathbf{x}_2(k) = L\mathbf{x}_1(k)\ ,k \in \mathcal{K} \tag{28}$$

a dokazana je njihova $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *ograničenost*, tada se *potencijalni domen* $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, G\}$ *praktične stabilnosti* sistema datog jed. (2a – 2b), može oceniti na osnovu:

$$\mathsf{P}_e = \left\{\mathbf{x}(k) \in \boldsymbol{R}^n : \mathbf{x}(k) \in S_G(\alpha) \cap \aleph([L - I_{n_2}])\subseteq \mathsf{P}\right. \tag{29}$$

Poslednja izneta činjenica biće iskorišćena u jednoj od narednih teorema.

Za sistem dat jednačinama (2a–2b), Ljapunovljeva funkcija može da se izrazi kao:

$$V(\mathbf{x}(k)) = \mathbf{x}_1^T(k) H\, \mathbf{x}_1(k) \tag{30}$$

gde je $H = H^T > 0$ matrica. Izraz:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = V(\mathbf{x}(k+1)) - \rho V(\mathbf{x}(k)) \tag{31}$$

gde je $\rho \in \boldsymbol{R}$, sračunat duž kretanja sistema datog jed. (2a – – 2b) je:

$$\Delta V(\mathbf{x}(k)) = \kappa_{11} + \kappa_{12} + \kappa_{21} + \kappa_{22} - \rho\, \mathbf{x}_1^T(k) H \mathbf{x}_1(k) \tag{32}$$

gde su:

$$\kappa_{ij} = \boldsymbol{x}_i^T(k) A_i^T H A_j \mathbf{x}_j(k)\ , \quad (i,\ j) = 1,\ 2 \tag{33}$$

Povezujući jednačine (28) i (32), dobija se:

$$\begin{aligned} &\Delta V(\mathbf{x}(k)) = \\ &= \mathbf{x}_1^T(k)\left((A_1 + A_2 L)^T H (A_1 + A_2 L\right)\mathbf{x}_1(k) - \rho \mathbf{x}_1^T(k) H \mathbf{x}_1(k) \\ &= \mathbf{x}_1^T(k) Z \mathbf{x}_1(k) \end{aligned} \tag{34}$$

gde je:

$$Z = (A_1 + A_2 L)^T H (A_1 + A_1 L) - \rho H \tag{35}$$

Valja zapaziti da je Z realna simetrična matrica. Sa $\overline{\lambda}(\cdot)$ i $\overline{\Lambda}(\cdot)$ označimo minimalnu, odnosno maksimalnu sopstvenu vrednost realne simetrične matrice $(\cdot)$. Sada je moguće dati prvi osnovni rezultat.

Teorema 3. Neka je zadovoljen *uslov ranga*, (27). Neka je H realna, simetrična, pozitivno određena matrica. Ako je L bilo koja realna matrica koja zadovoljava jed. (36):

$$0 = A_3 + A_4 L \tag{36}$$

tada sistem dat jednačinama (2a–2b) ima rešenja koja su $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *ograničena*, pri $\alpha \leq \beta_1$, ako su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) Matrica Z izdata (35) je negativno poluodređena matrica,

(ii) $\rho^k \Lambda(H) \cdot \alpha / \lambda(H) < \beta_1, \ \forall k \in \mathsf{K}$ (37)

(iii) $\| L \|^2 \leq \beta_2 / \beta_1$ (38)

Teorema 4. Neka je zadovoljen *uslov ranga*, jed. (27) i neka je H realna, simetrična, pozitivno određena matrica. Tada sistem dat jed. (2a – 2b) ima rešenja koja su $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ *neograničena*, pri $\alpha \leq \beta_1$, ako postoji realan pozitivan broj $\delta \in\ ]\ 0, \alpha\ [$ i diskretni trenutak $k^* \in \mathcal{K}$ takav, da su zadovoljeni sledeći uslovi:

(i) Matrica Z (35) je pozitivno poluodređena matrica,

(ii) $\rho^{k^*} \geq \beta_1 \Lambda(H) / (\delta \cdot \lambda(H))$. (39)

Teorema 5. Neka zu zadovoljeni svi uslovi Teoreme 4. Tada je procena $\mathbb{A}_e$ potencijalnog domena $\mathcal{A}\{\mathcal{K}, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ praktične stabilnosti sistema, datog jednačinama (2a–2b), određena sa:

$$\mathcal{A}_e = \aleph([L - I_{n_2}]) \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_2 / \beta_1) \tag{40}$$

gde je $\mathcal{A}$ dato jed. (25).

Glavni rezultati

Teorema 6. Sistem (3) *praktično je stabilan* u odnosu na $\{\mathcal{K}, \alpha, \beta, \varepsilon\}$, $\alpha < \beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\| \Phi^k \| \cdot \| \Gamma \| + \varepsilon_0 \| \hat{E}^D \| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \| \Phi^{k-j-1} \| < \beta / \alpha \tag{41}$$

gde je:

$$\Phi = \hat{E}^D \hat{A}, \ \ \Gamma = \hat{E}\hat{E}^D, \ \ \varepsilon_0 = \varepsilon / \alpha \tag{42}$$

Dokaz: Opšte rešenje deskriptivnog sistema, datog u (3), u prinudnom radnom režimu pri $(k \geq 1)$ je:

$$\begin{aligned} \mathbf{x}(k) &= (\widehat{E}^D \widehat{A})^k \widehat{E}\widehat{E}^D \mathbf{x}_0 + \widehat{E}^D \sum_{j=0}^{k-1} (\widehat{E}^D \widehat{A})^{k-j-1} \hat{\mathbf{u}}(j) - \\ &-(I - \widehat{E}\widehat{E}^D) \sum_{j=0}^{p-1} (\widehat{E}\widehat{E}^D) \widehat{A}^D \hat{\mathbf{u}}(k+j) \end{aligned} \tag{43}$$

Vektor pripada potprostoru konzistentnih početnih uslova ako, i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \left\{\widehat{w} + \Re(\widehat{E}^k)\right\}$, gde je $\widehat{\mathsf{W}}$ poslednji sabirak u jed. (43). Štaviše, rešenje dato jed. (43) nezavisno je od izbora λ.

Pretpostavimo da vektor upravljanja zadovoljava sledeći uslov:

$$\mathbf{u}(k + j) \equiv 0, \quad \forall j = 0,1,2,...,p, \ \ \forall k \in \mathcal{K} \tag{44}$$

Primenjujući operaciju normiranje obe strane jed. (43), dobija se:

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq \left\|\Phi^k\right\| \cdot \|\Gamma\| \cdot \|\mathbf{x}_0\| + \left\|\widehat{E}^D\right\| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left\|\Phi^{k-j-1}\right\| \cdot \|\mathbf{u}(j)\| \tag{45}$$

odnosno, koristeći uslove date **Definicijom 7** dobija se:

$$\|\mathbf{x}(k)\| \leq \left\|\Phi^k\right\| \cdot \|\Gamma\| \cdot \alpha + \varepsilon \left\|\widehat{E}^D\right\| \cdot \sum_{j=0}^{k-1} \left\|\Phi^{k-j-1}\right\|. \tag{46}$$

Primenjujući bazične uslove ove **Teoreme**, dobija se konačno:

$$\|\mathbf{x}(k)\| < a, \quad \forall k \in \mathcal{K} \tag{46}$$

što je trebalo i pokazati.

Teorema 7. Autonomni sistem dat jed. (3) praktično je stabilan u odnosu na $\{K, \alpha, \beta\}$, $\alpha < \beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\|\Phi^k\| \cdot \|\Gamma\| < \beta/\alpha, \qquad \forall k \in \mathcal{K} \tag{47}$$

gde su matrice Φ i Γ date jed. (42).

Dokaz: Sledi direktno iz prethodne Teoreme ako se stavi $\varepsilon = 0$.

Zaključak

U radu su prezentovani originalni rezultati, koji u formi dovoljnih uslova omogućavaju efikasno ispitivanje dinamičkog ponašanja linearnih, stacionarnih, deskriptivnih sistema na konačnom vremenskom intervalu. Pored toga, za iregularnu klasu ovih sistema formulisan je i određen je slabi domen praktične stabilnosti na bazi kojega je moguće utvrditi podskup rešenja koje karakteriše pozitivna neljapunovljeva osobina.

Literatura

[1] BAJIĆ,V.O. Practical Stability of Discrete Homogenous Bilinear Systems. *Tehnika*, **32** (1) (1983) 131–132.

[2] BAJIĆ,V.B. Generic Stability and Boundedness of Semistate Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **5** (2) (1988) 103–115.

[3] BAJIĆ,V.B. *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*. SACAN, Link Hills, RSA, 1992.

[4] BAJIĆ,V.B. *Existence of Practically Stable Solutions of Singular Linear Systems*. Technical Report TR95-02, Control Laboratory, Technikon, Natal, RSA, 1995.

[5] BAJIĆ,V.B., DEBELJKOVIĆ,LJ.D., BOGIĆEVIĆ,B. i dr. Non-Lyapunov Stability Robustness Consideration for Discrete Descriptor Linear Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (2) (1998) 105 - 115.

[6] *Circuits, Systems and Signal Processing*, ***Special Issue on Semistate Systems, 5*** (1) (1986).

[7] *Circuits, Systems and Signal Processing*, ***Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, 8*** (3) (1989).

[8] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Synthesis of Discrete Automatic Control on Finite Time Interval* (in Serbian), Ph.D. Thesis, Mechanical Eng. Dept., University of Belgrade, Belgrade, July, 1979.a.

[9] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema. *Tehnika* (Yu), No.10 (1979.b) 19–23.

[10] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Praktična stabilnost sa vremenom smirenja vremenski diskretnih sistema u slobodnom i prinudnom radnom režimu. *Tehnika* (Yu), No.1 (1980.a) 13–20.

[11] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Prilog proučavanju praktične nestabilnosti vremenski diskretnih sistema. *Tehnika* (Yu), No.2 (1980.b) 7–11.

[12] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Further Results in Finite Time Stability. *Proc. MELECON 83*, Athens (Greece), (1983) 475–478.

[13] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., DJORDJEVIC,A.D. *Finite-Time Stability of Linear Singular Discrete Systems*. Proc. Conf. On Modelling and Simulation, Monastir (Tunissia), November 85, (1985) 20 - 34.

[14] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Finite-Time Stability of Linear Descriptor Systems.* Proc. IMACS/IFORS, Lille, France (1986.) 57–61.

[15] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., OWENS,D.H. *On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems.* Proc. EUROCON Conference, Paris (France), April (1986.), 406–409.

[16] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GAJIĆ,Z. *Further Results in Non-Lyapunov Stability and Unstability of Regular and Irregular Generalized State Space Systems.* Proc. 4th Conference SAUM, Kragujevac, Yugoslavia, June (1992), 316–333.

[17] DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Praktična stabilnost jedne klase vremenski diskretnih sistema.* Saopštenja MF (Yu), No. 1 (1993) 37–42.

[18] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GAJIĆ,Z. i dr. *Boundedness and Existence of Solutions of Regular and Irregular Singular Systems.* Publications of Faculty of Electrical Eng. Series: Automatic Control, Belgrade (YU), (1) (1993) 69–78.

[19] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GRGIĆ,A.U. i dr. *Non-Lyapunov Stability and Instability Robustness Consideration for Linear Singular Systems.* Proc. ECC95, Roma (Italy), (1995) 3702–3707.

[20] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A, JOVANOVIĆ,M.B. *Kontinualni singularni sistemi automatskog upravljanja.* GIP Kultura, Beograd, 1986.

[21] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANOVIĆ,M.R. Non-Lyapunov stability consideration of linear descriptor systems operating under perturbing forces. *AMSE – Advances in Modeling and Analysis,* (France), Part: C, vol.49, no.1 – 2, (1997.a) 1 –8.

[22] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. i dr. Praktična stabilnost vremenski diskretnih linearnih singularnih sistema", *DIT* (Yu), **III** (8-9) (1997.b) 51–58.

[23] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., ERIĆ T. N. i dr. A Lyapunov Analysis of Stability Robustness for Discrete Linear Descriptor Systems", *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, **15** (1) (1998.a) 53–62.

[24] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A. i dr. *Diskretni singularni sistemi autopmatskog upravljanja.* GIP Kultura, Beograd, 1998.b.

[25] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., KORUGA,Đ., MILINKOVIĆ,S.A. i dr. *Finite Time Stability of Linear Discrete Descriptor Systems.* Proc. MELECON 98, Tel-Aviv (Izrael) (1998.c) 509–512.

[26] DIHOVIČNI,N., BOGIČEVIĆ,B.B., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. i dr. *Boudedness and existence of solutions of regular and irregular discrete descriptor linear systems.* Proc. ITHURS 96, Leon (Spain), July 5 -7 1996., pp. 373 - 378.

[27] GRIPPO,L., LAMPARIELLO,F. Practical Stability of Discrete-Time Systems. *J. Franklin Inst.*, **302** (3) (1976) 213–224.

[28] GRIPPO,L., LAMPARIELLO,F. Practical Stability of Large-Scale Discrete-Time Systems. *Int. J. Syst. Sci.*, **9** (11) (1978) 1235–1246.

[29] HEINEN,J.A. Quantitative Stability of Discrete Systems. *Michigan Math. Journal*, (17) (1970) 211–215

[30] HEINEN,J.A., WU,S. H. Set Stability of Differential Equations. *Int. J. Syst. Sci*., **1** (3) (1971) 269–277.

[31] MICHEL,A.N., WU,S.H. Stability of Discrete Systems over a Finite Interval of Time. *Int. J. Control*, **9** (6) (1969) 679–693.

[32] LAM,L., WEISS,L. (1974). Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets. *J. Franklin Inst*., **9**, 415–421.

[33] LA SALLE, LEFSCHET,S. *Stability by Lyapunov's Direct Method*. Academic Press, New York, 1961.

[34] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Consistency and Liapunov stability of linear descriptor systems: a Geometric analysis. *IMA, Journal of Math. Control and Information,* 1985. no.2, p.139-151.

[35] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems*. Proc. 25th Conference on Decision and Control, Athens, Greece (1986) 2138–2139.

[36] SHANHOLT,G. Set Stability for Difference Equations, *Int. J. Control*, **10** (2) (1974) 309–314.

[37] WEISS,L. Controllability, Realization and Stability of Discrete-Time Systems. *SIAM J. Control*, **10** (2) (1972) 230–251.

[38] WEISS,L., INFANTE,E. F. On the Stability of Systems Defined over a Finite Time Interval. *Proc. National Acad. Sci*., **54** (1965) 44–48.

[39] WEISS,L., INFANTE,E.F. Finite Time Stability under Perturbing Forces and on a Product Spaces. *IEEE Trans. Automat. Cont*., **AC-12** (1967) 54–59.

[40] WEISS,L., LAM,L. Stability of Non-Linear Discrete-Time Systems. *Int. J. Control*, **17** (3) (1973) 465–470.

[41] WEISS,L., LEE,J.S. Finite Time Stability of Linear Discrete-Time Systems", *Avt. Telem*., (12) (1971) 63–68.

Rad primljen: 19.9.2000.god.