

Numerički način sinteze planetarnih prenosnika sa dva stepena slobode

Dr Mladen Pantić, dipl.inž.¹⁾

Prikazana je analiza dijagrama ugaonih brzina planetarnog prenosnika, kao i osnove formiranog numeričkog načina za sintezu složenih planetarnih prenosnika sa dva stepena slobode. Opisan je softver za numeričku sintezu i razmotreni su rezultati njegove primene na planetarnom menjaču sa četiri stepena prenosa.

Ključne reči: Planetarni prenosnik, stepen prenosa, ugaona brzina, sinteza.

Uvod

OSNOVNA komponenta složenog planetarnog prenosnika je planetarni red koji poseduje tri osnovna elementa i ima dva stepena slobode. Planetarni prenosnik se formira tako što se neki elementi planetarnih redova povezuju sa elementima drugih planetarnih redova.

Da bi se obezbedio zahtevani broj stepena prenosa sa prenosnim odnosima, čije se vrednosti razlikuju od nule a nisu ni beskonačno velike, složeni planetarni prenosnik (menjač) mora da sadrži upravljačke elemente, ulazni i izlazni element. Broj planetarnih redova prenosnika jednak je broju prenosnih odnosa. Da bi se smanjila složenost konstrukcije takvog menjača i istovremeno obezbedio zahtevani broj prenosnih odnosa, uvodi se prenosni odnos čija je vrednost jedan. Ovo se ostvaruje spajanjem bilo koja dva osnovna elementa. U tom slučaju broj planetarnih redova je za jedan manji od broja prenosnih odnosa. U teoriji planetarnih prenosnika najvažnije je formiranje njihovih kinematskih šema. Pomoću sinteze određuju se karakteristike planetarnih redova i način na koji će se osnovni elementi međusobno povezati (formiranje kinematskih šema).

Za sintezu planetarnih prenosnika obično se koriste geometrijske i geometrijsko-analitičke metode. Karakteristike ovih metoda su da je njihova procedura duga i da se ne mogu do kraja izvršiti potpune analize. Da bi se prevazišli nedostaci navedenih metoda, formiran je numerički način sinteze.

Pre formiranja numeričkog načina sinteze planetarnih prenosnika sa dva stepena slobode, potrebno je da se izvrši analiza osnovnih karakteristika njihovih dijagrama ugaonih brzina.

Dijagram ugaonih brzina

Odnos između ugaonih brzina ulaznog i izlaznog elementa i blokirajućeg elementa planetarnog prenosnika dat je sledećom jednačinom [1]:

$$(1 - i_{ox})\omega = \omega_o - i_{ox}\omega_x \quad (1)$$

gde su:

ω - ugaona brzina blokirajućeg elementa,

ω_o - ugaona brzina ulaznog elementa,

ω_x - ugaona brzina izlaznog elementa i

i_{ox} - količnik ulazne i izlazne brzine.

Sređivanjem (1) i usvajanjem da je $\omega_o = 1$, dobija se sledeća formula:

$$\omega = \frac{i_{ox}}{i_{ox} - 1}\omega_x - \frac{1}{i_{ox} - 1} \quad (2)$$

Izraz (2) opisuje odnos između ugaone brzine blokirajućeg elementa i ugaone brzine izlaznog elementa. Ova jednačina je linearna i u koordinatnom sistemu $\omega O\omega_x$ grafički je prikazana pravom linijom.

Dijagram ugaonih brzina formira se u $\omega O\omega_x$ koordinatnom sistemu. Ugaona brzina blokirajućeg elementa je funkcija izlazne ugaone brzine. Ova tvrdnja matematički se izražava na sledeći način:

$$\omega = \omega_l = f(\omega_x) \quad (3)$$

gde je: $l = 1, 2, 3, \dots, -1$ (elementi planetarnog prenosnika).

Jedna od karakteristika planetarnih prenosnika je njihovo blokiranje. Takav način rada (nastaje kada se bilo koja dva osnovna člana planetarnog prenosnika međusobno spoje) pruža stalnu opciju za ostvarivanje direktnog prenosnog odnosa, a matematički se izražava na sledeći način:

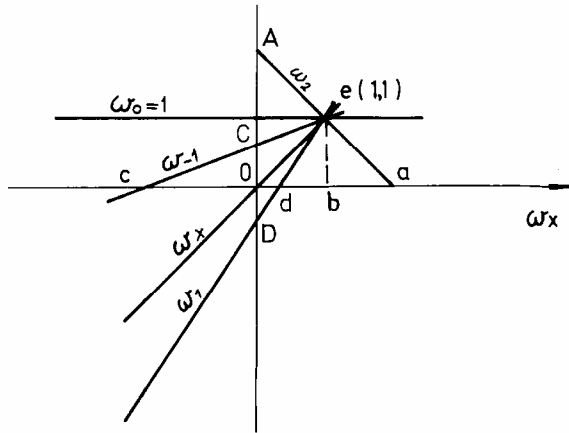
$$\omega_l = \omega = \omega_x = \omega_o = 1 \quad (4)$$

Zapaža se da svaka prava $\omega = f(\omega_x)$ prolazi kroz tzv. jediničnu tačku (tačka e na sl.1) u odabranom koordinatnom sistemu $\omega O\omega_x$.

Iz (2) se zapaža da ako se blokirajući element fiksira ($\omega=0$), izlazna brzina je $\omega_x=1/i_{ox}$ (tačka a za slučaj kada je $\omega=\omega_2$, tačka c za slučaj kada je $\omega = \omega_{-1}$, tačka d za slučaj kada je $\omega=\omega_1$). Za slučaj kada je $\omega_x = 0$ ugaona brzina blokirajućeg elementa iznosi $\omega=1/(1-i_{ox})$ (odgovarajuće tačke A, C, D). Može da se zaključi da prava $\omega=f(\omega_x)$ ima

¹⁾ Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

vrednost $l/(l-i_{ox})$ na ordinati i $1/i_{ox}$ na apscisi.



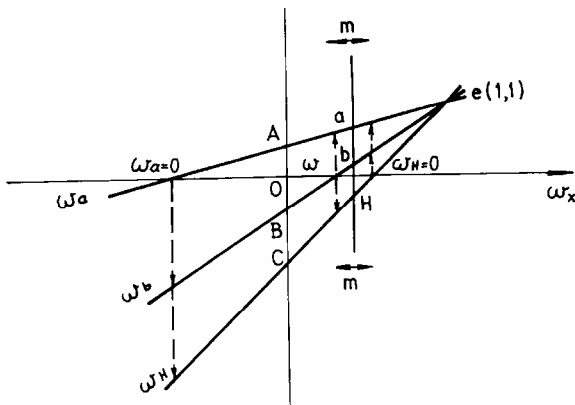
Slika 1. Dijagram ugaonih brzina planetarnog prenosnika

Formiranje dijagrama ugaonih brzina prikazano je na sl.1. Linija $\omega=\omega_1$ predstavlja odnos između ugaone brzine blokirajućeg elementa u prvom stepenu prenosa i ugaone brzine izlaznog elementa. Takođe, postoje prave $\omega=\omega_2$ (vrednost najvišeg stepena prenosa je manja od jedan), $\omega=\omega_{-1}$ (stepen prenosa za hod unazad i $\omega=\omega_x$ (direktni stepen prenosa).

Pomoću dijagrama ugaonih brzina određuju se mogući prenosni odnosi planetarnog prenosnika i ugaone brzine njegovih elemenata za te prenosne odnose. Znači, tačka c ($1/i_{ox}^{-1}, 0$) je izlazna ugaona brzina koja odgovara stepenu prenosa za hod unazad, tačke a ($1/i_{ox}^2, 0$) i d ($1/i_{ox}^1, 0$) odgovaraju stepenu prenosa kod koga je prenosni odnos manji od jedan, odnosno prvom stepenu prenosa. Tačka b odgovara radu blokiranog prenosnika.

Maksimalne ugaone brzine blokirajućih elemenata ne zavise od šeme planetarnog prenosnika već od datih vrednosti prenosnih odnosa. Povećanje ili smanjenje ugaonih brzina može da se ostvari jedino promenom prenosnih odnosa.

Osnovni prenosni odnos planetarnog reda može da se odredi jednostavno pomoću dijagrama ugaonih brzina. Dijagram ugaonih brzina elemenata, obeleženih oznakama a, H i b , prikazan je na sl.2.



Slika 2. Dijagram ugaonih brzina planetarnog reda

Količnik rastojanja \overline{Ha} i \overline{Hb} je konstantan i ne zavisi od položaja vertikalne linije mm (sl.2) i može da se analitički prikaže sledećim relacijama:

$$\overline{Ha} = \omega_a - \omega_H \quad (5)$$

$$\overline{Hb} = \omega_b - \omega_H \quad (6)$$

Međusobni odnos ugaonih brzina elemenata H i b može da se izrazi na sledeći način:

$$\frac{\omega_a - \omega_H}{\omega_b - \omega_H} = \frac{\overline{Ha}}{\overline{Hb}} = \frac{\overline{CA}}{\overline{CB}} = \text{const} \quad (7)$$

Količnik $\overline{Ha} / \overline{Hb}$ predstavlja unutrašnji prenosni odnos planetarnog reda od elemenata a do elemenata b za slučaj kada je element H nepokretan. Ovaj prenosni odnos se naziva osnovni prenosni odnos planetarnog reda. Osnovni prenosni odnos može da ima pozitivan ili negativan predznak, zavisno od toga koji je element odabran da bude nosač satelita. Ovo se jasno može uočiti na sl.2. Za slučaj kada je $\omega_H=0$, odgovarajuća rastojanja imaju isti smer u odnosu na element h . Prema tome je:

$$k = \frac{\omega_a}{\omega_b} > 0 \quad (8)$$

Osnovni prenosni odnos je količnik brzine centralnog zupčanika i brzine epicikla, pri čemu se vrednosti ovih brzina određuju u odnosu na nosač satelita.

Vrednosti osnovnog prenosnog odnosa nalaze se u sledećim granicama [1]:

$$(1.4) \quad 1.5 \leq |k| \leq 4.5(5.0) \quad (9)$$

Vrednosti u zagradama važe samo u malom broju slučajeva [1].

Bilo koje tri prave sa dijagrama ugaonih brzina mogu da se koriste za formiranje planetarnog reda, s tim što svaka prava mora tačno da odgovara jednom elementu planetarnog reda. Odgovarajući izbor vrši se na sledeći način:

Od tri prave, prava u sredini se uvek bira da predstavlja ugaonu brzinu nosača satelita. Za ugaonu brzinu centralnog zupčanika uvek se bira ona prava čije je vertikalno rastojanje od prave u sredini veće. Odabir prave ugaone brzine centralnog zupčanika na ovaj način, obezbeđuje da se ostvari relacija $|k| > 1.0$.

Karakteristike dijagrama ugaonih brzina su veoma značajne pri formiranju numeričkog načina sinteze planetarnih prenosnika za dva stepena slobode kretanja.

Formirani numerički način sinteze sadrži sledeće faze:

- generisanje različitih planetarnih redova,
- odabir planetarnih redova prema vrednosti osnovnog prenosnog odnosa,
- odabir planetarnih redova (koji su zadovoljili kriterijum vrednosti osnovnog prenosnog odnosa) na osnovu vrednosti količnika relativne brzine satelita i ulazne brzine,
- generisanje različitih kombinacija planetarnih redova,
- odabir kombinacija koje sadrže sve osnovne elemente planetarnog prenosnika.

U nastavku rada opisao se osnovne postavke navedenih faza.

Generisanje različitih planetarnih redova

Broj različitih planetarnih redova (C) koji mogu da se formiraju od osnovnih elemenata prenosnika, određuje se pomoću sledeće relacije:

$$C = \frac{(m_T + 2)(m_T + 1)m_T}{3!} \quad (10)$$

gde je m_T - broj prenosnih odnosa.

Svaki planetarni red karakteriše se njegovim osnovnim prenosnim odnosom i količnikom relativne brzine satelita i ulazne brzine u kritičnim radnim režimima. Numeričke vrednosti ovih veličina moraju da se odrede.

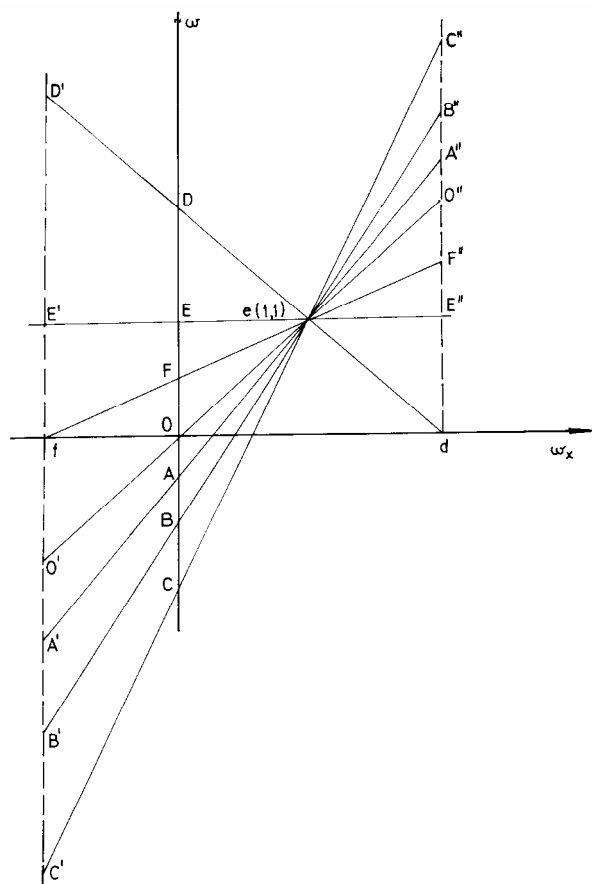
Određivanje osnovnih prenosnih odnosa planetarnih redova

Osnovni prenosni odnosi planetarnih redova određuju se na sledeći način:

$$k_i = \frac{\omega_{ai} - \omega_{Hi}}{\omega_{bi} - \omega_{Hi}} \quad (i = 1, 2, \dots, C) \quad (11)$$

Određivanje količnika relativne brzine satelita i ulazne brzine u kritičnim režimima rada

Postoje dva kritična radna režima planetarnih prenosnika s aspekta relativne brzine satelita. Najveće relativne brzine satelita nastaju u stepenu prenosa za hod unazad i u stepenu prenosa gde je prenosni odnos manji od jedan (tačke f i d , sl.3). Ovi stepeni prenosa određuju kritične radne režime.



Slika 3. Relativna brzina satelita u kritičnim režimima

Relativna ugaona brzina satelita određuje se na osnovu sledeće relacije [3]:

$$(\omega_{grel})_{f,d} = \frac{2}{1+k} [(\omega_a)_{f,d} - (\omega_H)_{f,d}] \quad (12)$$

gde su:

- $(\omega_{grel})_{f,d}$ - relativna ugaona brzina u kritičnim režimima (f - hod unazad, d - stepen prenosa sa prenosnim odnosom manjim od jedan).
- $(\omega_a)_{f,d}$ - ugaona brzina centralnog zupčanika u kritičnim režimima i
- $(\omega_H)_{f,d}$ - ugaona brzina nosača satelita u kritičnim režimima.

Usvajanjem da vrednost ulazne ugaone brzine menjača iznosi 1, količnik relativne ugaone brzine satelita i ulazne brzine ima istu numeričku vrednost kao rezultat izraza (12).

Određivanje vrednosti ugaonih brzina izvršeno je pomoću dijagrama ugaonih brzina. Generisanje planetarnih redova i izračunavanje vrednosti njihovih parametara završavaju se u ovoj fazi.

Izbor planetarnih redova prema osnovnom prenosnom odnosu

Pomoću razvijenog numeričkog načina sinteze proveravaju se vrednosti osnovnih prenosnih odnosa generisanih planetarnih redova i odabiraju se oni planetarni redovi čije se vrednosti osnovnih prenosnih odnosa nalaze u definisanim granicama ($1.5 \leq k \leq 4.5$).

Izbor planetarnih redova (koji su zadovoljili kriterijum osnovnog prenosnog odnosa) na osnovu količnika relativne brzine satelita i ulazne brzine

Količnik relativne brzine satelita i ulazne brzine u kritičnim radnim režimima mora da bude jednak ili manji od 3.5 [1].

Proveravaju se vrednosti izračunatih količnika za sve planetarne redove koji su zadovoljili kriterijum u pogledu vrednosti osnovnih prenosnih odnosa. Na osnovu navedenog zahteva u pogledu odnosa između relativne i ulazne brzine, vrši se proces odabira planetarnih redova.

Generisanje različitih kombinacija planetarnih redova

Broj planetarnih redova sadržanih u menjaču definiše se na početku. Broj odabranih planetarnih redova (planetarni redovi koji su zadovoljili kriterijume osnovnog prenosnog odnosa i odnosa između relativne brzine satelita i ulazne brzine) može da bude manji, jednak ili veći od broja planetarnih redova sadržanih u menjaču. Ako je ovaj broj manji od broja planetarnih redova sadržanih u menjaču, onda ne postoji mogućnost da se formira menjač. Ako je ovaj broj jednak broju planetarnih redova menjača, onda postoji samo jedna mogućnost da se formira menjač. Ako je broj planetarnih redova veći od broja planetarnih redova sadržanih u menjaču, onda postoji nekoliko mogućnosti za izvodjenje menjača. Ove kombinacije menjača nastaju kao rezultat kombinacija odabranih planetarnih redova. Broj različitih izvodjenja (različite kombinacije planetarnih redova) izražava se pomoću sledeće relacije:

$$S = \frac{Q(Q-1)\dots(Q-R+1)}{R!} \quad (13)$$

gde su: Q - broj odabranih planetarnih redova i R - broj planetarnih redova koji se sadrže u menjaču.

Na osnovu izraza (13) izvršen je numerički proračun. Neki rezultati ovog proračuna dati su u tabeli 1, gde G označava broj stepena prenosa za hod unapred (broj stepena

- tabela kombinacija planetarnih redova koje se koriste za formiranje kinematičkih šema (svaka kombinacija sadrži sve osnovne elemente).

Formirane kinematičke šeme su osnova za dalju analizu u cilju dobijanja optimalnog rešenja. Da bi se ostvarilo

Tabela 1. Neki parametri sinteze planetarnih menjača

G	3									4							
	3	4	5	6	7	8	9	10	4	5	6	7	8	9	10	11	12
S	1	4	10	20	35	56	84	120	1	5	15	35	70	126	210	330	495

prenosa za hod unazad je uvek jedan).

Generisanje različitih kombinacija planetarnih redova i njihov odgovarajući tabelarni prikaz ostvaruju se u ovoj fazi definisane numeričke sinteze.

Kao što se vidi iz tabele 1, broj različitih složenih planetarnih prenosnika (S) se u znatnoj meri povećava kada je broj odabranih planetarnih redova relativno veliki.

Izbor kombinacija koje sadrže sve osnovne elemente planetarnog prenosnika

Svaka kombinacija (izvedba menjača) mora da sadrži sve osnovne elemente menjača. U suprotnom, formiranje kinematičke šeme ne bi bilo moguće. Pomoću formiranog numeričkog načina sinteze proverava se sadržaj svake kombinacije i biraju se one kombinacije koje sadrže sve osnovne elemente. Posle toga se daje tabelarni prikaz odabranih kombinacija. Struktura planetarnog reda označava se tako da se oznaka epicikla nalazi na prvoj poziciji, oznaka nosača satelita nalazi se na drugoj poziciji, a na trećoj poziciji je oznaka centralnog zupčanika. Ovaj redosled označavanja elemenata planetarnog reda obezbeđuje formiranje kinematičkih tokova.

Osnove softvera za numeričku sintezu

Numerička sinteza planetarnih prenosnika pruža veoma povoljne mogućnosti za formiranje softvera. Formiran je softver koji je fleksibilan u pogledu verzija složenog planetarnog prenosnika sa dva stepena slobode (verzije gde je prenosni odnos u najvišem stepenu prenosa jednak jedinici i gde je on manji od jedan).

Broj, oznake osnovnih elemenata i vrednosti prenosnih odnosa predstavljaju ulazne podatke za ovaj softver. Izlazni podaci su sledeći:

- vrednosti osnovnih prenosnih odnosa svakog planetarnog reda,
- vrednosti količnika relativne brzine satelita i ulazne brzine za kritične radne režime,
- tabela različitih planetarnih redova koji su formirani od osnovnih elemenata,
- tabela planetarnih redova koji su odabrani na osnovu vrednosti osnovnog prenosnog odnosa,
- tabela planetarnih redova koji su odabrani na osnovu vrednosti količnika relativne brzine satelita i ulazne brzine za kritične radne režime,
- tabela različitih kombinacija odabranih planetarnih redova (broj planetarnih redova svake kombinacije jednak je broju planetarnih redova planetarnog prenosnika) i

optimalno rešenje, potrebno je da se definišu dodatni kriterijumi, kao što su: stepen korisnosti, broj vratila smeštenih jedno u drugo, broj frikcionih sklopova itd.

Pomoću formiranog softvera izvršena je numerička sinteza planetarnog menjača sa četiri stepena prenosa.

Ulazni podaci su sledeći:

- broj osnovnih elemenata: 6,
 - oznaka elementa koji obezbeđuje hod unazad: 5,
 - oznake osnovnih elemenata menjača 1, 2, 3, 0, -, x,
 - prenosni odnos u prvom stepenu prenosa: 6.55,
 - prenosni odnos u drugom stepenu prenosa: 2.84,
 - prenosni odnos u trećem stepenu prenosa: 1.64,
 - prenosni odnos u četvrtom (direktnom) stepenu prenosa: 1.00 i
 - prenosni odnos u stepenu prenosa za hod unazad: -5.14.
- Izlazni podaci prikazani su u tabelama od 2 do 6:

Tabela 2. Odabrani planetarni redovi formirani od 6 osnovnih elemenata

Br.	Planetarni red	Osnovni pren. odnos	Odnos između relativne brzine satelita i ulazne brzine u st. prenosa za hod nazad
1.	123	-2.805	1.349
2.	210	-3.249	1.254
3.	-12	-1.059	14.703
4.	x12	-2.015	0.855
5.	013	-1.171	19.281
6.	-13	-4.030	1.090
7.	x13	-7.668	0.495
8.	1-0	-2.440	1.389
9.	1x0	-5.546	0.525
10.	-x1	-1.108	4.003
11.	320	-1.515	7.165
12.	023	-1.443	5.500
13.	x23	-1.875	2.783
14.	2-0	-1.185	10.801
15.	2x0	-1.839	2.846
16.	-x2	-3.340	0.555
17.	0-3	-2.061	3.885
18.	0x3	-1.563	6.634
19.	-x3	-9.600	0.434
20.	x-0	-5.143	0.483

Tabela 3. Odabrani planetarni redovi na osnovu vrednosti osnovnog prenosnog odnosa

Br.	Planetarni red	Osnovni pren. odnos	Odnos između relativne brzine satelita i ulazne brzine u st. prenosa za hod nazad
1.	123	-2.805	1.349
2.	210	-3.249	1.254

Br.	Planetarni red	Osnovni pren. odnos	Odnos između relativne brzine satelita i ulazne brzine u st. prenosa za hod nazad
3.	x12	-2.015	0.855
4.	1-0	-2.440	1.389
5.	x23	-1.875	2.783
6.	2x0	-1.839	2.846
7.	-x2	-3.340	0.555
8.	0-3	-2.061	3.885
9.	0x3	-1.563	6.634

Tabela 4. Odabrani planetarni redovi na osnovu vrednosti relativne brzine satelita

Br.	Planetarni red	Osnovni pren. odnos	Odnos između relativne brzine satelita i ulazne brzine u st. prenosa za hod nazad
1.	123	-2.805	1.349
2.	210	-3.249	1.254
3.	x12	-2.015	0.855
4.	1-0	-2.440	1.389
5.	x23	-1.875	2.783
6.	2x0	-1.839	2.846
7.	-x2	-3.340	0.555

Tabela 5. Različite kombinacije planetarnih redova koji se nalaze u tabeli 4

Br.	Kombinacija planetarnih redova			
1.	123	210	x12	1-0
2.	123	210	x12	x23
3.	123	210	x12	2x0
4.	123	210	x12	-x2
5.	123	210	1-0	x23
6.	123	210	1-0	2x0
7.	123	210	1-0	-x2
8.	123	210	x23	2x0
9.	123	210	x23	-x2
10.	123	210	2x0	-x2
11.	123	x12	1-0	x23
12.	123	x12	1-0	2x0
13.	123	x12	1-0	-x2
14.	123	x12	x23	2x0
15.	123	x12	x23	-x2
16.	123	x12	2x0	-x2
17.	123	1-0	x23	2x0
18.	123	1-0	x23	-x2
19.	123	1-0	2x0	-x2
20.	123	x23	2x0	-x2
21.	210	x12	1-0	x23
22.	210	x12	1-0	2x0
23.	210	x12	1-0	-x2
24.	210	x12	x23	2x0
25.	210	x12	x23	-x2
26.	210	x12	2x0	-x2
27.	21-	1-0	x23	2x0
28.	210	1-0	x23	-x2
29.	210	1-0	2x0	-x2
30.	210	x23	2x0	-x2
31.	x12	1-0	x23	2x0
32.	x12	1-0	x23	-x2
33.	x12	1-0	2x0	-x2
34.	x12	x23	2x0	-x2
35.	1-0	x23	2x0	-x2

Zaključak

Dijagram ugaonih brzina i zahtevane vrednosti prenosnih

odnosa predstavljali su osnovu za razvoj numeričke sinteze planetarnih prenosnika sa dva stepena slobode kretanja .

Formirani način sinteze obezbeđuje potpuno raspoređivanje planetarnih redova u složenom prenosniku snage. Parametri ovih planetarnih redova, koji su najznačajniji za sintezu, odnose se na vrednosti osnovnih prenosnih odnosa i relativne brzine satelita. Definisani numerički način sinteze i razvijeni softver doprinose da proces sinteze bude veoma efikasan. Izlazni rezultati softvera koriste se za formiranje kinematičkih šema

Tabela 6. Kombinacije za kinematičke šeme

Br.	Kombinacija za kinematičke šeme			
1.	123	210	x12	1-0
2.	123	210	x12	-x2
3.	123	210	1-0	x23
4.	123	210	1-0	2x0
5.	123	210	1-0	-x2
6.	123	210	x23	-x2
7.	123	210	2x0	-x2
8.	123	x12	1-0	x23
9.	123	x12	1-0	2x0
10.	123	x12	1-0	-x2
11.	123	x12	2x0	-x2
12.	123	1-0	x23	2x0
13.	123	1-0	x23	-x2
14.	123	1-0	2x0	-x2
15.	123	x23	2x0	-x2
16.	210	x12	1-0	x23
17.	210	x12	x23	-x2
18.	210	1-0	x23	2x0
19.	210	1-0	x23	-x2
20.	210	x23	2x0	-x2
21.	x12	1-0	x23	2x0
22.	x12	1-0	x23	-x2
23.	x12	x23	2x0	-x2
24.	1-0	x23	2x0	-x2

složenih planetarnih prenosnika.

Literatura

- [1] KRJUKOV,A.D., HARČENKO,A.P. *Vibor transmisij guseničnih i kolesnih mašin.* Mašinstroenie, Leningrad, 1963.
- [2] KUDRAVCEV,V.N. *Planetarnie i gidromehaničeskie predoči kolesnih i guseničnih mašin.* Mašinstroenie, Moskva, 1966.
- [3] NOSOV,N.A. *Rasčot i konstruirovanie guseničnih mašin.* Mašinstroenie, Leningrad, 1972.
- [4] MACMILLAN,R.H. Power Flow and Loss in Differential Mechanisms. *J. Mech. Eng.Science*, 1961, vol.3, no.1.,
- [5] PANTIĆ,M. *Analysis and Synthesis of Multiple Speed Transmissions of the Planetary-Gear Type.* M. Sc. Thesis. Cranfield Institute of Technology, 1987.