

Generisanje numeričke deformabilne mreže i njena primena u analizi nestacionarnih dvodimenzionalnih strujanja

Dr Mirko Kozić, dipl.inž.¹⁾

Izložen je metod za generisanje nestrukturisanе deformabilne mreže, koja prati kretanje i deformaciju tela, čime se pored oscilovanja aeroprofila kao krutog tela mogu da analiziraju oscilacije komandne površine i deformacija konture aeroprofila. Nestrukturisanа deformabilna mreža primenjena je u analizi transoničnih nestacionarnih dvodimenzionalnih strujanja opisanih Ojlerovim jednačinama koje se rešavaju metodom konačnih zapremina. Izvršena poređenja sa rezultatima drugih numeričkih metoda, pokazala su dobro slaganje.

Ključne reči: Dvodimenzionalno nestacionarno strujanje, nestrukturisanа deformabilna mreža, metoda konačnih zapremina, oscilovanje aeroprofila i površina.

Uvod

NUMERIČKE metode u dinamici fluida intenzivno su se razvijale u zadnjih tridesetak godina. Pregled stanja u razvoju i primeni na aerodinamičku analizu, dat je u [1]. Metode panela za podzvučna strujanja bile su uvedene šezdesetih godina, da bi sedamdesetih godina težište razvoja bilo na matematičkim modelima koji opisuju transonično potencijalno strujanje. U novije vreme se radi na određivanju strujnog polja oko složenih aerodinamičkih konfiguracija, rešavanjem Ojlerovih i Navije-Stoksovih jednačina.

U numeričkoj dinamici fluida generisanje numeričke mreže oko složene geometrije predstavlja podjednako težak problem kao i rešavanje jednačina koje opisuju strujanje. Pokazano je u [2] da generisanje strukturisane mreže (uređena krivolinijska mreža) oko kombinacije krilo-trup ne predstavlja suviše težak problem. Kako geometrija postaje složenija, tako postaje sve teže generisanje strukturisane mreže u okviru geometrije. Za realnu vazduhoplovnu konfiguraciju, koja pored krila i trupa obuhvata repove, pajlone i motorske gondole, generisanje strukturisane mreže praktično je nemoguće. Alternativa za prevazilaženje ovog problema data je u [3], korišćenjem nestrukturisanih (neuređenih) mreža sastavljenih od trouglova, odnosno tetraedara u zavisnosti od toga da li se analizira dvodimenzionalno ili trodimenzionalno strujanje.

Za analizu nestacionarnih strujanja, u većini metoda koje koriste strukturisanu mrežu, pretpostavka je da se mreža kreće kao kruto telo, ili da se mreža smiče kako se telo deformiše. Prva pretpostavka ograničava primenljivost metode na kretanje krutog tela, a druga na kretanje tela sa malom amplitudom.

U radu je urađen postupak za generisanje nestrukturisanе deformabilne mreže, pa se prevazilaze gornja ograničenja strukturisanih mreža. Numerička mreža, generisana izloženim postupkom, prati kretanje i deformaciju tela, pa može analizirati oscilovanje aeroprofila kao krutog tela, oscilovanje komandne površine, i deformacije konture

aeroprofila bez ograničenja amplitude.

Nestrukturisanа deformabilna mreža generisana je u [4], za analizu transoničnih nestacionarnih dvodimenzionalnih strujanja opisanih Ojlerovim jednačinama koje se rešavaju metodom konačnih zapremina. Poređenja sa rezultatima drugih numeričkih metoda pokazuju dobro slaganje.

Generisanje deformabilne mreže

Pri nestacionarnom strujanju, numerička mreža oko tela mora u svakom trenutku svojim oblikom da se prilagodi kretanju i deformaciji tela. Ovo znači da treba naći postupak po kome će se čvorovi mreže, odnosno temena trougaonih elemenata pomerati, pod uslovom da deformisanje elemenata uz konturu tela bude što manje, zbog tačnosti pri određivanju veličina strujnog polja. Istraživanjem se došlo do originalnog rešenja po kome se pomeranja čvorova u pravcima x i y ose Dekartovog koordinatnog sistema određuju tako da zadovoljavaju Laplasovu jednačinu. Ako se ova pomeranja označe sa ϕ i ψ važiće:

$$\begin{aligned}\Delta\phi &= 0 \\ \Delta\psi &= 0\end{aligned}\quad (1)$$

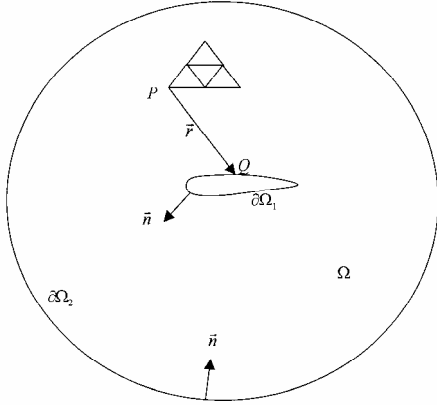
Koristeći drugu Grinovu teoremu, [5], uz uslov da su ϕ i ψ harmonijske funkcije (1), problem se svodi na identitet u integralnoj formi, koji povezuje pomeranje u ma kojoj tački P domena Ω , sa pomeranjem i njegovim normalnim izvodom na granici domena $\partial\Omega$, sl.1. Pomeranja ϕ i ψ izražena preko opšteg oblika druge Grinove teoreme sada glase:

$$2\pi T\phi_P = \oint_{\partial\Omega} \ln r \frac{\partial\phi}{\partial n} ds - \oint_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial n} (\ln r) ds \quad (2)$$

¹⁾ Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

$$2\pi T\psi_P = \iint_{\partial\Omega} \ln r \frac{\partial\psi}{\partial n} ds - \iint_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) ds$$

gde je r dužina vektora \overline{PQ} . Q je promenljiva tačka na granici domena, a \vec{n} je jedinični vektor normale usmerene u domen Ω . Integracija isključuje slučaj $r=0$. Granica domena obuhvata konturu tela označenu sa $\partial\Omega_1$ i spoljnu granicu označenu sa $\partial\Omega_2$, tj. $\partial\Omega = \partial\Omega_1 \cup \partial\Omega_2$.



Slika 1. Određivanje pomeranja čvorova deformabilne mreže

Zavisno od položaja tačke P , u [6] su date za T sledeće vrednosti:

$$T = 1 \quad P \text{ leži unutar domena } \Omega.$$

$$T = 0 \quad P \text{ leži izvan domena } \Omega.$$

$$T = \frac{1}{2} \quad P \text{ leži na glatkom delu granice domena } \partial\Omega.$$

$$T = \theta/2\pi \quad P \text{ se poklapa sa tačkom na granici domena } \partial\Omega \text{ u kojoj je tangenta diskontinualna, pri čemu je } \theta \text{ ugao između tangenti meren u domenu } \Omega.$$

Ako je u svim tačkama granice domena $\partial\Omega$ poznata jedna od funkcija ϕ ili $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, onda (2) za tačku P na granici domena, postaje integralna jednačina iz koje se određuje ona druga funkcija, koja je nepoznata. Kada su obe funkcije, ϕ i $\frac{\partial\phi}{\partial n}$, poznate na granici domena $\partial\Omega$, može da se odredi vrednost funkcije ϕ , za bilo koju tačku P unutar domena Ω stavljajući $T=1$ u (2). Slično razmatranje važi za funkciju ψ .

Pomeranje tela ili deformisanje njegove konture je poznata funkcija od vremena. Uz pretpostavku da se čvorovi na spoljnoj granici domena ne pomeraju, vrednost funkcije poznata je duž cele granice domena. Ovo je unutrašnji Dirihleov problem, koji vodi integralnoj jednačini prve vrste za određivanje nepoznate vrednosti normalnog izvoda funkcije na granici domena, i može da se izrazi na sledeći način:

$$\begin{aligned} \iint_{\partial\Omega} \ln r \frac{\partial\phi}{\partial n} ds &= 2\pi T\phi_P + \iint_{\partial\Omega} \phi \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) ds \\ \iint_{\partial\Omega} \ln r \frac{\partial\psi}{\partial n} ds &= 2\pi T\psi_P + \iint_{\partial\Omega} \psi \frac{\partial}{\partial n}(\ln r) ds \end{aligned} \quad (3)$$

gde T ima vrednost jednaku $1/2$ ili $\theta/2\pi$.

Numeričko rešenje (3), određuje se usvajajući da je nepoznata vrednost normalnog izvoda konstantna na svakom od segmenata granice domena, gde segment predstavlja stranicu trougla koja je deo granice domena i označen je sa σ . Sada se (3), svodi na sistem linearnih algebarskih jednačina dat kao:

$$Ax = b \quad (4)$$

Elementi matrice A dati su kao:

$$a_{ij} = \int_{\sigma_j} \ln r(P, Q) ds, \quad Q \in \sigma_j, P \in \sigma_i, \quad j = 1, 2, \dots, NSEG \quad (5)$$

dok su komponente vektora rešenja:

$$x_j = \left(\frac{\partial\phi}{\partial n} \right)_j \quad (6)$$

Elementi matrice-kolone b imaju oblik:

$$b_i = 2\pi T\phi_i + \sum_{\substack{m=1 \\ m \neq i}}^{NSEG} \phi_m \int_{\sigma_m} \frac{\partial}{\partial n_m} \ln r(P, Q) ds \quad Q \in \sigma_m, P \in \sigma_i, \quad i = 1, 2, \dots, NSEG \quad (7)$$

gde su $NSEG$ ukupan broj segmenata na granici domena $\partial\Omega$, a T ima iste vrednosti kao u (3).

Posle određivanja nepoznatih vrednosti normalnog izvoda na svim segmentima granice domena, određuju se pomeranja svih čvorova unutar domena iz diskretizovanog oblika (2).

Deformabilna mreža primenjena pri rešavanju Ojlerovih jednačina

Deformabilna mreža korišćena je pri rešavanju Ojlerovih jednačina da bi se odredilo dvodimenzionalno nestacionarno transonično strujno polje. S obzirom na prirodu nestrukturisanih mreža (neuređenost), jednačine održanja mase, količine kretanja i energije, moraju da se razmatraju u integralnom obliku prikazanom u [7], koji glasi:

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{\Omega} W dx dy + \iint_{\partial\Omega} (F dy - G dx) = 0 \quad (8)$$

gde su: Ω i $\partial\Omega$ kontrolna zapremina i njena granica. W je vektor rešenja, a F i G komponente tenzora fluksa u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema, koje su za Ojlerove jednačine date u [8] u obliku:

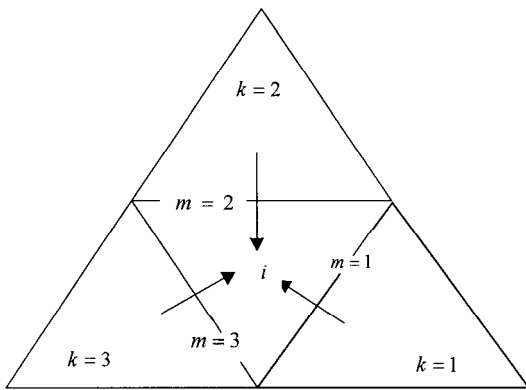
$$W = \begin{bmatrix} \rho \\ \rho u \\ \rho v \\ \rho E \end{bmatrix}, \quad F = \begin{bmatrix} \rho(u - \xi) \\ \rho u(u - \xi) + p \\ \rho v(u - \xi) \\ \rho E(u - \xi) + pu \end{bmatrix}, \quad (9)$$

$$G = \begin{bmatrix} \rho(v-\eta) \\ \rho u(v-\eta) \\ \rho v(v-\eta) + p \\ \rho E(v-\eta) + pv \end{bmatrix}$$

gde su: ρ -gustina, p -pritisak, u i v -komponente brzine fluida u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema, a E -totalna energija po jedinici mase. Komponente brzine pokretne granice domena $\partial\Omega$, u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema, označene su sa ξ i η . Da bi se zatvorio opisani sistem od četiri jednačine sa pet nepoznatih, uvodi se pretpostavka da se fluid ponaša kao idealan gas za koji važi jednačina stanja:

$$\rho E = \frac{p}{\gamma-1} + \rho \frac{u^2 + v^2}{2} \quad (10)$$

Numerički domen, u kome se određuje strujno polje, podeljen je u veliki broj malih trougaonih elemenata (sl.2), i



Slika 2. Trougaoni element kao kontrolna zapremina na koju se primenjuju zakoni održanja mase, količine kretanja i energije

na svaki se primenjuje jednačina (8). Pretpostavljajući da su vrednosti promenljivih konstantne unutar svakog elementa i da se menjaju samo sa vremenom, jednačina (8) primenjena na sve trougaone elemente numeričkog domena, daje sistem običnih diferencijalnih jednačina po vremenu, koji može da se izrazi na sledeći način:

$$\frac{d}{dt}(S_i W_i) + Q(W_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N \quad (11)$$

gde su: S_i, W_i i $Q(W_i)$ površina, vektor promenljivih i numerička aproksimacija fluksa za i - ti trougaoni element, data izrazom

$$Q(W_i) = \sum_{m=1}^3 (F \Delta y - G \Delta x)_m \quad (12)$$

Sabiranje se vrši duž tri stranice i - tog trougaonog elementa. Komponente tenzora fluksa kroz m - tu ivicu određuju se uzimanjem srednje vrednosti strujnih veličina u dva trougaona elementa za koja je m - ta ivica zajednička. Za količinu kretanja u pravcu x -ose, komponente tenzora fluksa određene su izrazima:

$$F_m = \frac{(\rho u^2 + p)_i + (\rho u^2 + p)_k}{2} - \frac{(\rho u)_i + (\rho u)_k}{2} \xi_m \quad (13)$$

gde su, ξ_m i η_m komponente brzine m - te ivice u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema, a izračunavaju se kao srednja vrednost komponenti brzina čvorova na krajevima m -te ivice. Komponente brzine svakog čvora određuju se na osnovu pomeranja tog čvora u toku razmatranog vremenskog koraka Δt kao:

$$\begin{aligned} \xi &= \frac{\phi}{\Delta t} \\ \eta &= \frac{\psi}{\Delta t} \end{aligned} \quad (14)$$

gde su, ξ i η pomeranja deformabilne mreže u pravcu osa Dekartovog koordinatnog sistema.

Za regularnu raspodelu trouglova, greška koja se unosi uvedenim aproksimacijama, je $O(\Delta x^2)$ gde je Δx karakteristična dužina trougaonog elementa.

Za dobijanje jedinstvenog i fizički ispravnog rešenja sistema jednačina (11), mora da se uvede numerička disipacija sa kojom sistem jednačina (11) dobija konačni oblik:

$$\frac{d}{dt}(S_i W_i) + Q(W_i) - D(W_i) = 0 \quad i = 1, 2, \dots, N. \quad (15)$$

gde je $D(W_i)$ disipativni član. Disipativni član se tako konstruiše da što je moguće više eliminiše neželjene oscilacije rešenja na mestu udarnog talasa, a da istovremeno ne smanji tačnost numeričke šeme u oblastima glatkog strujanja. Numerički eksperimenti izvršeni u [7], pokazali su da je najbolje uzeti kombinaciju drugih i četvrtih razlika po strujnim promenljivim, sa koeficijentima koji zavise od lokalnog gradijenta pritiska. Četvrte razlike daju osnovnu disipaciju koja prigušuje oscilacije u oblastima glatkog strujanja. Ova disipacija nije dovoljna da priguši oscilacije rešenja u neposrednoj okolini udarnog talasa, pa se u toj oblasti uvode druge razlike. Za i - ti element disipativni član je oblika:

$$D(W_i) = \sum_{m=1}^3 d_m^{(2)} + \sum_{m=1}^3 d_m^{(4)} \quad (16)$$

gde su članovi koji obuhvataju druge i četvrte razlike dati izrazima:

$$\begin{aligned} d_m^{(2)} &= \alpha_m \varepsilon_m^{(2)} (W_k - W_i)_m \\ d_m^{(4)} &= -\alpha_m \varepsilon_m^{(4)} (\Delta W_k - \Delta W_i)_m \end{aligned} \quad (17)$$

Laplasov operator aproksimiran konačnim razlikama na nestrukturisanjoj mreži sastavljenoj od trougaonih elemenata, za i - ti element ima oblik:

$$\Delta W_i = \sum_{k=1}^3 W_k - 3W_i \quad (18)$$

Faktor skaliranja α , koji zavisi od sopstvenih vrednosti matrica $\partial F / \partial W$ i $\partial G / \partial W$, i za m -tu ivicu čije su projekcije na x i y osu Δx i Δy , a dužina Δl_m , dat je izrazom:

$$\alpha_m = |(u - \xi) \Delta y - (v - \eta) \Delta x|_m + a \Delta l_m \quad (19)$$

gde je a lokalna brzina zvuka. Uključivanje i isključivanje drugih i četvrtih razlika, zavisno od toga da li je trougaoni element u oblasti gde je strujanje glatko ili se javlja udami talas, vrši se na osnovu vrednosti pokazatelja gradijenta pritiska, datim u obliku:

$$V_i = \frac{\left| \sum_{m=1}^3 (p_k - p_i)_m \right|}{\left| \sum_{m=1}^3 (p_k + p_i)_m \right|} \quad (20)$$

Adaptivni koeficijenti $\varepsilon_m^{(2)}$ i $\varepsilon_m^{(4)}$ su dati u zavisnosti od vrednosti pokazatelja gradijenta pritiska izrazima

$$\begin{aligned} \varepsilon_m^{(2)} &= K^{(2)} \max \left[(v_i, v_k)_m \right] \\ \varepsilon_m^{(4)} &= \max \left(0, K^{(4)} - \varepsilon_m^{(2)} \right) \end{aligned} \quad (21)$$

Konstante $K^{(2)}$ i $K^{(4)}$ empirijski određene u [7], imaju vrednosti $0.5 \leq K^{(2)} \leq 1.0$, i $1/256 \leq K^{(4)} \leq 1/32$.

Stabilnost i konvergencija numeričkog rešenja zavise od korektno primenjenih graničnih uslova. Kako se numeričko rešenje sistema, (15), traži u konačnom domenu, to se na dovoljnoj udaljenosti od tela ($50 - 100$ tetiva) mora da postavi spoljna granica sa takvim graničnim uslovima koji će što je moguće više da smanje reflektovanje odlazećih talasa poremećaja strujnog polja nazad u numerički domen. To znači, da se na ulaznom delu spoljne granice domena za vrednosti svih promenljivih ne smeju da uzmu vrednosti iz neporemećene struje. Na osnovu Rimanovih invarijanti određuje se broj promenljivih čije vrednosti moraju da se ekstrapoliraju iz numeričkog domena na spoljnu granicu. Slično se primenjuje i za izlazni deo spoljne granice. Granični uslov na konturi tela je uslov tangencijalnosti strujanja, koji se uvodi u numerički model tako da je fluks normalne brzine kroz konturu jednak nuli. Fluksevi od količine kretanja i energije nisu jednaki nuli jer, npr. kod količine kretanja ostaje na konturi doprinos pritiska, čija se vrednost ekstrapolira iz trougaonih elemenata čija jedna stranica pripada konturi.

Sistem jednačine (15) integrali se po vremenu korišćenjem eksplicitne šeme Runge-Kuta četvrtog stupnja date u [3], glase:

$$\begin{aligned} W_i^{(0)} &= W_i^n \\ W_i^{(1)} &= W_i^{(0)} S_i^{(n)} / S_i^{(n+1/2)} - \frac{1}{4} \Delta t \left[Q(W_i^{(0)}) - D(W_i^{(0)}) \right] / S_i^{(n+1/2)} \\ W_i^{(2)} &= W_i^{(0)} S_i^{(n)} / S_i^{(n+1/2)} - \frac{1}{3} \Delta t \left[Q(W_i^{(1)}) - D(W_i^{(0)}) \right] / S_i^{(n+1/2)} \\ &\quad (22) \\ W_i^{(3)} &= W_i^{(0)} S_i^{(n)} / S_i^{(n+1/2)} - \frac{1}{2} \Delta t \left[Q(W_i^{(2)}) - D(W_i^{(0)}) \right] / S_i^{(n+1/2)} \\ W_i^{(4)} &= W_i^{(0)} S_i^{(n)} / S_i^{(n+1)} - \Delta t \left[Q(W_i^{(3)}) - D(W_i^{(0)}) \right] / S_i^{(n+1)} \\ &\quad i = 1, 2, \dots, N \end{aligned}$$

$$W_i^{n+1} = W_i^{(4)}$$

gde je

$$S_i^{(n+1/2)} = \frac{S_i^{(n)} + S_i^{(n+1)}}{2} \quad (23)$$

Prikazana šema je drugog reda tačnosti po vremenu, a radi numeričke efikasnosti disipativni član se izračunava samo na prvom stupnju. Za eksplicitne vremenske šeme vremenski korak ograničen je Courant-Friedricks-Lewy (CFL) uslovom, koji za šemu četvrtog stupnja iznosi $2\sqrt{2}$.

Rezultati analize

Dati su rezultati za dva testna primera u kojima je primenjena nestrukturirana deformabilna mreža u analizi transoničnih nestacionarnih dvodimenzionalnih strujanja opisanih Ojlerovim jednačinama koje su rešavane metodom konačnih zapremina.

U prvom primeru razmatrana je rotacija aeroprofila NACA 0012, sa velikom redukovanom frekvencijom oko poprečne ose na 25% tetive. Promena napadnog ugla sa vremenom, opisana je izrazom:

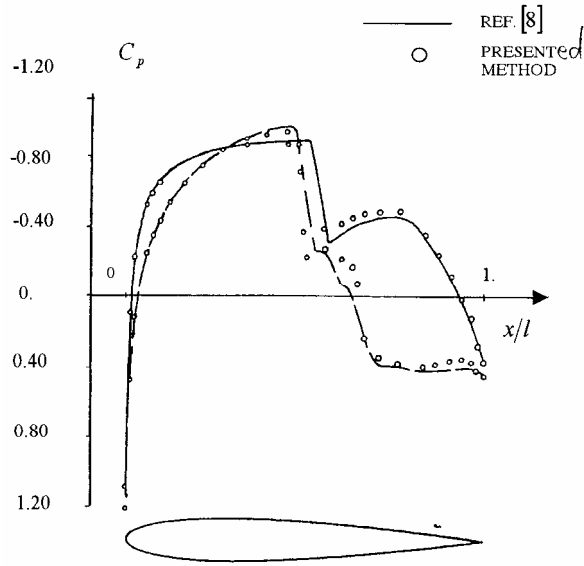
$$\alpha = \alpha_m + \alpha_0 \sin \omega t \quad (24)$$

gde su srednji napadni ugao $\alpha_m = 0^0$, dok je amplituda napadnog ugla $\alpha_0 = 5^0$. Vrednost redukovane frekvencije bila je $k = 1$, i njena veza sa frekvencijom oscilovanja ω data je izrazom:

$$k = \frac{\omega l}{2V_\infty} \quad (25)$$

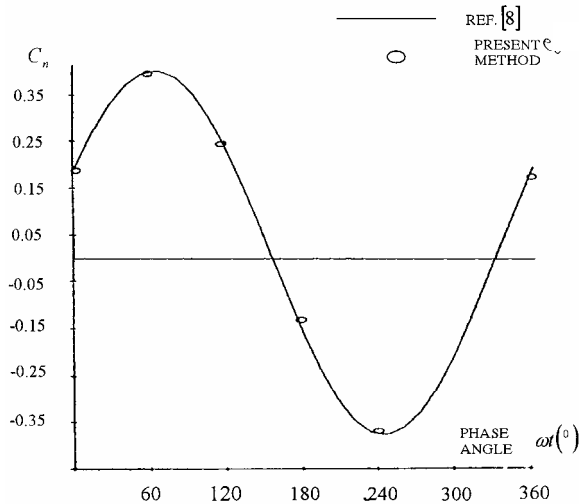
gde je l tetiva aeroprofila, a V_∞ je intenzitet neporemećene struje.

Na sl. 3 upoređena je raspodela koeficijenta pritiska duž aeroprofila dobijena izloženom metodom, sa raspodelom iz [8], za fazni ugao $\omega t = 1439.9^0$ koji odgovara trenutnom napadnom uglu $\alpha = -0.01^0$. Ovde se najjasnije vide efekti nestacionarnog kretanja aeroprofila koji su izraženiji što je veća redukovana frekvencija. Kako je aeroprofil simetričan, to se za stacionarno strujanje pri nultom napadnom uglu dobija simetrična raspodela koeficijenta pritiska, dok se pri nestacionarnom strujanju, za približno isti napadni ugao ($\alpha = -0.01^0$), dobija nesimetrična raspodela koeficijenta pritiska, što se vidi na sl.3. Takođe dolazi do promene položaja udarnog talasa duž aeroprofila i njegove jačine.



Slika 3. Poređenje raspodele koeficijenta pritiska duž aeroprofila NACA 0012 dobijene izloženim metodom sa raspodelom iz [8] za Mahov broj $M = 0.8$, pri oscilovanju sa $\alpha_m = 0^\circ$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $k = 1$. Trenutni napadni ugao $\alpha = -0.01^\circ$.

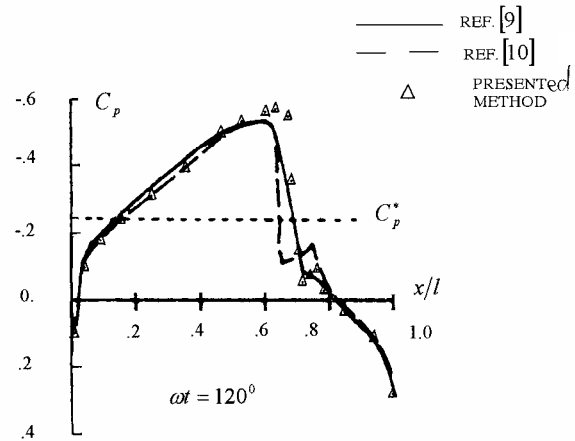
Promena aerodinamičkih koeficijenata je oscilatornog karaktera i na sl.4 je pokazano kako se menja vrednost koeficijenta normalne sile u zavisnosti od faznog ugla. Uporedo su dati rezultati izložene metode sa rezultatima publikovanim u [8]. Uočava se da postoji fazno pomeranje između napadnog ugla i koeficijenta normalne sile. Maksimalni napadni ugao $\alpha = 5^\circ$ odgovara faznom uglu $\omega t = 90^\circ$, dok se maksimalna vrednost koeficijenta normalne sile dobija za fazni ugao $\omega t \approx 70^\circ$, što odgovara trenutnom napadnom uglu $\alpha = 4.70^\circ$.



Slika 4. Koeficijent normalne sile aeroprofila NACA 0012 u zavisnosti od faznog ugla ωt . Poređenje izloženog metodom sa rezultatima u [8] za Mahov broj $M = 0.8$, pri oscilovanju sa $\alpha_m = 0^\circ$, $\alpha_0 = 5^\circ$, $k = 1$.

U drugom testnom primeru razmatrano je nestacionarno strujanje oko aeroprofila NACA 64A006 čije krilce

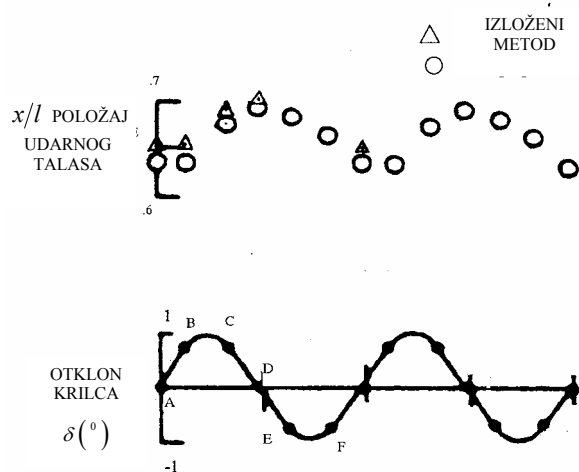
harmonijski osciluje sa redukovanom frekvencijom $k = 0.234$ i amplitudom $\delta_0 = 1^\circ$. Aeroprofil je pod napadnim uglom $\alpha = 0^\circ$, dok je Mahov broj neporemećene struje $M = 0.875$. Šarnirna osa krilca nalazi se na 75% tetive.



Slika 5. Poređenje raspodele koeficijenta pritiska duž gornjake aeroprofila NACA 64A006 dobijene izloženim metodom sa raspodelama uzetim iz [9 i 10], za Mahov broj $M = 0.875$, napadni ugao $\alpha = 0^\circ$. Komandna površina osciluje sa amplitudom otklona $\delta_0 = 1^\circ$ i redukovanom frekvencijom $k = 0.234$. Fazni ugao je $\omega t = 120^\circ$.

Na sl.5, za fazni ugao $\omega t = 120^\circ$, uporedo je data raspodela pritiska na gornjaci aeroprofila dobijena izloženim metodom, kao i raspodele uzete iz [9 i 10]. Može se zaključiti da u oblasti ispred udarnog talasa sve tri metode daju približno iste raspodele pritiska. Izloženi metod daje udarni talas pomeren ka izlaznoj ivici za $\approx 7.5\%$ tetive aeroprofila u odnosu na prikazani u [10].

Položaj udarnog talasa upoređen je na sl.6 sa položajem uzetim iz [10]. Uočava se da mu je pomeranje skoro sinusoidalno sa faznim kašnjenjem u odnosu na otklon krilca. Maksimalno pomeranje udarnog talasa ka izlaznoj ivici ne javlja se za maksimalni otklon krilca nadole, kao u slučaju stacionarnog strujanja, već nešto kasnije kada krilce krene naviše. Jačina udarnog talasa takođe nije u fazi sa pomeranjem udarnog talasa. Maksimalna jačina udarnog talasa odgovara faznom uglu između tačaka E ($\omega t = 240^\circ$) i F ($\omega t = 300^\circ$), dok maksimalno pomeranje udarnog talasa odgovara faznom uglu blizu tačke D ($\omega t = 180^\circ$). Na sl.6 vidi se da maksimalni otklon komandne površine odgovara faznom uglu $\omega t = 90^\circ$.



Slika 6. Poređenje položaja udarnog talasa na gornjaci aeroprofila NACA 64A006 sa položajem iz [10], za Mahov broj $M = 0.875$ i napadni ugao $\alpha = 0^\circ$. Komandna površina osciluje sa amplitudom otklona $\delta_0 = 1^\circ$ i redukovanom frekvencijom $k = 0.234$

Zaključak

Prikazan je postupak za generisanje nestrukturisanе deformabilne mreže koja se relativno lako generiše i oko najsloženijih konfiguracija. Ovako generisana mreža prati kretanje i deformaciju tela čime se pored oscilovanja aeroprofila kao krutog tela, može analizirati oscilovanje komandne površine i deformacija konture aeroprofila bez ograničenja amplitude. Uz navedene prednosti povećavaju se zahtevi za memorijskim prostorom i procesorskim vremenom, jer se koristi indirektno adresiranje za čuvanje potrebnih informacija o povezanosti mreže.

Nestrukturisana deformabilna mreža, generisana izloženim metodom, primenjena je u analizi transoničnih nestacionarnih dvodimenzionalnih strujanja opisanih Ojlerovim jednačinama, koje se rešavaju metodom konačnih zapremina.

Vršena je analiza rezultata dva testna primera. Poređenjem sa rezultatima drugih numeričkih metoda je dokazano da izložena metoda za generisanje nestrukturisanе deformabilne mreže korektno prikazuje promenu položaja i jačine udarnog talasa tokom vremena.

Dalji razvoj metode biće usmeren u pravcu generisanja adaptivne nestrukturisanе mreže, kod koje se samo u delovima strujnog polja sa velikim gradijentima strujnih veličina unose dodatne tačke i vrši ponovna podela na trougaone elemente da bi se dobila gušća mreža. Prednosti adaptivne mreže dolaze do izražaja naročito kod reflektovanja i interakcije udarnih talasa.

Literatura

- [1] JAMESON,A. *Successes and challenges in computational aerodynamics*. AIAA Paper 1987, no 87-1184.
- [2] JAMESON,A., CAUGHEY,D.A. *A finite volume method for transonic potential flow calculation*. Proc. AIAA. 3rd Computational Fluid Dynamics Conference, Albuquerque 1977, p.35-54.
- [3] BATINA,J.T. *Development of unstructured grid method for steady and unsteady aerodynamics analysis*. ICAS, 1990,p.1833-1843.
- [4] KOZIĆ,M. *Metod za rešavanje Ojlerovih jednačina primenjen na nestacionarna dvodimenzionalna transonična strujanja*. doktorska disertacija, Univerzitet u Beogradu, 1992.
- [5] JASWON,M.A. *Integral Equation Methods in Potential Theory and Elastostatics*. 1 st ed. Academic Press, 1977, ISBN 0-12-381050-7.
- [6] HUNT,B. *The Panel Method for Subsonic Flows: A Survey of Mathematical Formulations and Numerical Models and an Outline of the New British Aerospace Scheme*. Computational Fluid Dynamics, ed.W.Kollmann,p.100-166, Hemisphere Publishing Corporation 1980. ISBN 0-89116-171-6.
- [7] SCHMIDT,W.,JAMESON,A. *Euler Solvers as an Analysis Tool for Aircraft Aerodynamics*. Advances in Computational Transonics, ed.W.G.Habashi,p.371-404, Pineridge Press 1985. ISBN 0-906674-28-X.
- [8] VENKATAKRISHNAN,V., JAMESON,A. *Computation of unsteady transonic flows by the solution of Euler equations*. *AIAA Journal* 1988, vol.26, no.8, p.974-981.
- [9] GOORJIAN,P.M. *Computations of unsteady transonic flows*. *Advances in Computational Transonics*, ed.W.G.Habashi,p.215-255, Pineridge Press 1985. ISBN 0-906674-28-X.
- [10] MAGNUS,R.,YOSHIHARA,H. *Inviscid transonic flow over airfoils*. *AIAA Journal*, 1970,vol.8, no.12, p.2157-2162.

Rad primljen: 3.5.2000.god.