UDK: 519.876(047)=861
COSATI: 14-07, 12-01

Stabilnost linearnih singularnih sistema na konačnom vremenskom intervalu

Dr Dragutin Lj. Debeljković,dipl.inž. 1)
Mr Nikola Kablar,dipl.inž. 1)
Dr Đuro Koruga,dipl.inž. 1)
Dr Stevan A. Milinković,dipl.inž. 2)
Dr Mića B. Jovanović,dipl.inž. 2)

Razmatra se dinamika vremenski stacionarnih i nestacionarnih kontinualnih linearnih singularnih sistema. Za ovu klasu sistema formulisan je, izveden i dokazan ceo niz teorema, koje u formi dovoljnih uslova omogućavaju efikasno ispitivanje njihove stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu.

Ključne reči: **Singularni sistemi, linearna algebra, matrične metode, kriterijumi stabilnosti, neljapunovska stabilnost**

Uvod

SINGULARNI sistemi predstavljaju dinamičke sisteme opisane kombinacijom diferencijalnih (diferencnih) i algebarskih jednačina. Pitanja postojanja rešenja, njegove jedinstvenosti i određivanje konzistentnih početnih uslova koji generešu glatka (neimpulsna) rešenja znatno otežavaju njihovu analizu i sintezu.

Neka je vremenski kontinualni linearni singularni sistem opisan svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t)\,,\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{1}$$

ili:

$$\dot{\mathbf{x}}_1(t) = A_1\mathbf{x}_1(t) + A_2\mathbf{x}_2(t), \tag{2a}$$

$$\mathbf{0} = A_3\mathbf{x}_1(t) + A_4\mathbf{x}_2(t), \tag{2b}$$

u slobodnom radnom režimu, ili sa:

$$E\dot{\mathbf{x}}(t) = A\mathbf{x}(t) + B\mathbf{u}(t)\,,\quad \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0^* \tag{3}$$

u prinudnom radnom režimu, gde $E, A \in \Re^{n\times n}$ su konstantne matrice, sa matricom *E obavezno* singularnom. $B \in \Re^{n\times m}$, $\mathbf{u} \in \Re^m$ a $\mathbf{x} \in \Re^n$ je vektor stanja singularnog sistema.

Sistemi opisani jednačinama (1-3) poznati su u literaturi kao singularni ili deskriptor sistemi, ili kao sistemi sa polustanjem i konačno kao sistemi dati u generalisanoj formi modela u prostoru stanja. Oni se prirodno pojavljuju u mnogim tehničkim disciplinama, kao što su električna i magnetna kola, u dinamici letelica i robota, optimizacionim problemima, velikim sistemima i kao granični slučaj singularno-perturbovanih sistema. Prisutni su i u biologiji, ekonomiji i demografiji. Obiman pregled do danas postignutih rezultata na polju proučavanja ove klase sistema može se naći u dva broja poznatog časopisa *Circuit, Systems and Signal Processing* 1986, 1989 [1, 2], kao i u monogra-fijama, Debeljković et.al, 1996, 1998 [3].

U praksi je često od posebnog interesa, ne samo da se ispita stabilnost sistema po Ljapunovu, već je od daleko većeg značaja da se utvrdi da li trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja dosežu ili ostaju unutar ranije propisanih granica. Sistem može da bude stabilan u smislu Ljapunova, a potpuno neupotrebljiv sa stanovišta njegovih pokazatelja prelaznog procesa. Tu se u prvom redu misli na nedozvoljeni preskok ili neprihvatljivo dugo vreme smirenja. Zbog toga je sasvim opravdano da se kretanje sistema posmatra unutar unapred propisanih granica koje se mogu usvojiti u obliku hiper-cilindara u prostoru stanja koji mogu biti shavćeni kao skupovi dozvoljenih stanja u kojima se sistem može zadesiti. Isti ti skupovi mogu da budu stacionarni ili vremenski promenljivi i potrebno je da budu unapred definisani. Od posebnog je interesa da se i dinamičko ponašanje sistema posmatra na konačnom vremenskom intervalu.

Određivanje granica do kojih dostiže odziv sistema, bilo u slobodnom bilo u prinudnom režimu rada, predstavlja veoma značajan problem sa inženjersko-tehničke tačke gledišta. Uvažavajući ovu činjenicu, pojavio se veliki broj definicija praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Ove definicije se baziraju na unapred određenim granicama dozvoljenih početnih stanja sistema kao i na dozvoljenim granicama u kojima se očekuje kretanje razmatranog sistema. U inženjerskim primenama ova činjenica dobija posebno na težini, a nekada postaje i krucijalna kada se, na primer, radi o procenama kretanja sistema u prostoru stanja i neophodnosti uvođenja

1) Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
2) Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

u prostoru stanja i neophodnosti uvođenja adekvatnog upravljanja. Izučavanje koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu predstavlja poseban izazov za svakog istraživača, posebno kod singularnih sistema gde se ovakvi problemi izuzetno usložnjavaju, uvažavajući njihovu specifičnost.

Motivisani "kratkom diskusijom" praktične stabilnosti koja se pojavila u monografiji La Salle i Lefschet, 1961 [4], Weiss i Infante, 1965, 1967 [5, 6] uveli su ceo niz definicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu vremenski neprekidnih sistema, a na vremenski invarijantnim skupovima. Dalje proširenje ovih rezultata bilo je zahvaljujući Michelu [6], Grujiću, 1971 [8], Lashireru i Storyu, 1972 [9]. Praktičnu stabilnost prostih i povezanih sistema na vremenski promenljivim skupovima po prvi put su razmatrali Michel, 1970 [7] i (nešto kasnije) Grujić, 1975a [10]. Nešto opštije definicije stabilnosti ("praktična stabilnost sa vremenom smirenja", "praktična eksponencijalna stabilnost" itd.), a koje uključuju i mnoge prethodno iznete definicije, uveo je Grujić, 1971, 1975b, 1975c [8, 10 - 12]. Koncept "konačne stabilnosti", kao posebnog koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, uveli su Lashirer i Story, 1972 [9], a daljih rezultata bio je zahvaljujući Lamu i Weissu, 1974 [13].

U kontekstu praktične stabilnosti za singularne sisteme, različiti rezultati bili su, po prvi put, izvedeni u radovima Debeljkovića i Owensa [13, 14]. Analizu nelinearnih singularnih i implicitnih sistema, po prvi put je tretirao Bajić, 1988, 1992 [16, 17], a kroz generički kvalitativni i kvantitativni koncept koji, kao posebne slučajeve, uključuje i praktičnu i tehničku stabilnost sistema.

U ovom kratkom pregledu, pomenuti su samo rezultati vezani za različite klase vremenski neprekidnih singularnih sistema.

U ovom radu istražuje se problem dovoljnih uslova koji garantuju da će trajektorije autonomnog ili neautonomnog singularnog sistema ostati u unapred zadatom skupu stanja na konačnom vremenskom intervalu njegovog rada. Prema saznanjima autora ovim problemom, za ovu klasu sistema, se do sada niko nije bavio.

Oznake i preliminarni rezultati

Dinamičko ponašanje sistema (1-2) definisano je na vremenskom intervalu $J = \{t_0,\ t_0 + T\}$,gde T može biti bilo realan pozitivan broj bilo simbol $+\infty$, tako da se praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu mogu jednovremeno tretirati. Jasno je da $J \in R$.

Vremenski nepromenljivi skupovi uzeti kao granice do kojih dosežu trajektorije sistema, pri njegovom kretanju u prostoru stanja, su otvoreni, povezani i ograničeni. Indeks β se koristi i označava sva dozvoljena stanja sistema, a indeks α označava sva dozvoljena početna stanja sistema, tako da važi: $S_\alpha \subseteq S_\beta$. S_ε označava skup svih dozvoljenih upravljanja. U opštem slučaju, može da se napiše:

$$S_\rho = \left\{ \mathbf{x}(t) : \left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q < \rho\ , \forall t \geq t_0 \right\},\quad \mathbf{x}(t_0) \in W_k \setminus \{\mathbf{0}\} \tag{4}$$

gde se za realnu matricu Q pretpostavlja da je realna simetrična i pozitivno određena. Sa W_k označen je potprostor konzistentnih početnih uslova koji generiše glatka rešenja. Vektor početnih uslova je konzistentan ako postoji neprekidno, diferencijabilno rešenje singularnih sistema, datih jednačinama (1-3), pri čemu se posebno naglašava da, u opštem slučaju, konzistentni početni uslovi za sistem u slobodnom radnom režimu i odgovarajući u prinudnom radnom režimu ne moraju biti identični. Geometrijski prilaz određivanju konzistentnih početnih uslova dali su Owens, Debeljković, 1985 [18] određujući potprostor W_k kao graničnu vrednost rekurzivnog algoritma, u prostoru stanja, tipa:

$$W_0 = \Re^n,\ \ W_{j+1} = A^{-1}(EW_j),\ \ j \geq 0 \tag{5}$$

gde $A^{-1}(\cdot)$ označava inverzni lik od $(\cdot)$ pri dejstvu operatora A. Pokazano je, takođe, da potprostor W_k predstavlja skup vektora koji zadovoljavaju sledeću relaciju:

$$\left(I - \hat{E}^D \hat{E}\right)\mathbf{x}_0 = 0\ \text{, ili}\ \ W_k = \aleph\left(I - \hat{E}^D \hat{E}\right) \tag{6}$$

gde je: $\hat{E} = \left(cE - A\right)^{-1} E$. c je bilo koji realni skalar takav da uslov:

$$\det\left(cE - A\right) \neq 0\ \text{, ili}\ \ W_k \cap \aleph(E) = \{0\} \tag{7}$$

garantuje jedinstvenost rešenja generisanih iz W_k. Nulti prostor matrice F označen je sa $\aleph(F)$, a gornji indeks "D" se koristi da se ukaže na Drazinovu inverziju. Ako je matrica F reda $n\times n$, tada matrica F^D označava Drazinovu inverziju sa sledećim osobinama:

$$FF^D = F^D F,\ F^D F F^D = F^D,\ F^D F^{k+1} = F^k \tag{8}$$

gde je k indeks matrice F definisan kao najmanji nenegativni ceo broj takav da važi:

$$rank\ F^{j+1} = rank\ F^j \tag{9}$$

Neka $|\mathbf{x}|_{(\cdot)}$ označava bilo koju vektorsku normu (tj.,=1,2,∞) a $\|(\cdot)\|$ matričnu normu indukovanu tim vektorom. Ovde se koristi sledeća notacija: $|\,\mathbf{x}\,|_2 \overset{\Delta}{=} (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ a $\|\,(\cdot)\,\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}(A^* A)$. Gornji indeks * i T označava konjugovanu transpoziciju i transpoziciju, sledstveno.

Matrična mera se široko koristi kada su u pitanju različite klase sistema automatskog upravljanja. Matrična mera μ bilo koje matrice $A \in C^{n\times n}$ je definisana na sledeći način:

$$\mu(A) \overset{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{\|\, I + \varepsilon A \,\| - 1}{\varepsilon} \tag{10}$$

Matrična mera definisana u (10) može se razdeliti u sledeće tri forme u zavisnosti koja je norma upotrebljena, tako da se može pisati:

$$\mu_1(A) = \max_k \left(\operatorname{Re}(a_{kk}) + \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| \right) \tag{11}$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2} \max_i \lambda_i (A^* + A) \tag{12}$$

i:

$$\mu_\infty(A) = \max_i \left(\operatorname{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{k=1 \\ k\neq i}}^{n} |a_{ki}| \right) \tag{13}$$

Coppel, 1965 [19], ili Desoer i Vidysagar, 1975 [20].

Prethodni rezultati

Da bi se podrobno uočila geneza i primena koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu na singularne sisteme, izlažu se neophodne definicije, koje će se kasnije povezati sa odgovarajućim rezultatima, odnosno teoremama.

Definicije stabilnosti

Definicija 1. Sistem, dat jednačinom (1), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in W_k$ koji zadovoljava uslov:

$$\| \mathbf{x}_0 \|_Q^2 < \alpha \tag{14}$$

povlači da je:

$$\| \mathbf{x}(t) \|_Q^2 < \beta, \quad \forall t \in \tau \tag{15}$$

Debeljković, Owens, 1985 [14].

Definicija 2. Sistem, dat jednačinom (1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in W_k$ koji zadovoljava uslov:

$$\| \mathbf{x}_0 \|_Q^2 < \alpha \tag{16}$$

i egzistira neko $t^* \in \tau$, tako da je ispunjen uslov:

$$\| \mathbf{x}(t^*) \|_Q^2 \geq \beta \tag{17}$$

Owens, Debeljković, 1986 [15].

Za primenu ovog koncepta na singularne sisteme u obliku (2.a–2.b) pogodno je izvršiti blagu preformulaciju prethodnih *Definicija*, na sledeći način.

Definicija 3. Rešenja sistema, datog jednačinama (2.a–2.b), su *praktično stabilna* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta,\ \Gamma\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4])$, koji zadovoljava uslove:

$$\| \mathbf{x}_{10} \|^2 < \alpha_1, \quad \| \mathbf{x}_{20} \|^2 < \alpha_2 \tag{18}$$

povlači da je:

$$\| \mathbf{x}(t) \| < \beta, \quad \forall t \in \tau, \quad \beta_1 + \beta_2 < \beta \tag{19}$$

Debeljković et al., 1992 [21].

Definicija 4. Rešenja sistema, datog jed. (2.a – 2.b), su *praktično nestabilna* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha_1,\ \alpha_2,\ \beta_1,\ \beta_2,\ \beta,\ \Gamma\}$ ako i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4])$, koji zadovoljava uslove:

$$\| \mathbf{x}_{10} \|^2 < \alpha_1, \quad \| \mathbf{x}_{20} \|^2 < \alpha_2 \tag{20}$$

i egzistira neko $t^* \in \tau$, tako da je ispunjen uslov:

$$\| \mathbf{x}(t^*) \|^2 \geq \beta, \quad \beta_1 + \beta_2 < \beta \tag{21}$$

Debeljković et al., 1992 [21].

Definicija 5. Rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ sistema datog jednačinama (2.a – 2.b) je $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ - *ograničeno* ako, i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4])$ koji zadovoljava uslov:

$$\| \mathbf{x}_{10} \|^2 < \alpha, \quad \| \mathbf{x}_{20} \|^2 < \alpha\beta_2 / \beta_1 \tag{22}$$

Debeljković et al., 1993 [22].

Definicija 6. Rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ sistema datog jed. (2.a – 2.b) je $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ - *neograničeno* ako, i samo ako postoji $(t^*,\ \mathbf{x}_0) \in \tau \times \aleph([A_3 \quad A_4])$ takav da:

$$\| \mathbf{x}_{10} \|^2 < \alpha, \quad \| \mathbf{x}_{20} \|^2 < \alpha\beta_2 / \beta_1 \tag{23}$$

povlači da je:

$$\| \mathbf{x}_1(t^*, \mathbf{x}_0) \|^2 \geq \beta_1, \quad \underline{\vee} \ \| \mathbf{x}_2(t^*, \mathbf{x}_0) \|^2 \geq \beta_2 \tag{24}$$

Debeljković et al., 1993 [22].

Definicija 7. Sistem, dat jednačinom (1), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ ako i samo ako $\forall \mathbf{x}_0 \in W_k \cap\cap S_Q(\alpha)$ u trenutku $t = 0$, sledi da za $\forall t \in \tau$, svako rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0) \in S_Q(\beta)$, Debeljković et al., 1995b [23].

Definicija 8. Rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ sistema, datog jednačinom (1), je *praktično stabilno* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in W_k \cap S_Q(\alpha)$ u trenutku $t = 0$ i $\forall t \in \tau$, rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0) \in S_Q(\beta)$, Debeljković et al., 1995b [23].

Definicija 9. Rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ sistema, datog jednačinom (2.a – 2.b), je *praktično stabilno* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4]) \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_1/\beta_2)$ u trenutku $t = 0$ i $\forall t \in \tau$, rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0) \in S_1(\beta_1) \cap S_2(\beta_2)$, Debeljković et al., 1995b [23].

Odgovarajuće definicije praktične nestabilnosti su:

Definicija 10. Sistem, dat jednačinom (1), je *praktično nestabilan* u odnosu na $\{\tau,\alpha,\beta,Q\}$ ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in W_k \cap \cap S_Q(\alpha)$ u trenutku $t = 0$, i $\exists t^* \in \tau$ postoji rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ takvo da je $\mathbf{x}(t^*,\ \mathbf{x}_0) \notin S_Q(\beta)$, Debeljković et al.1995b [23].

Definicija 11. Rešenje sistema, datog jednačinama (2.a – 2.b), je *praktično nestabilano* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in W_k \cap S_Q(\alpha)$ u trenutku $t = 0$, i $\exists t^* \in \tau$ tako da $\mathbf{x}(t^*,\ \mathbf{x}_0) \notin S_Q(\beta)$.), Debeljković et al., 1995b [23].

Definicija 12. Rešenje $\mathbf{x}(t,\ \mathbf{x}_0)$ sistema,datog jednačinama (2.a – 2.b), je *praktično nestabilno* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ ako i samo ako $\mathbf{x}_0 \in \aleph([A_3 \quad A_4]) \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_1/\beta_2)$ u trenutku $t = 0$ i $\exists t^* \in \tau$, tako da $\mathbf{x}(t^*,\ \mathbf{x}_0) \notin S_1(\alpha) \cap S_2(\beta_2)$, Debeljković et al., 1995b [23].

Razmatraju se, dalje, linearni singularni sistemi, *u prinudnom radnom režimu*, opisani svojom vektorskom jednačinom stanja (3).

Definicija 13. Sistem, dat jednačinom (3), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ \varepsilon(t),\ Q\}$ ako i samo ako po-stoji $\mathbf{x}_0 \in W_k$ i vektorska funkcija $\mathbf{u}(t)$, koji zadovoljavaju:

$$\| \mathbf{x}_0 \|_Q^2 < \alpha, \quad \| B\mathbf{u}(t) \|^2 \leq \varepsilon(t) \tag{25}$$

povlače da je:

$$\| \mathbf{x}(t) \|_Q^2 < \beta, \quad \forall t \in \tau \tag{26}$$

Definicija 13. je prilagođena verzija definicije date u radu, Jovanović, Debeljković, 1996 [24].

Teoreme o stabilnosti

Teorema 14.1. Sistem, dat jednačinom (1), je *praktično stabilan* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\frac{\gamma_2(Q)}{\gamma_1(Q)} < \beta/\alpha \tag{27}$$

$$\Lambda(M)T + \ln\frac{\gamma_2(Q)}{\gamma_1(Q)} < \ln(\beta/\alpha),\quad \forall t \in \tau \tag{28}$$

gde je:

$$M = A^T PE + E^T PA \tag{29}$$

Debeljković, Owens, 1985 [14].

Teorema 2. Pretpostavlja se da je sledeća jednačina :

$$\mathrm{Rang}[A_3\ \ A_4] = \mathrm{Rang}\, A_4 = r \le n_2 \tag{30}$$

zadovoljena. Rešenja sistema, datog jednačinama (2.a – 2. b), su *praktično stabilna* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ I\}$, $\alpha < \beta_1$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\gamma_{\max}\, t < \ln(\beta_1/\alpha),\quad \forall t \in \tau \tag{31}$$

$$\| L \|^2 < \beta_2/\beta_1 \tag{32}$$

gde je:

$$\gamma_{\max} = \Lambda_1\left(\left(A_1^T + A_1\right)\right) + \Lambda_2\left(\left(L^T A_2^T + A_2 L\right)\right) \tag{33}$$

sa matricom L kao bilo kojim rešenjem sledeće jednačine:

$$0 = A_3 + A_4 L \tag{34}$$

Debeljković et al., 1992 [21].

Teorema 3. Pretpostavimo da je jednačina (30) zadovoljena. Rešenja sistema, datog jed. (2. a – 2. b), su *praktično nestabilna* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2,\ I\}$, $\alpha < \beta_1$, ako $\exists\delta \ni 0 < \delta < \alpha$ i $\exists t^* \in \tau$, tako da su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\gamma_{\min} t^* > \ln(\beta_1/\alpha) \tag{35}$$

$$\| L^{\#} \|^2 < \beta_1/\beta_2 \tag{36}$$

gde je:

$$\gamma_{\min} = \lambda_1(A_1^T + A) + \lambda_2(L^T A_2^T + A_2 L) \tag{37}$$

sa matricom L kao bilo kojim rešenjem jed. (34), gde:

$$L^{\#} = (L^T L)^{-1} L^T \tag{38}$$

označava pseudoinverz matrice L, Debeljković et al., 1992 [21].

Teorema 4. Pretpostavimo da je jednačina (30) zadovoljena. Sistem, dat jednačinama (2. a – 2. b), ima tada rešenja koja su $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ – *ograničena*, $\alpha \le \beta_1$, ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\Lambda t < \ln(\beta_1/\alpha),\quad \forall t \in \tau \tag{39}$$

$$\|L\|^2 \le \beta_2/\beta_1 \tag{40}$$

gde je $\Lambda = \Lambda(Z)$, sa matricom Z definisanom na sledeći način:

$$Z = (A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2 L), \tag{41}$$

Debeljković et al., 1993 [22].

Teorema 5. Pretpostavimo da je jednačina (30) zadovoljena. Sistem, dat jednačinama (2. – 2. b), ima tada rešenja koja su $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ – *neograničena*, $\alpha \le \beta_1$, ako $\exists\delta \ni 0 < \delta < \alpha$ i $\exists t^* \in \tau$, $t^* \le +\infty$, tako da su ispunjeni sle-deći uslovi:

$$\lambda\, t^* > \ln(\beta_1/\delta) \tag{42}$$

gde je $\lambda = \lambda(Z)$, sa matricom Z definisanom jed. (41), Debeljković et al., 1993 [22].

Dokazi ovih teorema se ne navode i u osnovi se mogu naći u Debeljković et.al., 1996, [23a] a identični su dokazima *Teorema* 2–3, u kojima je neophodno samo staviti $P = I_{n_1}$. Poredeći pomenute teoreme, lako se uočava da su uslovi dati *Teoremama* 4 – 5 daleko blaži, pa ih je u tom smislu i lakše ispuniti.

Teorema 6. Pretpostavimo da je jednačina (30) zadovoljena. Tada je, pod uslovom da su zadovoljeni uslovi *Teoreme* 4, *procena potencijalnog domena praktične stabilnosti* u odnosu na $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ Debeljković et al., 1993 [22].

Dokaz sledi direktno iz dokaza *Teoreme* 4.

Razmotrimo konačno, do kakvih se rezultata dolazi ako se iskoriste *Definicije* 7 – 12.

Vezano za određivanje odgovarajućih potencijalnih domena $\{(\cdot)\}$ – stabilnosti, mogu se dati neposredno sledeći rezultati.

Neka je $\nabla = (\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q)$. Tada je potencijalni domen $\{\tau,\ \alpha,\ \beta,\ Q\}$ – *praktične stabilnosti* definisan kao:

$$\mathrm{D}(\nabla) = \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}_0 \in \mathrm{M} \cap S_Q(\alpha): \\ \exists \mathbf{x}(\mathrm{t},\mathbf{x}_0) \ni \forall t \in \tau, \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) \in S_Q(\beta)\end{array}\right\} \tag{43}$$

Neka je dalje $\Delta_\tau = (\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2)$. Tada je potencijalni domen $\{\tau,\ \alpha,\ \beta_1,\ \beta_2\}$ – *praktične stabilnosti* definisan kao:

$$\mathrm{D}(\Delta_\tau) = \left\{\begin{array}{l}\mathbf{x}_0 \in \mathrm{M} \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_1/\beta_2): \\ \exists \mathbf{x}(\mathrm{t},\mathbf{x}_0) \ni \forall t \in \tau, \mathbf{x}(t,\mathbf{x}_0) \in S_1(\beta_1) \cap S_2(\beta_2)\end{array}\right\} \tag{44}$$

Jedan od osnovnih zadataka jeste iznalaženje odgovarajućih procena datih skupova, korišćenjem $\mathrm{D}_e(\cdot) \subseteq \mathrm{D}(\cdot)$, što će biti predmet narednih razmatranja.

Nadalje (30) povlači da je:

$$\mathrm{M} = \aleph([A_3\ \ A_4]) \tag{45}$$

za sistem dat jednačinama (2. a – 2. b), što je već i ranije dokumentovano. Iz (31) dalje sledi da, ako postoje rešenja sistema datog jednačinama (2. a – 2. b), postojaće i rešenja $\mathbf{x}(t)$ čije su komponente povezane sledećom relacijom:

$$\mathbf{x}_2(t) = L x_1(t) \tag{46}$$

Ona rešenja sistema, datog jednačinama (2. a – 2. b), koja zadovoljavaju uslov da kretnja $\mathbf{x}_2(t)$ asimptotski teži nuli, moraju takođe da zadovolje algebarsko ograničenje nametnuto jed. (2. b). Pošto je:

$$\aleph([L \quad -I]) \subseteq \aleph([A_3 \quad A_4]) = \mathsf{M} \tag{47}$$

a kada je zadovoljena jednačina (31), mogući su sledeći zaključci, pod uslovom da je zadovoljena (30):

1. Postoje rešenja sistema datog jednačinama (2. a – 2. b) koja pripadaju skupu:

$$\mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \{\aleph([L \quad -I_{n_2}])\} \tag{48}$$

2. Ako su rešenja sistema datog jednačinama (2. a - 2. b), čiji kovektor stanja $\mathbf{x}_2$(t) asimptotski teži nuli kada vreme neograničeno raste, $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ - *praktično stabilna*, tada je procena *potencijalnog domena* $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ - *praktične stabilnosti* određena sa:

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_e(\nabla) = \\ &= \left\{\mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^n: \ \ \mathbf{x}(t, \mathbf{x}_0) \in \left\{\aleph\left(\left[L \ \ -I_{n_2}\right]\right) \cap S_Q(\alpha)\right\}\right\}\end{aligned} \tag{49}$$

Da bi se formulisale odgovarajuće teoreme, pogodno je usvojiti agregacionu funkciju u obliku:

$$\begin{aligned}&V\left(\mathbf{x}(t)\right) = \mathbf{x}^T(t) Q \mathbf{x}(t) = \mathbf{x}_1^T(t) P \mathbf{x}_1(t) \\ &Q = \mathrm{diag}\left[P \quad 0_{n_2}\right]\end{aligned} \tag{50}$$

gde je Q realna, simetrična pozitivno poluodređena, a P realna, simetrična i pozitivno određena matrica.

Totalni izvod agregacione funkcije, duž rešenja sistema datog jednačinama (2. a – 2. b), dat je sa:

$$\begin{aligned}\dot{V}\left(\mathbf{x}(t)\right) &= \mathbf{x}_1^T(t)(A_1^T P + P A_1)\mathbf{x}_1(t) + \\ &+ \mathbf{x}_2^T(t) A_2^T P \mathbf{x}_1(t) + \mathbf{x}_1^T(t) P A_2 \mathbf{x}_2(t)\end{aligned} \tag{51}$$

Teorema 7. Pretpostavimo da je zadovoljen uslov dat jed. (30) i neka je matrica Q definisana kako je dato jednačinom (50). Tada postoje $\{\tau, \alpha, \beta, Q\}$ – *praktično stabilna* rešenja sistema datog jednačinama (2. a – 2. b), koja zadovoljavaju pretpostavku o asimptotskoj osobini kovektora stanja $\mathbf{x}_2(t)$, ako je ispunjen sledeći uslov:

$$\mu\, t \le \ln(\beta/\alpha), \quad \forall t \in \tau \tag{52}$$

gde $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$, $\beta \ge \alpha$ i $\mu = \Lambda(Z)/\Lambda(P)$ kada je $\Lambda(Z) \le 0$ ili $\mu = \Lambda(Z)/\lambda(P)$, kada je $\Lambda(Z) > 0$, gde je matrica Z data sledećim izrazom:

$$Z = (A_1 + A_2 L)^T P + P(A_1 + A_2), \tag{53}$$

gde matrica L zadovoljava (31). Ako je $\Lambda(Z) \le 0$, tj. ako je matrica Z negativno poluodređena, tada je $\tau = [0,+\infty[$, i moguće je usvojiti $\alpha = \beta$. Ako je $\Lambda(Z) > 0$, tada je $\tau = [0, T[$, $T < +\infty$, a da bi se obezbedilo da $T > 0$, mora da bude $\alpha < \beta$, Debeljković et al., 1995.b [23].

Teorema 8. Pretpostavimo da je zadovoljen uslov dat jednačinom (30) i neka je matrica Q definisana kako je dato sa (50). Tada postoje $\{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ – *praktično stabilna* rešenja sistema, datog jed. (2. a – 2. b), koja zadovoljavaju (46), ako su ispunjeni sledeći uslovi:

$$\mu\, t \le \ln(\beta_1/\eta\alpha) \tag{54}$$

$$\|L\|^2 \le \beta_2/\beta_1 \tag{55}$$

gde je $\alpha, \beta \in \mathsf{R}$, $\beta \ge \alpha$, i $\mu = \Lambda(Z)/\Lambda(P)$ kada je $\Lambda(Z) \le 0$ ili $\mu = \Lambda(Z)/\lambda(P)$ kada je $\Lambda(Z) > 0$, gde je matrica Z definisana jednačinom (53), a matrica L zadovoljava (31). Štaviše, ako je $\Lambda(Z) \le 0$, tj. ako je matrica Z negativno poluodređena, tada je $\tau \in [0,+\infty[$, i moguće je usvojiti $\beta = \eta\alpha$, gde je $\eta = \Lambda(P)/\lambda(P)$. Ako je $\Lambda(Z) > 0$, tada $\tau = [0, T[$, $T < +\infty$, a da bi se obezbedilo da $T > 0$, mora se usvojiti $\beta > \eta\alpha$. Debeljković et al., 1995.b [23].

Teorema 9. Pretpostavimo da je zadovoljen uslov dat jednačinom (30) i neka je matrica Q definisana kako je dato u (50). Tada postoje $\{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ – *praktično nestabilna* rešenja sistema, datog jed. (2. a – 2. b), gde $\alpha \le \beta_1$, ako je matrica Z, definisana jednačinom (53), pozitivno određena sa matricom L koja zadovoljava (31) i za neko $\delta \ni 0 < \delta < \alpha$, važi:

$$T > \theta^{-1} \ln(\beta_1 / \zeta\delta) \tag{56}$$

gde je $\zeta = \lambda(P)/\Lambda(P)$ i $\theta = \lambda(Z)/\Lambda(P)$,Debeljković et al., 1995.b [23].

Teorema 10. Neka je $\Delta_\tau = (\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2)$ i neka su zadovoljeni svi uslovi *Teoreme* 8. Procena $\mathsf{D}_e(\Delta_\tau)$ potencijalnog domena $\mathsf{D}(\Delta_\tau)$ – $\{\tau, \alpha, \beta_1, \beta_2\}$ – *praktične stabilnosti* sistema, datog jed. (2. a – 2. b), može se definisati na sledeći način:

$$\begin{aligned}&\mathrm{D}_e(\Delta_\tau) = \\ &= \left\{\begin{aligned}&\mathbf{x}(t) \in \mathrm{R}^n: \\ &\mathbf{x}(t) \in \left\{\aleph\left(\left[L \ \ -I_{n_2}\right]\right) \cap S_1(\alpha) \cap S_2(\alpha\beta_1/\beta_2)\right\}\end{aligned}\right\}\end{aligned} \tag{57}$$

gde je $\mathsf{D}(\Delta_\tau)$ definisano jednačinom (43), Debeljković et al., 1995b [23].

Za potrebe narednih izlaganja razmatra se linearni singularni sistem u prinudnom radnom režimu, jednačina (3), pripadajuća *Definicija* 3 i sledeća pretpostavka:

Pretpostavka 1. Vektorska funkcija $\varphi(t) = B\mathbf{u}(t)$ je takva da obezbeđuje jednakost skupova konzistentnih početnih stanja za singularni sistem kako u slobodnom, tako i u prinudnom radnom režimu.

Sada se može dati sledeća teorema.

Teorema 11. Neka važi p*retpostavka* 1. Da bi sistem, dat jednačinom (3) bio *praktično stabilan* u odnosu na $\{\tau, \alpha, \beta, \varepsilon(t), Q\}$, dovoljno je da bude ispunjen sledeći uslov:

$$\alpha\, e^{\frac{1}{2}\Lambda(M)(t-t_0)} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\theta)\, e^{\frac{1}{2}\Lambda(M)(t-\theta)} d\theta < \beta, \quad \forall t \in \tau \tag{58}$$

pri čemu je matrica M definisana sa:

$$M = M^T = A^T E + E^T A \tag{59}$$

Jovanović, Debeljković, 1996 [24] i Debeljković, Jovanović, 1997 [25].

Glavni rezultati

Stacionarni singularni sistemi

Teorema 12. Sistem dat jednačinom (1) stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\tau,\alpha,\beta,I\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu(\Omega)} < \sqrt{\beta/\alpha},\ \forall t \in \tau \tag{60}$$

gde je:

$$\widehat{\Omega} = \widehat{E}^D \widehat{A}, \widehat{A} = (cE - A)^{-1} A \tag{61}$$

Dokaz. Kretanje sistema datog jednačinom (1), za proizvoljno $x_0 \in W_k$, je dato sa:

$$x(t) = e^{\widehat{E}^D \widehat{A} t} x_0 = \Phi_\zeta(t) x_0 \tag{62}$$

Određujući norme obeju strana jednačine (62), dobija se:

$$\|x(t)\| \le \|\Phi_\zeta(t)\| \cdot \|x_0\| \tag{63}$$

a korišćenjem *Definicije 1* , dobija se:

$$\|x(t)\| \le \|\Phi_\zeta(t)\| \sqrt{\alpha} \tag{64}$$

odnosno:

$$\|x(t)\| \le \sqrt{\beta/\alpha}\left(\sqrt{\alpha}\right) < \sqrt{\beta},\ \forall t \in \tau \tag{65}$$

što je i trebalo pokazati. S druge strane, dobro je poznato da važi, Coppel, 1965 [19]:

$$\|\Phi(t)\| \le e^{\mu(\Omega)t} \tag{66}$$

odnosno:

$$\|x(t)\| \le \|\Phi_\zeta(t)\| \cdot \|x_0\| \le e^{\mu\left(\widehat{E}^D \widehat{A}\right)t}\left(\sqrt{\alpha}\right) \tag{67}$$

a korišćenjem *Definicije 1* i konačno:

$$\|x(t)\| < \beta,\ \forall t \in \tau \tag{68}$$

što je i trebalo pokazati.
Za naredna izvođenja, potrebno je blago preformulisati *Definiciju 13*, pa sledi:

Definicija 14. Sistem dat jednačinom (3), pri B = I je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na $\{\tau,\alpha,\beta,\varepsilon_i,I\}$, $\alpha < \beta, i = 0,1,2,...,k$, ako i samo ako za $\|x_0^*\| < \alpha$, $x_0^* \in W_k$ i $\|\widehat{u}^i(t)\| \le \varepsilon_i$, $\forall t \in \tau$, povlači: $\|x(t)\| < \beta$, $\forall t \in \tau$, gde $(\,.\,)^{(i)}$ označava vremenske izvode.

Teorema 13. Sistem dat jednačinom (3), pri B = I, je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na: $\{\tau,\alpha,\beta,\varepsilon_i,I\}, \alpha < \beta,\ i = 0,1,2,...,k$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu\left(\widehat{E}^D \widehat{A}\right)t} < \frac{\beta - \varepsilon_0 \|\widehat{A}^D\|\left(1 + \|\widehat{E}\| \cdot \|\widehat{E}^D\|\right)}{\|\widehat{E}^D\|\left(\|\widehat{E}\|\alpha + \varepsilon_0\right)} \tag{69}$$

Dokaz. Kretanje razmatranog sistema u prostoru stanja dato je sa:

$$\begin{aligned} x(t) &= e^{\widehat{E}^D \widehat{A} t} \widehat{E}\widehat{E}^D x_0^* \\ &+ e^{\widehat{E}^D \widehat{A} t} \int_0^t e^{\widehat{E}^D \widehat{A}\theta} \widehat{E}^D \widehat{u}(\theta) d\theta \\ &+ (I - \widehat{E}\widehat{E}^D) \sum_{i=0}^{k-1} (-1)^i (\widehat{E}\widehat{A}^D)^i \widehat{A}^D \widehat{u}^i(t) \end{aligned} \tag{70}$$

gde je:

$$\widehat{u}(t) = (cE + A)^{-1} u(t), c \in C \tag{71}$$

Uz pretpostavku da je upravljačko dejstvo $u(t)$ takvo da važi:

$$u^i(t) \equiv 0,\ \forall i = 1,2,...,k \tag{72}$$

normirajući obe strane jednačine (70) i koristeći Coppelovu nejednakost, lako se dobija:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\le e^{\mu(\widehat{E}^D \widehat{A})t}\left(\|\widehat{E}\widehat{E}^D\|\alpha + \|\widehat{E}^D\|\varepsilon_0\right) \\ &+ \left\|\left(I - \widehat{E}\widehat{E}^D\right)\right\| \cdot \|\widehat{A}^D\| \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{73}$$

ili:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| &\le e^{\mu(\widehat{E}^D \widehat{A})t}\left(\|\widehat{E}\|\alpha + \varepsilon_0\right)\|\widehat{E}^D\| \\ &+ \left(1 + \|\widehat{E}\| \cdot \|\widehat{E}^D\|\right)\|\widehat{A}^D\| \varepsilon_0 \end{aligned} \tag{74}$$

Koristeći baziènu jednačinu ove teoreme, lako se uviđa da važi:

$$\|x(t)\| < \beta,\ \forall t \in \tau \tag{75}$$

što je trebalo i pokazati.

Nestacionarni singularni sistemi

Neka je nestacionarni, linearni, singularni sistem opisan svojom vektorskom diferencijalnom jednačinom stanja:

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0 \tag{76a}$$

u slobodnom radnom režimu, i sa :

$$E(t)\dot{\mathbf{x}}(t) = A(t)\mathbf{x}(t) + B(t)\mathbf{u}(t),\ \mathbf{x}(t_0) = \mathbf{x}_0^* \tag{76b}$$

u prinudnom radnom režimu, sa matricama koje imaju isti značaj i red, kao i u stacionarnom slučaju.

Definicija 15. Sistem dat jednačinom (76. a) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na $\{J,\alpha,\beta,Q(t)\}$, $\alpha < \beta$ ako, i samo ako postoji $\mathbf{x}_0 \in W_k$ koje zadovoljava $\|\mathbf{x}_0\|_Q^2 < \alpha$ povlači: $\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 < \beta, \forall t \in J$.

NAPOMENA: Kvadratna forma $\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2$ je definisana sa:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 = \mathbf{x}^T(t) Q(t) \mathbf{x}(t) \tag{77}$$

gde je matrica $Q(t)$ pozitivno određena na skupu konzistentnih početnih uslova i koja zadovoljava $Q(t)=E^T(t)P(t)E(t)$, gde je matrica $P(t)=P^T(t)>0$ proizvoljna, simetrična, pozitivno određena, realna matrica.

Rezultati u nastavku ne zavise od indeksa sistema.

Teorema 14. Sistem dat jednačinom (76. a) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na: $\{J,\alpha,\beta,Q(t)\}$, $\alpha<\beta$, $Q(t) = Q^T(t) > 0$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\alpha e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(M(t))dt} < \beta, \quad \forall t \in J \tag{78}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}\big(M(t)\big) = \max\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T(t)M(t)\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}(t) \in W_k \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ and \ \ \mathbf{x}(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) = 1 \end{array} \right\} \tag{79}$$

sa matricom $M(t)$ definisanom na sledeći način:

$$\begin{aligned} M(t) = [&A^T(t)P(t)E(t) + \dot{E}(t)P(t)E(t) + \\ &+E^T(t)\dot{P}(t)E(t) + E^T(t)P(t)\dot{E}(t) + \\ &+E^T(t)P(t)A(t)] \end{aligned} \tag{80}$$

Dokaz. Za razmatrani sistem, usvaja se kvazi-Ljapunovljeva funkcija sledećeg oblika:

$$V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) \tag{81}$$

a nakon njenog diferenciranja duž trajektorija razmatranog sistema dobija se:

$$\dot{V}\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)M(t)\mathbf{x}(t) \tag{82}$$

Integraljenjem prethodne jednačine, dobija se:

$$V(t,\mathbf{x}(t)) \le e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(M(t))dt} V(t_0,\mathbf{x}_0) \tag{83}$$

a pošto važi:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 = V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) \tag{84}$$

i:

$$\|\mathbf{x}_0\|_Q^2 = V\big(t_0,\mathbf{x}_0\big) = \mathbf{x}^T(t_0)E^T(t_0)P(t_0)E(t_0)\mathbf{x}(t_0) \tag{85}$$

nejednakost (83) postaje:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 \le e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(M(t))dt} \|\mathbf{x}_0\|_Q^2 \tag{86}$$

Koristeći početni uslov za neko $t_0 \in J$, i neko $(t_0, \mathbf{x}_0)$, uz $V(t_0, \mathbf{x}_0)<\alpha$, jednačina (86) postaje:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 < e^{\int_{t_0}^{t} \Lambda(M(t))dt} \alpha \tag{87}$$

što prema uslovu *Teoreme* daje:

$$\|\mathbf{x}(t)\|_Q^2 < \beta \tag{88}$$

što je i trebalo pokazati, čime je i završen dokaz ove teoreme.

Na sličan način, ovaj se rezultat može proširiti na singularne, nestacionarne sisteme koji rade u prinudnom radnom režimu.

Definicija 16. Sistem dat jednačinom (76.b) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na $\{J,\alpha,\beta,\varepsilon(t),Q(t)\}$, $\alpha<\beta$, $Q(t)=Q^T(t)>0$, $\alpha<\beta$, ako i samo ako postoji vektor konzistentnih početnih uslova $\mathbf{x}_0 \in W_k$ i vektorska funkcija $\mathbf{u}(t)$, koji zadovoljavaju sledeće uslove $\|\mathbf{x}_0\|_Q < \alpha$, $\|B(t)\mathbf{u}(t)\|_Q \le \varepsilon(t)$ a što povlači $\|\mathbf{x}(t)\|_Q < \beta, \forall t \in J$.

Teorema 15. Sistem dat jednačinom (2b) je stabilan na konačnom vremenskom intervalu, u odnosu na $\{J,\alpha,\beta,\varepsilon(t),Q(t)\}$, $\alpha<\beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\alpha e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t} \Lambda(M(t))dt} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau) e^{-\frac{1}{2}\int_{t}^{\tau} \Lambda(M(t))dt} d\tau < \beta, \quad \forall t \in J \tag{89}$$

gde je:

$$\Lambda_{\max}\big(M(t)\big) = \max\left\{ \begin{array}{l} \mathbf{x}^T(t)M(t)\mathbf{x}(t) : \mathbf{x}(t) \in W_k \setminus \{\mathbf{0}\}, \\ and \ \ \mathbf{x}(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) = 1 \end{array} \right\} \tag{90}$$

sa matricom $M(t)$ definisanom na sledeći naćin:

$$\begin{aligned} M(t) = [&A^T(t)P(t)E(t) + \dot{E}(t)P(t)E(t) + \\ &+E^T(t)\dot{P}(t)E(t) + E^T(t)P(t)\dot{E}(t) + \\ &+E^T(t)P(t)A(t)] \end{aligned} \tag{91}$$

Dokaz. Za razmatrani sistem usvaja se kvazi-Ljapunovljeva funkcija u sledećem obliku:

$$V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) \tag{92}$$

a posle njenog diferenciranja po vremenu, dobija se:

$$\begin{aligned} &\dot{V}\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)M(t)\mathbf{x}(t) + \\ &+2\big(B(t)\mathbf{u}(t)\big)^T P(t)E(t)\mathbf{x}(t) \end{aligned} \tag{93}$$

gde je matrica $M(t)$ data ranije, jednačinom (91).

Može da se piše da je:

$$\big(B(t)\mathbf{u}(t)\big)^T = \varepsilon(t) \tag{94}$$

kao i:

$$\begin{aligned} \|E(t)\mathbf{x}(t)\| &= \sqrt{\mathbf{x}^T(t)E^T(t)E(t)\mathbf{x}(t)} = \\ &= P^{-\frac{1}{2}}(t)\sqrt{V[t,x(t)]} \end{aligned} \tag{95}$$

Jednačina (93), koristeći (90 i 91), postaje:

$$\dot{V}\big(t,\mathbf{x}(t)\big) - \Lambda(M(t))V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) \le 2\varepsilon(t)P^{1/2}(t)V^{1/2}\big(t,\mathbf{x}(t)\big) \tag{96}$$

Deleći jednačinu (96) sa $2\sqrt{V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)}$ i transformišući $\mathbf{y}(t) = \sqrt{V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)}$, u $\dot{\mathbf{y}}(t) = \dfrac{1}{2\sqrt{V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)}}$, dobija se:

$$\dot{\mathbf{y}}(t) - \frac{1}{2}\Lambda\big(M(t)\big)\mathbf{y}(t) \le \varepsilon(t)P^{1/2}(t) \tag{97}$$

koja, u slučaju da važi jednakost, predstavlja običnu diferencijalnu jednačinu, čije je rešenje dato sa:

$$\mathbf{y}(t) = e^{-\int_{t_0}^{t} f_1(\xi)d\xi} \left[c + \int_{t_0}^{t} \psi_1(\tau) e^{\int_{t_0}^{\tau} f_1(\xi)d\xi} d\tau \right] \tag{98}$$

gde c označava proizvoljnu konstantu.

U ovom slučaju, dobija se dalje:

$$f_1(t) = -\frac{1}{2}\Lambda\big(M(t)\big) \quad \text{i} \quad \psi_1(t) = \varepsilon(t)P^{1/2}(t) \tag{99}$$

što shodno jednačinama (98 i 99) daje:

$$\mathbf{y}(t) = e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(M(t))dt} \left[c + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)P^{1/2}(t) e^{-\frac{1}{2}\int_{t_0}^{\tau}\Lambda(M(t))dt} d\tau \right] \tag{100}$$

odnosno:

$$\mathbf{y}(t) = ce^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(M(t))dt} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)P^{1/2}(t) e^{-\frac{1}{2}\int_{tt}^{\tau}\Lambda(M(t))dt} d\tau \tag{101}$$

Ako se usvoji:

$$Q(t)=E^T(t)P(t)E(t) \tag{102}$$

tada je:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q^2 = V\big(t,\mathbf{x}(t)\big) = \mathbf{x}^T(t)E^T(t)P(t)E(t)\mathbf{x}(t) \tag{103}$$

tj.

$$\mathbf{y}(t) = \sqrt{V\big(t,\mathbf{x}(t)\big)} = \left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q \tag{104}$$

tako:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q = ce^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(M(t))dt} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)P^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\int_{tt}^{\tau}\Lambda(M(t))dt} d\tau \tag{105}$$

Ako se sada vratimo na nejednakost (97) dovoljno je u prethodnoj jednačini znak jednakosti zameniti znakom nejednakosti. Koristeći početni uslov, lako se uviđa da važi: $\left\|\mathbf{x}_0\right\|_Q = c$. Ako se dalje usvoji: $\left\|\mathbf{x}_0\right\|_Q = c$, rešenje diferencijalne nejednakost (97) dobija sledeću formu:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q \le \left\|\mathbf{x}_0\right\|_Q e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(M(t))dt} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)P^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\int_{t}^{\tau}\Lambda(M(t))dt} d\tau \tag{106}$$

Koristeći početni uslov, dat sa $\left\|\mathbf{x}_0\right\|_Q < \alpha$, dobija se:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q < \alpha e^{\frac{1}{2}\int_{t_0}^{t}\Lambda(M(t))dt} + \int_{t_0}^{t} \varepsilon(\tau)P^{1/2} e^{-\frac{1}{2}\int_{t}^{\tau}\Lambda(M(t))dt} d\tau \tag{107}$$

što, koristeći bazični uslov Teoreme, konačno daje:

$$\left\|\mathbf{x}(t)\right\|_Q < \beta \tag{108}$$

što je i trebalo pokazati.

Zaključak

U prvom delu rada je data hronološki sređena rekapitulacija najznačajnijih radova autora vezanih za izučavanje dinamičkog ponašanja linearnih stacionarnih singularnih sistema na konačnom vremenskom intervalu. U drugom delu rada razmatran je sličan problem ali za klasu složenijih sistema automatskog upravljanja, koje karakteriše vremenska zavisnost parametara procesa. Izvedeni su dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu ove klase sistema i ukazano na njihovu primenljivost u širokom spektru savremenih tehničkih sistema. Ova problematika razmatrana je kako za autonomne, tako i za neautonomne singularne sisteme automatskog upravljanja.

Literatura

[1] *Circuits, Systems and Signal Processing*. Special Issue on Semistate Systems, 5 (1) (1986).

[2] *Circuits, Systems and Signal Processing*. Special Issue: Recent Advances in Singular Systems, 8 (3) (1989).

[3] DEBELJKOVIĆ,D.LJ.,.KABLAR,N.A. *Finite time stability of linear singular systems : Bellman - Gronwall approach.* Proc. ACC 99, San Diego (USA), 1999, June 2-4, p.1803-1806.

[4] LA SALLE, LEFSCHET S. (1961). *Stability by Lyapunov's Direct Method*. Academic Press, New York.

[5] WEISS,L., INFANTE E.F. *On the Stability of Systems Defined over Finite Time Interval.* Proc. National Acad. Science, 1965, vol.54, no.1, p.44–48.

[6] WEISS,L., INFANTE,E.F. Finite Time stability under Perturbing Forces on Product Spaces. *IEEE Trans. on Automat. Cont*., 1967, AC-12**,** no.1, p.54–59.

[7] MICHEL,A.N. (1970). Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems. *Int. J. Control,* 1970, vol.11, no.4, p.703-715.

[8] GRUJIĆ,LJ.T. *On Practical Stability.* 5th Asilomar Conf. on Circuits and Systems, USA, 1971, p.174–178.

[9] LASHIRER,A.M., STORY,C. Final-Stability with Applications. *J. Inst. Math. Appl*., 1972, vol.9, p.379–410.

[10] GRUJIĆ,LJ.T. Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets. *Int. J. Control,* 1975a, vol.21,. no.3, p.401-415.

[11] GRUJIĆ,LJ.T. Practical Stability with Settling Time on Composite Systems. *Automatika* (YU), T. P. 9, 1975b, p.1–11.

[12] GRUJIĆ,LJ.T. Uniform Practical and Finite-Time Stability of Large-Scale Systems*. Int. J. System Science*, 1975, vol.6, no.2, p.181–195.

[13] LAM,L., WEISS,L. *Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets*. J. Franklin Inst., 1975c, vol.9, p. 415–421.

[14] DEBELJKOVIĆ,D.LJ.,.OWENS,D.H. *On practical stability of singular systems*. Proc. Melecon Conf .85, October 85, Madrid (Spain) pp.103-105.

[15] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor Systems*. Proc. 25th Conference on Decision and Control, Athens, Greece, 1986, p.2138–2139.

[16] BAJIĆ,V.B. Generic Stability and Boundedness of Semistate Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 5 1988, vol.5, no.2, p.103–115.

[17] BAJIĆ,V.B. *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Metho.,* SACAN, Link Hills, RSA, 1982.

[18] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. Consistency and Liapunov stability of linear descriptor systems: a Geometric analysis. IMA, Journal of Math. Control and Information, 1985, no.2, p.139-151.

[19] COPPEL,W.A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations***.** Boston: D.C. Heath, 1965.

[20] DESOER,C.A., VIDYSAGAR,M. *Feedback Systems: Input - Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

[21] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GAJIĆ,Z. *Further Results in Non-Lyapunov Stability and Unstability of Regular and Irregular Generalized State Space Systems*. Proc. 4th Conference SAUM, Kragujevac, Yugoslavia 1992, p.316–333.

[22] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GAJIĆ,Z., PETROVIĆ,B. *Boundedness and Existence of Solutions of Regular and Irregular Singular Systems*. Publications of Faculty of Electrical Eng. Series: Automatic Control, Belgrade (YU), 1993, no.1, p. 69–78.

[23] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B.,.GRGIĆ,A.U., MILINKO-VIĆ,S.A. *Non-Lyapunov stability and instability robustness consideration for linear singular systems*. Proc. 3-rd ECC, Roma (Italy), September 5-8, 1995.b, p. 1373-1379.

[23a]DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Kontinualni singularni sistemi autopmatskog upravljanja***.** GIP Kultura, Beograd, 1996.

[24] JOVANOVIĆ,M.R., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Finite-time Stability under Perturbing Forces of Linear Singular Systems*. Proc. XL Conference ETRAN, Budva, June 1996.

[25] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANOVIĆ,M.R. *Non-Lyapunov stability consideration of linear descriptor systems operating under perturbing forces.* AMSE – Advances in Modeling and Analysis, (France), Part: C, 1997, vol.49, no.1-2, p.1-8.

[26] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., BAJIĆ,V.B., GRGIĆ,A.U., MILINKOVIĆ,S.A. *Non-Lyapuonov stability and instability robustness consideration for linear descriptor systems*. Advances in Modelling and Analysis, AMSE Periodicals, 1995a, vol.49, no.1, p.59-64.

[27] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., LAZAREVIĆ,M.P., KORUGA,Đ., TOMAŠEVIĆ,S. *Finite time stability of singular systems operating under perturbing forces: Matrix measure approach.* Proc. AMSE Conference, Melbourne (Australia), October 29 – 31, 1997, pp.447-450.

[28] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., JOVANOVIĆ,M.B., JACIĆ,LJ.A., MILINKOVIĆ,A**.** *Diskretni singularni sistemi autopmatskog upravljanja.* GIP Kultura, Beograd, 1988

[29] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., KABLAR,N.A. *On necessary and sufficient conditions of linear singular systems stability operating on finite time interval.* Proc. XII CBA - Brazilian Automatic Control Conference, Uberlandia (Brazil), September 14 – 18, 1998, vol.IV, p. 1241-1246.

[30] KABLAR,N.A.,.DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Non - Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach*. MNTS - Mathematical Theory of Networks and Systems, Padova (Italy), July 6-10, 1998, p.229 - 232.

[31] KABLAR,N.A., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Non - Lyapunov stability of linear singular systems: Matrix measure approach*. Preprints 5th IFAC Symposium on Low Cost Automation, Shenyang (China), September 8 – 10, 1998, p.TS13 16 - 20.

[32] KABLAR,N.A., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Finite time stability of time varying singular systems*. Proc. CDC 98, Florida (USA), December 10 – 12, 1998, p.3831 - 3836.

[33] KABLAR,N.A., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *Finite time instability of time varying linear singular systems.* Proc. ACC 99, San Diego (USA), June 2 – 4, 1999, p.1796-1800.

[34] WEISS,L., INFANTE,E.F. Finite Time stability under Perturbing Forces on Product Spaces. *IEEE Trans. on Automat*. Cont., 1967, vol. AC-12, no.1, p.54–59.

Rad primljen: 10.7.2000.god.