

Matematički model i numerička simulacija elektromehaničkog servopokretača upravljačkih krila rakete

Mr Miodrag Ćurčin, dipl.inž.¹⁾

Izvedene su diferencijalne i algebarske jednačine koje opisuju dinamiku elektromehaničkog pokretača krmila raketa sa širinsko impulsnom modulacijom (PWM modulation) i digitalnim kontrolerom. Obrazovan je kompletan simulacioni model i rešen na računaru. Analizirane su i u model uključene sve bitne nelinearnosti. Analizirani su novi modeli za simulaciju pojedinih nelinearnih - diskontinualnih elemenata kao što su ograničavač kretanja i suvo trenje. Simulirano je širinsko impulsno upravljanje kao i digitalni uskladnik. Dati su primeri proračuna koji pokazuju njihov uticaj na odziv sistema.

Ključne reči: Vodjena raketa, elektromehanički pokretač krmila, DC – motor, digitalna simulacija.

Korišćene oznake i simboli

C_h	- šarnirni moment krmila, $C_h = M_h / QS_W c_r$;	$M_{h\dot{\alpha}}$	- izvod šarnirnog momenta po bezdimenzional-nom izvodu napadnog ugla, $M_{h\dot{\alpha}} = \partial M_h / \partial \dot{\alpha}$, Nms;
$C_{h\alpha}$	- izvod koeficijenta šarnirnog momenta po napadnom uglu, $C_{h\alpha} = \partial C_h / \partial \alpha$;	$M_{h\delta}$	- izvod šarnirnog momenta po bezdimenzional-nom uglu otklona krmila, $M_{h\delta} = \partial M_h / \partial \delta$, Nm;
$C_{h\dot{\alpha}}$	- izvod koeficijenta šarnirnog momenta po bezdimenzionalnom izvodu napadnog ugla, $C_{h\dot{\alpha}} = \partial C_h / \partial \dot{\alpha}^*$;	$M_{h\dot{\delta}}$	- izvod šarnirnog momenta po bezdimenzional-nom izvodu ugla otklona krmila, $M_{h\dot{\delta}} = \partial M_h / \partial \dot{\delta}$, Nms;
$C_{h\delta}$	- izvod koeficijenta šarnirnog momenta po uglu otklona krmila, $C_{h\delta} = \partial C_h / \partial \delta$;	M_m	- moment motora, Nm;
$C_{h\dot{\delta}}$	- izvod koeficijenta šarnirnog momenta po bezdimenzionalnom izvodu uglu otklona krmila, $C_{h\dot{\delta}} = \partial C_h / \partial \dot{\delta}^*$;	$M_{m\max}$	- maksimalni moment motora, Nm;
f_s	- učestanost uzorkovanja;	Q	- dinamički pritisak, $Q = 1/2 \rho V^2$, Pa;
i	- prenosni odnos reduktora;	R_m	- otpor namotaja statora, Ω ;
I_m	- struja u namotajima statora motora, A;	s	- kompleksna promenljiva, $s = \sigma + j\omega$, s ⁻¹ ;
J_f	- moment inercije krmila oko šarnirne ose, kgm ² ;	t	- vreme, s;
J_G	- moment inercije obrtnih delova zubčastog reduktora sveden na šarnirnu osu krmila, kgm ² ;	T_e	- električna vremenska konstanta motora, s, ms;
J_m	- moment inercije rotora motora, gcm ² , kgm ² ;	T_M	- elektromehanička vremenska konstanta motora, s, ms;
J_δ	- moment inercije pokretnih delova pokretača krmila sveden na šarnirnu osu krmila, kgm ² ;	T_{PWM}	- period širinsko impulsne modulacije, s, ms;
K_A	- koeficijent pojačanja pojačivača snage;	T_s	- vreme uzorkovanja, $T_s = 1/f_s$ s, ms;
K_e	- naponska konstanta motora, V/s;	U, U_n	- napon napajanja i njegova nominalna vrednost, V;
K_f	- koeficijent pojačanja povratne sprege, V ⁻¹ ;	α	- napadni ugao u vezanom koordinatnom sistemu, rad, °;
K_M	- koeficijent momenta motora, Nm/A;	δ	- ugao otklona krmila;
L_m	- koeficijent induktivnosti namotaja statora motora, H;	$\dot{\delta}, \omega_\delta$	- ugaona brzina otklona krmila, s ⁻¹ ;
M_f	- moment trenja, Nm;	$\varepsilon, E(s)$	- greška upravljanja, rad, °;
M_h	- šarnirni moment krmila, Nm;	η	- upravljanje;
$M_{h\alpha}$	- izvod šarnirnog momenta po napadnom uglu, $M_{h\alpha} = \partial M_h / \partial \alpha$, Nm;	ω_m	- ugaona brzina rotora motora, s ⁻¹ ;

Uvod

POKRETAČ (servopokretač) krmila je osnovni deo autopilota raketa. Projektovanje, ispitivanje i identifikacija pokretača krmila ne može da se ostvari bez dobrog simulacionog modela. Iako je simulacija dinamike pokretača krmila više od tri decenije u praksi, [1,2], do

¹⁾ Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

sada, kompletan simulacioni model nije objavljen u literaturi.

Cilj rada je da se izloži originalan kompletan simulacioni model pokretača krmila raketa zasnovana na motoru jednosmerne struje i digitalnom upravljaču sistema.

Na sl.1 prikazan je blok dijagram pokretača upravljačkih krmila raketa sa pozicionom povratnom spregom, zatom da pokreće krmilo rakete u saglasnosti sa ulaznim kontrolnim signalom.

Ulazni signal U_d odgovara zahtevanoj (željenoj) vrednosti ugla otklona krmila. Signal sa pozicione povratne sprege oduzima se od ulaznog signala U_d . Razlika, ili grška sistema E , pojačava se i dovodi na motor jednosmerne struje. Moment motora se uvećava (ugaona brzina smanjuje) pomoću reduktora i dovodi do upravljačke površine – krmila, pod čijim dejstvom se krmilo obrće oko svoje obrtne ose. Da se postigne željena dinamika sistema u povratnu spregu uključen je uskladnik. Uskladnik može biti i u direktnoj grani.

Upravljanje savremenim pokretačima realizuje se digitalno pomoću mikrokontrolera (sl.2).

- ograničenje momenta i brzine motora i
- trenje u ležištima i zupčanicima.

Postoje i drugi uzroci nelinearnosti u sistemu, ali su oni manje značajni u slučaju kada je sistem dobro dizajniran. To su:

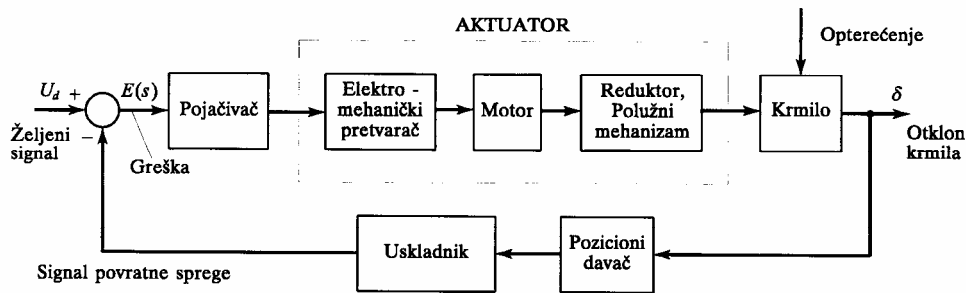
- zazor u reduktoru i polužnom mehanizmu,
- nelinearnost kvantizacije u A/D konvertoru, potencijometru i digitalnom računaru i
- kašnjenje u digitalnom mikrokontroleru i širinskoj modulaciji.

Efekte nelinearnosti mogu se izučavati pomoću numeričkog simulacionog modela.

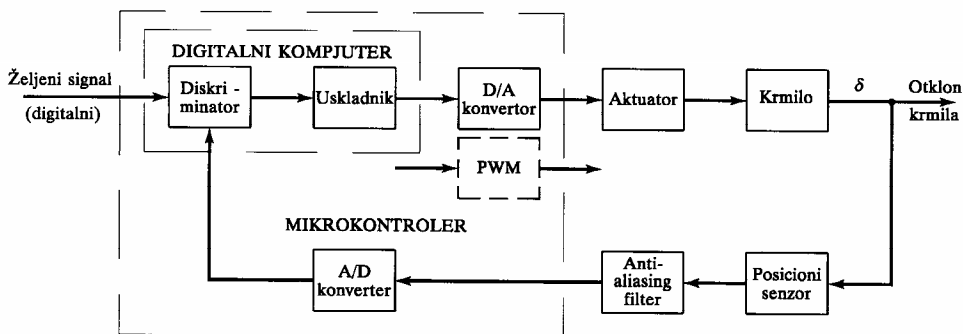
Nelinearnosti kvantizacije u A/D konvertoru, potencijometru i enkoderu se neće razmatrati jer se pretpostavlja da ovi davači imaju dovoljno visoku rezoluciju.

Motor jednosmerne struje

Motor jednosmerne struje (DC motor) koristi se često kao pogon u sistemu pokretača krmila. Šematski dijagram ovakvog motora prikazan je na sl.3.



Slika 1. Pokretač krmila sa pozicionom povratnom spregom



Slika 2. Pozicioni servopokretač sa digitalnim upravljanjem

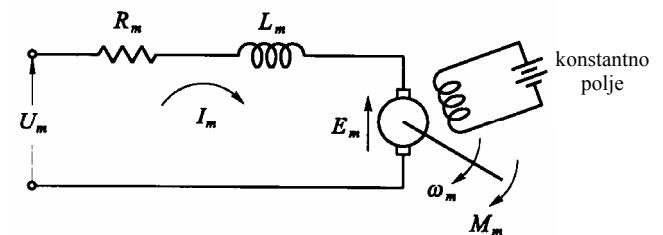
U zavisnosti od vrste raketa i autopilota, umesto D/A konvertora i linearnog pojačavača, može da se koristi širinsko modulirano upravljanje, koje može da bude jednostavnije i jeftinije.

Za slabljenje nepoželjnih visokofrekventnih oscilacija, koje dolaze od vibracija strukture, ili iz drugih izvora, ugrađuje se niskopropusni filter.

Pretpostavlja se da se koristi mikroprocesor i A/D konvertor sa dovoljno dugom reči (obično 12bita) da se zadovolji željena tačnost. Zbog toga se na ovom mestu neće simulirati greška zaokruživanja koja nastaje zbog ograničene dužine reči.

Pokretač krmila iz veoma nelinearan sistem, pri čemu su glavni uzročnici nelinearnosti:

- mehaničko ograničenje ugla otklona,



Slika 3. Strujno kolo motora jednosmerne struje

Konstantno magnetno polje rotora stvara se pomoću permanentnog magneta, ređe pomoću posebnog namotaja

napajano jednosmernom konstantnom strujom.

Induktivnost namotaja rotora označena je sa L_m a otpornost sa R_m . Motor pokreće reduktor i krmilo momenta inercije J_L .

Kontrola brzine obrtanja rotora motora ostvaruje se promenom napona napajanja statora U_m , a smer obrtanja promenom polariteta napona.

Jednačine koje opisuju ponašanje motora mogu se naći u literaturi, na ovom mestu one će biti objašnjene ukratko.

Obrtni moment motora M_m proporcionalan je magnetnom fluksu, koji je proporcionalan pobudnoj struji u namotajima rotora I_m :

$$M_m = K_M I_m \quad (1)$$

gde je K_M momentna konstanta motora.

Usled obrtanja rotora indukuje se kontra elektromotorna sila E_m u namotajima. Kontra elektromotorna sila proporcionalna je ugaonoj brzini obrtanja rotora ω_m :

$$E_m = K_e \omega_m \quad (2)$$

gde je K_e električna konstanta motora. Momentna konstanta - K_M i električna konstanta motora - K_e jednake su za idealan motor. Kod realnih motora one se neznatno razlikuju.

Naponska jednačina kola rotora je:

$$U_m = R_m I_m + L_m \frac{dI_m}{dt} + E_m \quad (3)$$

Kombinujući (0, 2 i 3) dobija se:

$$\left(T_e \frac{dM_m}{dt} + M_m \right) \frac{R_m}{K_M} = U_m - K_e \omega_m \quad (4)$$

ili u obliku:

$$\frac{dM_m}{dt} = \frac{1}{T_e} M_m - \frac{K_M K_e}{T_e R_m} \omega_m + \frac{K_M}{R_m} U_m \quad (5)$$

gde je T_e električna vremenska konstanta motora i glasi:

$$T_e = \frac{L_m}{R_m} \quad (6)$$

Ova konstanta predstavlja vreme potrebno da struja dostigne 63% svoje konačne vrednosti pri ukočenom rotoru motora.

Obrtanje rotora zavisi od momenta motora M_m i momenta opterećenja M_L i može se opisati diferencijalnom jednačinom.

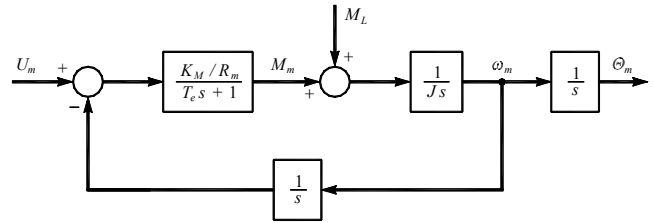
$$J \frac{d\omega_m}{dt} = M_m + M_L \quad (7)$$

gde je ukupni moment inercije $J = J_m + J_L$. Ako je ugao obrtanja rotora θ_m - izlazna veličina motora, tada sledeća diferencijalna jednačina opisuje njeno ponašanje:

$$\frac{d\theta_m}{dt} = \omega_m \quad (8)$$

Na osnovu (4, 7 i 8) primenom Laplaceove transformacije dobija se blok dijagram ponašanja motora

jednosmerne struje, sl.4.



Slika 4. Blok dijagram motora jednosmerne struje

Poznato je da otpornost namotaja R_m zavisi od temperature koja se menja za vreme rada. Porast temperature nastaje usled oslobađanja toplote u bakarnom provodniku namotaja i vrtložnih struja u jezgri rotora. Ona se prenosi na ostale elemente motora i na okolinu. Porast temperature ΔR_m je proporcionalan momentu i vremenu njegovog trajanja. Kako je moment proporcionalan struji namotaja, I_m , može se pisati:

$$\Delta R_m = f(t, H, \dot{H}) \quad (9)$$

gde je H oslobođena energija u namotaju i glasi:

$$H = \int_0^t R_m I_m^2(t) dt \quad (10)$$

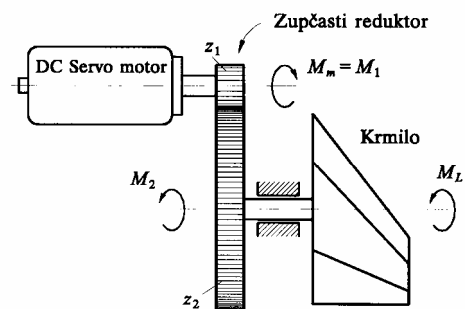
Simulacija uticaja temperature na otpornost zasnovana na teorijskim formulama veoma je složena pa se predlaže aproksimativna formula u obliku:

$$\Delta R_m = at + bH + c\dot{H} \quad (11)$$

Relativni porast otpornosti je obično $\Delta R_m / R_m < 15\%$.

Zupčasti reduktor

Motor jednosmerne struje daje veliku ugaonu brzinu i mali moment. U sistemu pokretača krmila, međutim, zahteva se relativno mala ugaona brzina i veliki moment. Zbog toga je neophodno uvesti reduktor između motora i krmila (sl.5).



Slika 5. Motor jednosmerne struje sa reduktorom

Neka se zupčasti reduktor sastoji od para zupčanika, od kojih je prvi vezan za osovinu motora, a drugi za osovinu krmila. Tada je moment opterećenja jednak šarnirnom momentu krmila $M_L = M_h$, izlazna ugaona brzina je δ , a moment inercije opterećenja jednak je momentu inercije krmila (uključujući vratilo i obrtne elemente ležišta), $J_L = J_f$.

Ako je broj zubaca prvog zupčanika, vezanog za vratilo

rotora z_1 , i broj zubaca drugog zupčanika vezanog za vratilo krmila z_2 (sl.5), tada je prenosni odnos:

$$i_G = \frac{z_2}{z_1} = \frac{\omega_m}{\dot{\delta}} \quad (12)$$

Ugaona brzina motora umanjuje se na ugaonu brzinu vratila krmila:

$$\dot{\delta} = \frac{\omega_m}{i_G} \quad (13)$$

Energija se prenosi kroz reduktor sa gubicima. Gubici nastaju usled trenja među zupcima zupčastog para.

Gubici su proporcionalni momentu motora. Ako je koeficijent korisnog dejstva zupčastog para η_G , tada je moment na drugom zupčaniku M_2 :

$$M_2 = i_G \eta_G M_m \quad (14)$$

Jednačina ponašanja sistema motor-reduktor-opterećenje može se dobiti primenom zakona o promeni kinetičke energije, na osnovu kojeg je promena kinetičke energije sistema proporcionalna snazi sila odnosno, momenata koji deluju u sistemu. Kinetička energija sistema jednaka je sumi kinetičkih energija svih pokretnih delova - rotora, zupčanika i opterećenja:

$$E_K = \frac{1}{2}(J_m + J_1)\omega_m^2 + \frac{1}{2}(J_2 + J_f)\dot{\delta}^2 \quad (15)$$

Snaga je:

$$P = P_{\text{developed}} + P_{\text{friction}} + P_{\text{load}} = i_G \eta_G M_m \dot{\delta} + M_f \dot{\delta} + M_L \dot{\delta} \quad (16)$$

Na osnovu zakona o promeni kinetičke energije dobija se $dE_K/dt = P$. Na osnovu (15 i 16) sledi:

$$(J_m + J_1)\omega_m \dot{\omega}_m + (J_2 + J_f)\dot{\delta} \ddot{\delta} = i_G \eta_G M_m \dot{\delta} + M_h \dot{\delta} - M_f \dot{\delta} \quad (17)$$

ili posle uvrštavanja izraza (13)

$$(J_m i_G^2 + J_G + J_f) \frac{d\dot{\delta}}{dt} = i_G \eta_G M_m + M_h - M_f \quad (18)$$

gde je:

$$J_G = J_1 i_G^2 + J_2 \quad (19)$$

moment inercije obrtnih delova reduktora, koji učestvuju u kretanju.

Važno je napomenuti da doprinos momenta inercije može biti značajan pošto je prenosni odnos obično velik broj (100÷300).

Izvedeni rezultat može da se proširi i na višestepeni reduktor. Neka se zupčasti reduktor sastoji od n stepena redukcije, pri čemu svaki od stepena ima prenosni odnos i_k , koeficijent korisnog dejstva η_k , $k = 1, 2, \dots, n$ i moment inercije zupčanika $r = 1, 2, \dots, n+1$. Tada je ukupni prenosni odnos – prenosni odnos reduktora, stepen korisnog dejstva i moment inercije sveden na izlazno vratilo:

$$i_G = i_1 i_2 \dots i_n \quad (20)$$

$$\eta_G = \eta_1 \eta_2 \dots \eta_n \quad (21)$$

$$J_G = J_1 i_G^2 + J_1 \frac{i_G^2}{i_1^2} + J_1 \frac{i_G^2}{i_1^2 i_2^2} + \dots + J_{n+1} \quad (22)$$

Ukupni moment inercije opterećenja je:

$$J_\delta = J_m i_G^2 + J_G + J_f \quad (23)$$

Reduktor sa vijčanim prenosnikom

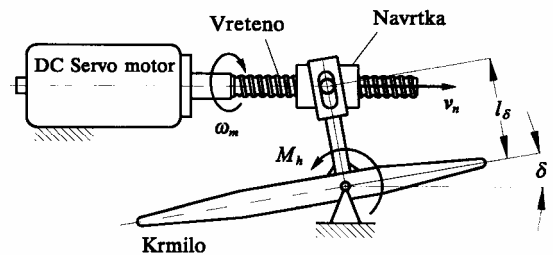
Vijčani (vretenasti) prenos (vijak i navrtka, sl.6) transformiše brzo obrtno kretanje u sporije translatorno kretanje navrtke, koje se transformiše u obrtno kretanje vratila krmila pomoću polužnog mehanizma. Vijak je vezan za vratilo motora, a navrtka za krmilo preko poluge sa prorezom i klizačem.

Prednost ovakvog prenosnika su male ukupne dimenzije sistema, jednostavna konstrukcija i izrada.

Nedostatak rešenja su veliko trenje i gubici. Ono se može smanjiti korišćenjem vijka i navrtke sa kuglicama (ball bearing screw drive)

Reduktor sa vijkom i navrtkom sa kuglicama koristi se kod pokretača od kojih se zahteva visoka tačnost pozicioniranja.

Koeficijent korisnog dejstva reduktora sa vijkom i navrtkom sa kuglicama može dostići vrednost 0.9. Sile trenja u prenosniku nezavisne su od brzine. Zazor se praktično može potpuno eliminisati.



Slika 6. DC motor sa vijčanim prenosnikom

Neka je h korak navoja, v_n aksijalna brzina navrtke, i srednji prečnik navoja $2r_n$, tada je:

$$\frac{v_n}{r_n \omega_m} = \tan \alpha = \frac{h}{2\pi r_n}$$

$$v_n = \frac{h \omega_m}{2\pi} \quad (24)$$

Sa slike 6 vidi se da je:

$$v_n \cos \delta = l_\delta \dot{\delta} \quad (25)$$

odakle se dobija:

$$\dot{\delta} = \frac{h \cos \delta}{l_\delta 2\pi} \omega_m = \frac{\omega_m}{i} \quad (26)$$

gde je prenosni odnos:

$$i = \frac{2\pi}{\cos \delta} \frac{l_\delta}{h} \quad (27)$$

Prenosni odnos zavisi od ugla otklona krmila δ , $i = i(\delta)$. Za male uglove δ može se uzeti $\cos \delta = 1$, dozvoljavajući grešku 1-2%, dok za uglove od 0.35-0.4 rad ova aproksimacija obično nije dozvoljena zbog velike greške.

Jednačina ponašanja sistema može se izvesti primenom zakona o promeni kinetičke energije. Kinetička energija sistema jednaka je sumi kinetičkih energija rotora, vijka, navrtke, poluge i krmila:

$$E_K = \frac{1}{2}(J_m + J_s)\omega_m^2 + \frac{1}{2}m_n v_n^2 + \frac{1}{2}(J_a + J_f)\dot{\delta}^2 \quad (28)$$

ili,

$$E_K = \frac{1}{2}(J_m + J_s)i^2\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}m_n\left(\frac{l_\delta}{\cos \delta}\right)^2\dot{\delta}^2 + \frac{1}{2}(J_a + J_f)\dot{\delta}^2 = \frac{1}{2}J_\delta\dot{\delta}^2 \quad (29)$$

gde je J_δ - moment inercije obrtnih (pokretnih) delova sistema sveden na obrtnu osu krmila i ima oblik:

$$J_\delta = \left[(J_m + J_s)\left(2\pi\frac{l_\delta}{h}\right)^2 + m_n l_\delta^2 \right] \frac{1}{\cos^2 \delta} + (J_a + J_f) \quad (30)$$

Snaga momenata koji deluju u sistemu je:

$$P = P_{\text{developed}} + P_{\text{friction}} + P_{\text{load}} = M_m \omega_m - M_{f,m} \omega_m - M_{f,n} \omega_m + M_h \dot{\delta} \quad (31)$$

Gubici u navojnom prenosniku nastaju usled sila trenja. One su proporcionalne momentima koji se prenose. Ako je koeficijent korisnog dejstva vijčanog prenosnika η_n , tada je moment trenja:

$$M_{f,n} = (1 - \eta_n)M_m \quad (32)$$

Na osnovu zakona o promeni kinetičke energije, $dE_K/dt = P$ i koristeći izraze (15 i 16):

$$\frac{dE_K}{dt} = \frac{1}{2}\frac{dJ_\delta}{dt}\dot{\delta}^2 + J_\delta\dot{\delta}\frac{d\dot{\delta}}{dt} \quad (33)$$

ili, posle uvrštavanja izraza (13)

$$J_\delta\frac{d\dot{\delta}}{dt} = i(\delta)\eta_n M_m + M_h - M_f - \frac{1}{2}\frac{dJ_\delta}{dt}\dot{\delta} \quad (34)$$

gde je M_f suma svih momenata Coulombovog trenja svedenih na obrtnu osu krmila. Izvod momenta inercije krmila po vremenu, na osnovu (30) je:

$$\begin{aligned} \frac{dJ_\delta}{dt} &= 2 \left[(J_m + J_s)\left(2\pi\frac{l_\delta}{h}\right)^2 + m_n l_\delta^2 \right] \frac{\tan \delta}{\cos^2 \delta} \dot{\delta} \approx \\ &\approx 2 \left[(J_m + J_s)\left(2\pi\frac{l_\delta}{h}\right)^2 + m_n l_\delta^2 \right] \delta \dot{\delta} \end{aligned} \quad (35)$$

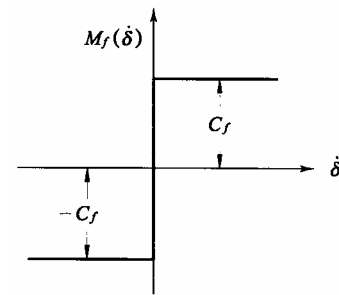
Tako se dobija da je izvod dJ_δ/dt proporcionalan uglu otklona krmila i njegovom izvodu. Iz (34) vidi se da se on i u jednačini kretanja množi sa izvodom ugla otklona krmila, te se član dJ_δ/dt može zanemariti kao mala veličina višeg reda, u odnosu na ostale članove jednačine (34).

Trenje

Iako je trenje u sistemu pokretača malo (obično je

moment trenja manji od 5% od maksimalne vrednosti momenta) ono se mora uzeti u obzir za tačnu analizu. Preciznije, moment trenja u ležištima, četkicama motora i zupcima sastoji se iz dve komponente: jedne nezavisne od opterećenja i druge proporcionalne opterećenju. Uticaj prve komponente, proporcionalne opterećenju uzima se u obzir tako što se proporcionalno umanji vrednost prenesenog momenta. Druga komponenta, nezavisna od opterećenja, obično se modelira kao klasično Coulombovo trenje (sl.7). Jačina momenta trenja C_f konstantna je i deluje trenutno u suprotnu stranu od relativne brzine. Ona se može predstaviti nelinearnom funkcijom:

$$M_f = C_f \operatorname{sgn}(\dot{\delta}) \quad (36)$$

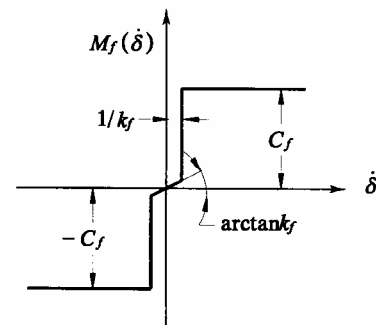


Slika 7. Klasično Coulombovo trenje

Navedeni klasični model trenja nije dobar za simulaciju zbog svoje diskontinualnosti u koordinatnom početku, koja stvara probleme pri integraciji, posebno kod izbora promenljivog koraka integracije. Problem se može prevazići tako što se u model (36) uvede mala linearna oblast u okolini koordinatnog početka, [3]:

$$M_f = \begin{cases} k_f \dot{\delta}, & |\dot{\delta}| < 1/k_f \\ C_f \operatorname{sgn}(\dot{\delta}), & |\dot{\delta}| > 1/k_f \end{cases} \quad (37)$$

gde je $1/k_f$ - širina linearne oblasti (sl.8).



Slika 8. Modifikovano Coulombovo trenje

Ova oblast treba da je dovoljno široka da se izbegnu problemi numeričke integracije, ali i dovoljno uska da ne utiče na tačnost rezultata, [3]. Ona se može odrediti numeričkim "eksperimentom".

Zazor

U zupčastim parovima, vijčanim prenosnicima i polužnim mehanizmima uvek postoji određen zazor između njegovih elemenata. Matematički model ponašanja sistema sa zazorima veoma je komplikovan jer zavisi od

toga da li su elementi prenosnika u kontaktu ili ne.

Dva modela sistema sa zazorom su u upotrebi: kinematički i dinamički model. Kinematički model ne uključuje inerciju elemenata i izlazni ugao δ zavisi od ulaznog ugla θ_m , njegovog izvoda ω_m i ugla zazora $\theta_m - \delta$, $\delta = f(\theta_m, \omega_m, \theta_m - \delta)$.

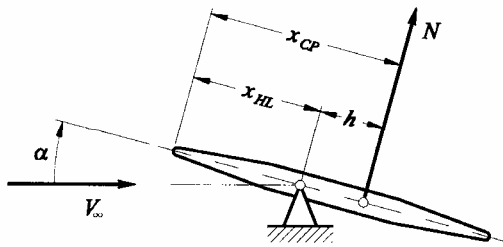
Drugi, dinamički model, uključuje dinamiku svakog pojedinačnog elementa reduktora i veoma je složen, pa je zbog toga neprikladan za numeričku simulaciju. Ovaj model se može malo uprostiti uvodeći "hipotetičku oprugu", [3].

Kod dobro izvedenih konstrukcija zazor se može svesti na meru da je njegov uticaj zanemarljivo mali na dinamiku sistema.

Šarnirni moment

Šarnirni moment krmila, (sl.9) je:

$$M_h = Nh = N(x_{HL} - x_{CP}) \quad (38)$$



Slika 9. Šarnirni moment krmila

Prirast šarnirnog momenta usled napadnog ugla ili ugla otklona krmila, proporcionalan je rastojanju h između udaljenja šarnirne ose x_{HL} u pravcu tetive i centra pritiska na panelu x_{CP} i normalne sile N . Centar pritiska i normalna aerodinamička sila zavise od Mahovog broja, napadnog ugla i ugla otklona krmila.

Šarnirni moment može se napisati u obliku:

$$M_h = QS\ell C_h \quad (39)$$

gde su: Q - dinamički pritisak,

$$Q = \frac{1}{2} \rho V^2 \quad (40)$$

C_h - koeficijent šarnirnog momenta, S - karakteristična površina (obično površina najveće projekcije krmila), ℓ - karakteristična dužina (obično srednja ili korena tetiva krmila), ρ - gustina vazduha i V - brzina leta. Koeficijent šarnirnog momenta zavisi od vrste i oblika krmila, Mahovog broja, napadnog ugla α , i ugla otklona krmila δ :

$$C_h = C_h(Ma, \alpha, \delta, \dot{\alpha}, \dot{\delta}) \quad (41)$$

Za male uglove jednačina (41) može se predstaviti u linearnom obliku:

$$C_h = C_{h0} + C_{h\alpha} \alpha + C_{h\delta} \delta + C_{h\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + C_{h\dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (42)$$

Na osnovu toga je šarnirni moment:

$$M_h = M_{h0} + M_{h\alpha} \alpha + M_{h\delta} \delta + M_{h\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_{h\dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (43)$$

gde su: $M_{h\alpha}$, $M_{h\delta}$, $M_{h\dot{\alpha}}$, $M_{h\dot{\delta}}$ izvodi šarnirnog momenta po napadnom uglu, uglu otklona krmila i njihovim bezdimenzionalnim izvodima po vremenu. Za simetrične konfiguracije je $M_{h0} = 0$.

Izvodi $M_{h\alpha}$ i $M_{h\delta}$ mogu biti pozitivni (aerodinamički nestabilno stanje) ili negativni (aerodinamički stabilno stanje). Izvodi $M_{h\dot{\alpha}}$, $M_{h\dot{\delta}}$ uvek su negativni.

Na osnovu prikazanih jednačina može da se zaključi da uslovi leta utiču na aerodinamička opterećenja na krmilima, a time i na dinamiku pokretača krmila.

Jednačine kretanja

Pokretački moment motora M_a pokreće krmilo, da je, za $|\delta| < \delta_{\max}$, jednačina obrtnog kretanja krmila:

$$J_\delta \ddot{\delta} = M_a + M_h - M_f \quad (44)$$

gde su: J_δ - moment inercije obrtnih (pokretnih) delova sistema pokretača krmila sveden na obrtnu osu krmila (šarnirna osa), M_f - Coulombov moment trenja oko šarnirne ose krmila.

Pri malim napadnim uglovima momenta, jednačina može da se napiše u linearnom obliku:

$$M_h = M_{h0} + M_{h\alpha} \alpha + M_{h\delta} \delta + M_{h\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + M_{h\dot{\delta}} \dot{\delta} \quad (45)$$

Blok dijagram jednačine (45) prikazan je na sl.10.

Mehanički graničnici kretanja mogu da se predstave kao linearni elementi sa zasićenjem na izlazu bloka krmila (klasični prilaz). Ovakav model limitira ugao δ u određenim granicama, ali ne i izvod ovog ugla.

Tačniji model krmila postiže se uvođenjem nelinearne opruge sa konstantom opruge jednakom nuli dok se ne dostignu graničnici i veoma velikom konstantom opruge posle toga, pošto graničnik ima svoju krutost, veoma veliku, ali konačnu.

Matematički, kretanje krmila sa graničnicima, može se predstaviti diferencijalnom jednačinom:

$$\ddot{\delta} = \alpha - f(\delta) \quad (46)$$

gde α predstavlja ubrzanje usled svih momenata osim reakcije graničnika:

$$\alpha = 1/J_\delta \left(\begin{array}{l} M_a + M_{h0} + M_{h\alpha} \alpha + M_{h\delta} \delta + M_{h\dot{\alpha}} \dot{\alpha} + \\ + M_{h\dot{\delta}} \dot{\delta} - M_f \end{array} \right) \quad (47)$$

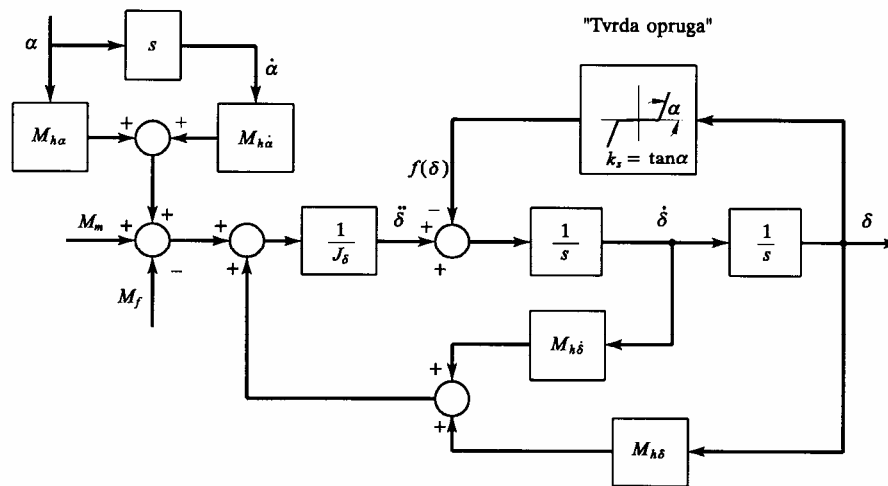
i

$$f(\delta) = \begin{cases} k_s (\delta - \delta_{\max}), & \delta > \delta_{\max} \\ 0, & -\delta_{\max} < \delta < \delta_{\max} \\ k_s (\delta + \delta_{\max}), & \delta < -\delta_{\max} \end{cases} \quad (48)$$

gde su: k_s - veliki broj i δ_{\max} - granična vrednost kod koje se zaustavlja kretanje krmila.

Konačno jednačina obrtnog kretanja krmila može da se napiše u obliku:

$$\begin{aligned} \frac{d\dot{\delta}}{dt} &= \frac{M_a + M_h - M_f}{J_\delta} - f(\delta) \\ \frac{d\delta}{dt} &= \dot{\delta} \end{aligned} \quad (49)$$



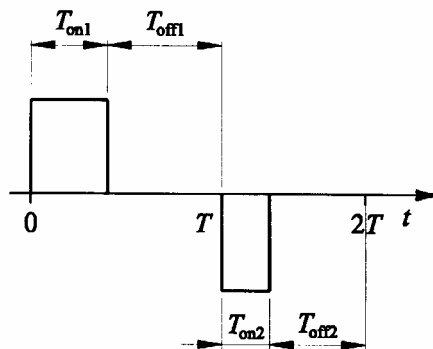
Slika 10. Blok dijagram aerodinamičkog opterećenja

Širinsko impulsna modulacija

Linearni pojačivač opisuje se jednačinom:

$$U_m = K_A \eta \quad (50)$$

Za širinsko impulsno upravljanje potrebni su pozitivni i negativni izvori struje i upravljački algoritam koji definiše znak i trajanje napajanja.



Slika 11. Širinsko modulirano upravljanje

Period širinske modulacije (sl.11) je:

$$T_{on} + T_{off} = T_{PWM} \quad (51)$$

gde je T_{on} - vreme za koje je motor pod naponom, T_{off} - vreme za koje motor nije pod naponom. Na sl.11 prikazana je idealizovana širinska modulacija bez prikazanih prelaznih procesa koji su stotinu i hiljadu puta manji od perioda modulacije, te mogu biti zanemareni.

Upravljačka komanda ("duty cycle") je:

$$\eta = \frac{T_{on}}{T_{PWM}} \text{sgn}(U) \quad (52)$$

Konačno, algoritam upravljanja koji definiše trajanje i znak napona je:

$$\left. \begin{array}{l} T_{on} = |\eta| T_{PWM} \\ \text{if } t < T_{on} \text{ then } U_m = U_n \text{sgn}(\eta) \\ \text{else } U_m = 0 \end{array} \right\} \quad (53)$$

Većina motora jednosmerne struje imaju malu električnu konstantu (0.3-0.6ms) i elektromehaničku konstantu (10-

-25ms), tako da period modulacije mora da se odabere dovoljno mali da bi se obezbedila kontinualnost otklona i željena tačnost. Obično se kao donja granica učestanosti modulacije usvaja 100Hz.

Gornja granica učestanosti modulacije određena je toplotnim gubicima, koji rastu sa frekvencijom modulacije.

Uskladnik

Da bi se poboljšale dinamičke performanse često je neophodno da se u sistem uvede uskladnik. On može biti u direktnoj ili povratnoj grani. Obično je uskladnik prvog reda sa prednjačenjem faze.

Kontinualni uskladnik može da se predstavi u kompleksnom domenu u obliku:

$$W(s) = \frac{\eta(s)}{\varepsilon(s)} = \frac{s+b}{s+a} = K \frac{T_1 s + 1}{T_2 s + 1} \quad (54)$$

a u vremenskom domenu u obliku diferencijalne jednačine, sa nultim početnim uslovima:

$$\begin{aligned} \frac{dz(t)}{dt} &= -az(t) + (b-a)\varepsilon(t) \\ \eta(t) &= z + b\varepsilon(t) \end{aligned} \quad (55)$$

napominje se da je odabran metod transformacije kod koga se ne javlja izvod ulazne promenljive.

Diskretni uskladnik prvog reda može da se napiše u obliku:

$$\eta_k = b_1 \varepsilon_k + b_0 \varepsilon_{k-1} - a_0 \eta_{k-1} \quad (56)$$

Koeficijenti članova differentne jednačine zavise od vremena uzorkovanja T_s . Oni mogu biti određeni na osnovu koeficijenata a, b u (54) na više načina. Jedan, po mišljenju autora, najefikasniji može se opisati na sledeći način. Prvo se odredi kontinualni uskladnik, a zatim se on transformiše u diskretni uskladnik koristeći neku od metoda integracije, na primer Tustinov metodu. U tom slučaju veza između koeficijenata je:

$$\begin{aligned} b_1 &= -\frac{T_s - 2T_2}{T_s + 2T_2} \\ a_0 &= -K \frac{T_s + 2T_1}{T_s + 2T_2} \end{aligned}$$

$$a_1 = K \frac{T_s - 2T_1}{T_s + 2T_2}$$

Ulazna funkcija

Najčešće korišćene ulazne funkcije za ispitivanje sistema upravljanja su odskočna funkcija, beli šum ograničene širine i slučajna funkcija.

Simulacija prve dve funkcije je jednostavna.

Pri generaciji belog šuma mora se voditi računa da je standardna devijacija belog šuma σ povezana sa spektralnom gustinom snage S_{xx} (dvostrani spektar) i korakom integracije h (ako je konstantan) preko jednačine:

$$\sigma = \sqrt{\frac{S_{xx}}{h}}$$

O izboru programskog jezika

Dve grupe programskih jezika su na raspoloženju za simulaciju sistema pokretača, [5-8]:

- Računarski orijentisani programski paketi (engl. Computer-aided-design CAD),
- programski jezici višeg nivoa (eng. higher-order language HOL)

Glavna prednost CAD paketa je da obezbeđuju korisniku integrisane alate i široku lepezu funkcija za analizu i sintezu sistema regulisanja.

Jedan od predstavnika ovakvih paketa za proračun i vizualizaciju je *MATLAB*, razvijen u firmi *Math Works, Inc.* *SIMULINK* i *Control Systems Toolbox*, koji rade u *MATLAB* okruženju i omogućuju simulaciju i vizualizaciju dinamičkih sistema u realnom vremenu.

Postoje više programskih jezika višeg nivoa, kao što su: *FORTRAN*, *PASCAL*, *C(C++)* i dr.

Izbor jezika zavisi uglavnom od iskustva korisnika, ali za simulaciju opšte namene *FORTRAN* se čini najprikladnijim, posebno nove verzije u kojima su zastupljeni elementi strukturnog programiranja i grafičke prezentacije.

U simulaciji pokretača krmila, raketa *HOL* imaju sledeće prednosti:

- mogućnost testiranja različitih simulacionih modela koji opisuju nelinearnu dinamiku i fenomene u pokretaču krmila,
- mogućnost povezivanja sa drugim programima (šest stepeni slobode kretanja),
- velika brzina simulacije i
- mogućnost povezivanja sa hardverom.

Prema autorovom iskustvu, najbolje je da se koriste oba paketa: Neki od CAD paketa za sintezu i neki od HOL jezika za simulaciju kompletnog sistema.

Tačnost simulacije

Željena tačnost numeričke simulacije zavisi od zahtevane tačnosti posmatranog servopokretača i treba da je za red veličine veća od nje.

Obično je zahtevana tačnost ugla otklona krmila raketa ≈ 0.002 rad (1σ vrednost). Tada rezultati numeričkog proračuna treba da su unutar 0.0001 rad. Naravno, kompromis između brzine računanja i tačnosti uvek postoji. Novi računari su dovoljno brzi tako da obezbeđuju visoku

tačnost računanja za kratko vreme.

Metod i korak integracije

Tačnost kojom se ostvaruje numerička simulacije zavisi od izabrane metode integracije i odabranog koraka integracije.

Najbolji rezultati dobijaju se primenom metode Runge-Kutta četvrtog reda ili modifikovane Eulerove metode (metoda sa predikcijom)

Najmanja vremenska konstanta u sistemu pokretača krmila, koja određuje najbržu dinamiku procesa, je električna konstanta motora T_e , pa se korak integracije može odrediti deljenjem ovog vremena sa 10.

Ako je period širinsko impulsne modulacije manji od električne konstante motora, onda korak integracije mora da se bira na osnovu ovog perioda.

Kada se u sistemu koriste digitalni upravljački sistem i širinsko impulsna modulacija, preporučuje se konstantni korak integracije čija je vrednost celobrojni deo perioda modulacije.

Vreme odabira treba da je celobrojni umnožak perioda modulacije i koraka integracije.

Simulacioni program

Prema izvedenim jednačinama napravljen je simulacioni program EMS u FORTRAN-u. Program je modularnog tipa sa mogućnošću jednostavnog povezivanja sa drugim programima. Svaki od modula je posebno testiran. Detaljniji opis programa ovom prilikom se neće dati pošto je cilj rada da se opiše matematički model elektromehaničkog servopokretača krmila.

Primeri proračuna

Primer 1. Uticaj diskretizacije

Primer koji sledi pokazuje neke od mogućnosti programa. Parametri sistema uzeti od Krymova [9]. Za jedan pokretač sa karakteristikama: $\delta_{\max} = \pm 0.35$ rad, $M_{h\delta} = -120$ Nm/rad, $M_{h\delta} = 1$ Nms, $M_{m\max} = 55.2$ Nm, $J_f = 0.01$ kgm². Odabran je DC servomotor sledećih karakteristika: $U_n = 27$ V, $J_m = 8 \cdot 10^{-6}$ kgm², $R_m = 1.75$ Ω , $T_e = 0.005$ s, $K_M = 0.038$ Nm/A, $K_e = K_M$ i reduktor sa $i = 120$, što daje $J_\delta = 0.125$ kgm², $M_f = 2$ Nm.

Posle sinteze u linearnom domenu dobijeno je $K_A K_f K_P = 570$, $\delta_{\max} = \pm 5.6$ rad/s, $T_1 = 0.03$ s, $T_2 = 0.003$ s. Time je ostvaren propusni opseg zatvorenog kola od $\omega_b = 175$ s⁻¹ pri faznom kašnjenju od 90deg

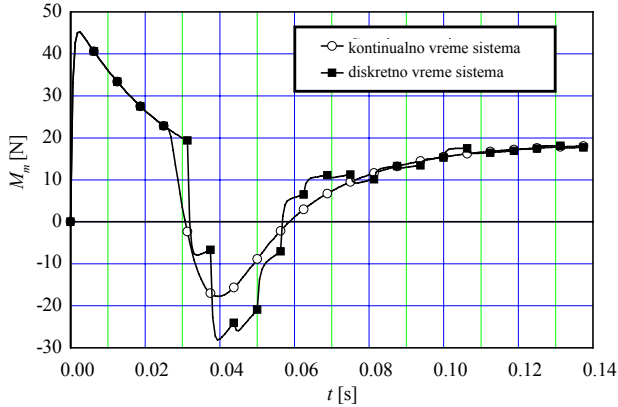
Na osnovu praktičnog pravila da je $f_s = (10 \div 15) \omega_b / 2\pi$, određeno je $f_s = 1/T_s = 270$ Hz. Na osnovu Tustinove određeni su parametri digitalnog kompenzatora $a_0 = -0.243$, $b_0 = -5.837$, $b_1 = 6.594$.

Numeričkim eksperimentom trenja i graničnika određeno je $k_f = 10^{-4}$, i $k_s = 10^6$.

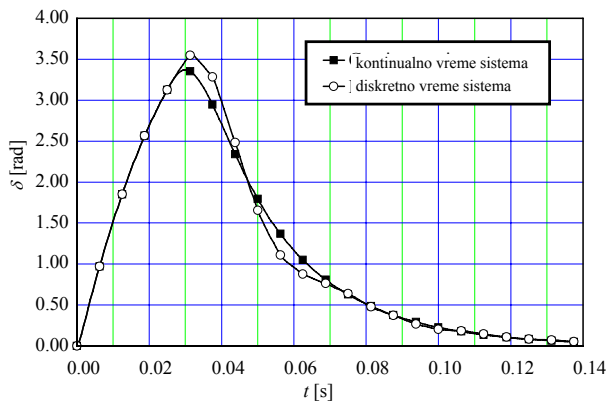
Prvi primer je poređenje kontinualnog i diskretnog sistema u vremenskom domenu za odskočni ulaz od 0.175 rad. Na sl.12 prikazan je pokretački moment motora. Vidi se da postoje znatne razlike između kontinualnog i diskretnog sistema. Na pojedinim mestima i do 15%.

Ove razlike postoje, ali su manje za ugaonu brzinu otklona krmila (sl.13), a praktično ne postoje u uglu otklona

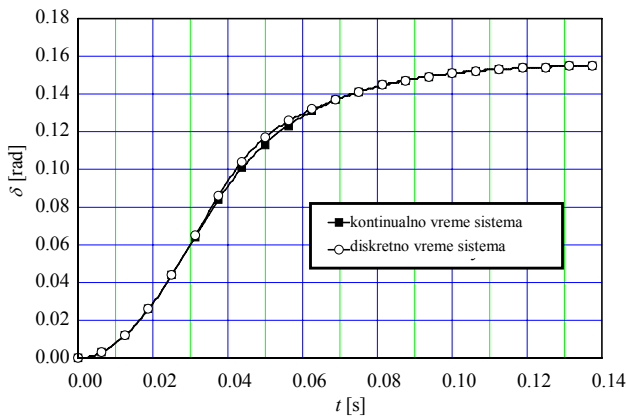
krmila (sl.14).



Slika 12. Uticaj diskretizacije na pokretački moment motora



Slika 13. Uticaj diskretizacije na ugaonu brzinu otklona krmila



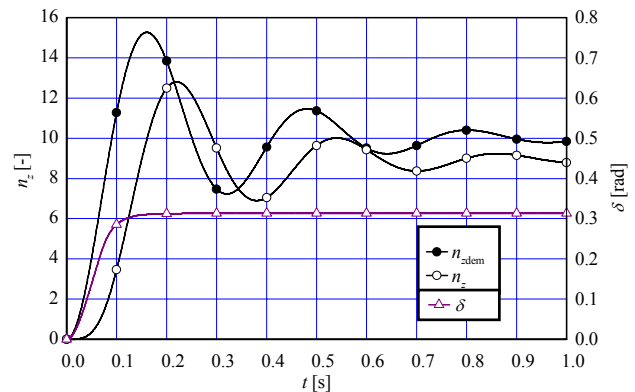
Slika 14. Uticaj diskretizacije na ugao otklona krmila

Primer 2. Uticaj servopokretača na dinamiku sistema raketa - pokretač

Sledeći primer pokazuje uticaj dinamike servopokretača krmila na performanse rakete sa pokretačem. Jednačine kretanja servosistema rešene su spregnute sa jednačinama kretanja rakete u vertikalnoj ravni. Za proračun je uzeta raketa sa sledećim karakteristikama: prirodna učestanost kratkoperidičnog kretanja $\omega_n = 20s^{-1}$, koeficijent prigušenja $\zeta_n = 0.2$, maksimalni ugao otklona krmila $\delta_{max} = 0.35$ rad, koeficijent pojačanja funkcije prenosa koeficijenta opterećenja $K_n = 28.6$. Treba napomenuti, da je prirodna učestanost kratkoperidičnog kretanja približno deset puta manja od propusnog opsega servopokretača.

Rezultati proračuna za odskočni ulaz od $\delta = \delta_{max}$

prikazani su na sl.15. Vreme porasta za $\delta(t)$ je 0,1s, a stacionarna vrednost $\delta_{ss} = 0.313$ rad, što daje statičku grešku od 0.037rad. Na slici su prikazane dve krive koeficijenta opterećenja. Faktor opterećenja n_{zdem} (zahtevana vrednost) koju bi raketa postigla pri trenutnom otklonu krmila na vrednost $\delta_{max} = 0.35$ rad (idealni pokretač) i koeficijent opterećenja $n_z(t)$ koji predstavlja odgovor rakete na realni otklon krmila $\delta(t)$. Vidi se da postoji kašnjenje u koeficijentu opterećenja $n_z(t)$ u odnosu na n_{zdem} . Vreme porasta je povećano za 0.06s ili za $\approx 70\%$. Ovo je posledica dinamike pokretača.



Slika 15. Uticaj dinamike pokretača krmila na koeficijent opterećenja rakete

Zaključak

Predstavljeni simulacioni model može da se koristi kao standardni alat u procesu analize i sinteze servopokretača krmila. On obuhvata sve bitne nelinearnosti u sistemu. Program može da se koristi i kao deo programa po modelu šest stepeni slobode kretanja rakete.

Neke od nelinearnosti u sistemu analizirane su numeričkim proračunom.

Literatura

- [1] WHITE,B.A. I DR. A Simple Digital Control Scheme for a DC Motor. *IEE Proc.*, March, 1983, vol.130, no.2, pp. 143-147.
- [2] NICHOLAS,J.,K., SPILIOOS,D.F. Microprocessor Implementation of PID Controllers and Lead-Lag compensators. *IEEE Trans. on Industrial Electronics*, February 1984, vol.IE-31, no.1, pp.99-84.
- [3] BERNARD,F. *Advanced Control Systems Design*. Prentice Hall, 1996.
- [4] TOHRU,I., YOSHIMASA,O., KIMIO,K. New design Method for Pulse-Width Modulation Control Systems via Digital Redesign. *Journal of Guidance and Control*, January-February 1999, vol.22, no.1, pp.123-128.
- [5] HOUPIS,C.H., LAMONT,G.B. *Digital Control Systems - Theory, Hardware, Software 2/e*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1992, ISE.
- [6] METCALF,M. *FORTRAN Optimization*, Academic Press, 1982.
- [7] SAADAT,H. *Computational Aids in Control Systems Using MATLAB*. McGraw – Hill, New York, 1993.
- [8] "MATLAB Version 4," The Math Works, Inc., Natick, MA 01760 – 1500, 1993.
- [9] KRYMOV,B.G., RABINOVICH,L.V., STEBLECOV,B.G. *Ispolnitelnye ustroistva sistem upravleniya letatelnyimi apparatami*, Masinstroenye, Moskva, 1987.