UDK: 007.5.001.57(047)=861
COSATI: 14-02, 17-07, 06-04

Matematičke forme i načini rešavanja zadataka vođenja mehaničkih sistema po trajektoriji

Dr Milovan Živanović, dipl.inž.[1)]

Analiziran je problem vođenja mehaničkih sistema kao objekta upravljanja po nominalama, sa naglaskom na objekte kod kojih je broj spoljašnjih ulaza različit od broja njihovih stepeni slobode kretanja. Cilj je da se pokažu matematičke forme koje se pojavljuju pri rešavanju zadataka vođenja mehaničkih objekata i ukaže na postupke za njihovo rešavanje. Stoga se analiziraju tipovi i osobine modela objekta upravljanja. Problemi sinteze nominala i sinteze zakona vođenja obrađuju se posebno za slučaj kada je broj stepeni slobode kretanja objekta upravljanja veći od broja njegovih spoljašnjih ulaza. Pokazana je razlika između zakona vođenja po nominali i zakona upravljanja regulacionih kola.

Ključne reči: **Vođenje mehaničkih sistema, matematičko modeliranje, objekat upravljanja.**

U v o d - definicija problema

DINAMIKU objekta upravljanja predstavljaju procesi razmene energije, materije i/ili informacije koji se u njemu odvijaju. Izlazi objekta su veličine koje mogu da se mere ili na neki drugi način detektuju. Zavisno od znanja, veštine i potreba istraživanja, zakoni razmene se manje ili više tačno matematički opisuju u formi algebarskih ili diferencijalnih jednačina. Najčešće je to forma nehomogenih diferencijalnih jednačina u kojima ulaz u objekat figuriše kao prinuda.

Generalno, problem upravljanja se svodi na obezbeđenje skupa prinuda - ulaza koji uzrokuje takva stanja objekta da njegovi izlazi budu željeni. To znači da se nikakvim upravljanjem ne može promeniti fizikalnost objekta i da izlaz objekta isključivo odslikava tu fizikalnost. Upravljanjem se objekat prisiljava da od svih mogućih stanja ima željena. To se postiže izborom ulaza u objekat u funkciji tekućih stanja objekta, eventualno stanja uređaja koji ulaze generiše i ulaza iz celokupnog okruženja sistema u zatvorenoj petlji.

Nepoznavanje objekta upravljanja, ili njegovo pogrešno sagledavanje, onemogućava nalaženje dobrog rešenja upravljanja. Preciznije rečeno, za izabranu matematičku formu modela objekta moguće je naći upravljanja koja će obezbediti da izlazi modela budu željeni. Upravljanje će biti dobro kada je dinamika objekta dovoljno tačno opisana modelom, na osnovu koga je ono birano. Nađeno upravljanje može samo slučajno biti dobro za objekte čija je dinamika pogrešno opisana modelom.

Kao mehanički objekti upravljanja razlikuju se neki od sledećih mehaničkih sistema: sistem elastično povezanih pokretača ili servopokretača opterećenih masama (objekat upravljanja prirodnog mehaničkog sistema) ili sistem povezanih elastičnih ili krutih tela (parcijalni slučaj – jedno telo) na čije se kretanje mogu postaviti i dodatna ograničenja. Zavisno od izbora objekta, bez obzira na tačnost opisa njegove dinamike, slede različiti putevi i različita rešenja upravljanja. Jedan od primera mehaničkog objekta upravljanja je letelica kao kruto telo, na čije se kretanje u prostoru ne postavljaju ograničenja. Drugi primer mehaničkog objekta upravljanja, koji se razmatra u savremenoj robotici, je struktura robota, tj. sistem zglobno povezanih krutih ili elastičnih članaka koji su u međusobnom kontaktu i kontaktu sa okruženjem. Treći primer su živa bića kao sistem elastično povezanih opterećenih pokretača.

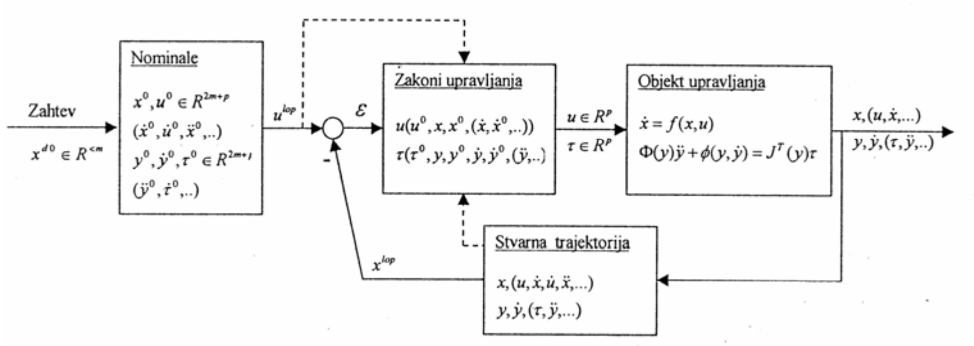
U ovom radu je kao objekat upravljanja razmatrana klasa mehaničkih sistema, čija se dinamika može opisati sistemom običnih diferencijalnih jednačina drugog reda. Te jednačine su jednačine kretanja, njihov broj je jednak broju stepeni slobode kretanja mehaničkog sistema i opisuju se pomoću koordinata prostora stanja (pomeranja i njihovih izvoda). Rešenje jednačina kretanja kao linija u višedimenzionom prostoru stanja je trajektorija posmatranog mehaničkog objekta upravljanja i matematički se opisuje kao višedimenzioni vektor u funkciji vremena. Izlaz objekta upravljanja je funkcija rešenja jednačina kretanja i eventualno ulaza u objekat. Treba izabrati zakone upravljanja koji obezbeđuju kretanje mehaničkog objekta po izabranoj putanji. Pod putanjom se podrazumeva linija, kao geometrijsko mesto tačaka u trodimenzionom prostoru, koja predstavlja projekciju trajektorije iz prostora stanja na taj prostor. Stoga je osnovni zadatak upravljanja – vođenje mehaničkog sistema po trajektoriji. Problem vođenja po trajektoriji mehaničkih sistema prvenstveno je naznačen u robotici, vojnoj i kosmičkoj tehnici.

Cilj rada je da pokaže matematičke forme i načine rešavanja problema vođenja mehaničkih sistema.

Rešenje problema vođenja u prirodi je ostvareno tako, što su za sve objekte upravljanja iste vrste unapred zadate jedinstvene osnovne nominale (npr. bazna nominala za hodanje čoveka je ista kod svih ljudi). Prirodni objekti

[1)] Vojnotehnički institut VJ,11000 Beograd, Katanićeva 15

upravljanja i sistem upravljanja za njih razvijaju se naknadno na jedinstven način u skladu sa potrebama postavljenih nominala, ali tako, da se sve unutrašnje upravljačke petlje zatvaraju samo na bazi informacija od samog objekta upravljanja. Na ovom stupnju razvoja, nauka nije u mogućnosti da reši problem vođenja sistema imitacijom rešenja vođenja prirodnih sistema. Osnovni razlog je u shvatanju i predstavljanju suštine kretanja mehaničkih sistema i prostora u kom se ono odvija, što je detaljnije obrađeno u nastavku teksta.



Slika 1. Globalna funkcionalna šema sistema za vođenje po trajektoriji

Zadatak vođenja traži rešenje za tri podzadatka, i to redom za: objekat upravljanja, nominale i sistem upravljanja (sl.1). Celovito sagledavanje problema i načina rešavanja problema vođenja po trajektoriji mehaničkih sistema omogućava izbor lakšeg puta ka rešenju, lakše prilagođenje rešenja za inženjersku primenu rezultata istraživanja i naznačava oblasti nauke koje treba dodatno razvijati.

Matematičko modeliranje

Praktično sva istraživanja problema upravljanja, odnosno vođenja mehaničkih sistema polaze od opisa zakona kojim je okarakterisana dinamika objekta upravljanja. Za opis mehaničkih sistema koriste se jednačine kretanja u formi Njutnovih, Lagranžeovih ili Hamiltonovih (kanonskih) jednačina. U [1] je pokazano da su to iste jednačine. Njutnove jednačine su opisane pomoću koordinata konfiguracionog prostora. Lagranžeove i Hamiltonove jednačine su Njutnove jednačine prikazane u tangentnom prostoru korišćenjem kovarijantnih i kontravarijantnih koordinata. Opis kretanja jednačinama prvog reda u prostoru stanja je samo dodatna transformacija jednačina kretanja i dalje udaljavanje od izvora nastanka opisa kretanja. Osnovni razlog za polaženja u istraživanjima od opisa mehaničkog objekta u formi Njutnovih, Lagranžeovih ili Hamiltonovih jednačina je raspoloživa baza znanja koja je prvenstveno posledica školstva, tj. načina obrazovanja. Od tog opisa se polazi i u ovom radu. Osnovni motiv je naslanjanje na dosadašnja znanja.

Mora se imati u vidu da postoje i drugi putevi za rešenje upravljanja mehaničkim objektima. Njutnove, Lagranžeove i Hamiltonove jednačine su interpretacija Ojlerovog matematičkog rešenja minimizacije funkcionala u mehanici nazvanog dejstvom (Hamiltonovo, Lagranž - Mopertijevo). Te jednačine su dobijene iz uslova da se stvarno kretanje odvija tako da dejstvo ima minimalnu vrednost. Jednačine upotrebljene u mehanici predstavljaju potrebne uslove za dobijanje minimalnog dejstva prikazanog u različitim prostorima koordinata. U [2] je pokazano da najmanje dejstvo predstavlja najkraće rastojanje između dve tačke tangentnog prostora merenog metrikom definisanom dejstvom. Drugim rečima, stvarno kretanje se može zamisliti kao najkraća linija između dve tačke na hiperpovršini kojom je određeno dejstvo (funkcional pod integralom). To znači da se kao startni opisi sistema ne moraju usvojiti jednačine proistekle iz zakona kretanja koji predstavljaju posledice principa mehanike. Kao opis sistema može da se usvoji funkcional koji određuje dejstvo, a zaključci o osobinama kretanja i upravljanja kretanjem mogu da se dobiju polazeći od geometrijskih svojstava tog funkcionala. Takav prilaz je korišćen za sintezu upravljanja jedne klase mehaničkih sistema [3] i za definisanje opštih uslova za sprečavanje porasta i zaustavljanje rotacije letelica na svim napadnim uglovima pa i u kovitu [4]. Suštinski napredak od interesa za robotiku je mogućnost upravljanja mehaničkim sistemom kao crnom kutijom i pri nepotpunoj kvantitativnoj informaciji o osobinama i stanju sistema, pa čak i pri nepotpunoj informaciji i o samom funkcionalu [5,6]. Sledeći istu logiku u [7] je pokazan mogući put za rešenje i shvatanje problema obučavanja sistema.

U ovom radu sledi se uobičajen put istraživanja upravljanja determinističkih sistema sa usredsređenim parametrima vremenski neprekidnih stacionarnih mehaničkih sistema.

Sa matematičke tačke gledišta, polazna tačka je opis (model) dinamike mehaničkog objekta. Razmatra se klasa mehaničkih objekata upravljanja, čije se polje brzina u prostora stanja može opisati sistemom od $2m$ običnih diferencijalnih jednačina prvog reda:

$$\boldsymbol{x} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{u}), \ \boldsymbol{x} \in R^{2m}, \ \boldsymbol{u} \in R^p \tag{1}$$

gde su: $\boldsymbol{x} \in R^{2m}$ vektor stanja i $\boldsymbol{u} \in R^p$ vektor spoljašnjih ulaza. Vektor stanja se bira prema potrebama konkretnog zadatka. Na primer, za jedan manipulator sa zglobovima pete klase i hvataljkom na čije se kretanje ne postavljaju ograničenja, koordinate vektora stanja mogu biti fazne veličine $\boldsymbol{x} = col(\boldsymbol{q}, \dot{\boldsymbol{q}}) \in R^{2m}$, gde su m broj zglobova, a $\boldsymbol{q}$ i $\dot{\boldsymbol{q}}$ unutrašnje koordinate i njihovi izvodi. Vektor ulaza $\boldsymbol{u}$ za manipulator je vektor pogonskih momenata $\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\tau} \in R^m$.U slučaju letelice kao krutog tela, uobičajeni izbori vektora stanja su $\boldsymbol{x} = col\left(V, \alpha, \beta, X_e, Y_e, H, p, q, r, \varphi, \theta, \psi\right) \in R^{12}$ ili $\boldsymbol{x} = col\left(u_v, v, w, X_e, Y_e, H, p, q, r, \varphi, \theta, \psi\right) \in R^{12}$, gde su: V brzina leta, α i β napadni i ugao klizanja, u_v, v i w projekcije vektora brzine na koordinatni sistem čvrsto vezan za letelicu, X_e, Y_e i H pozicija letelice u odnosu na zemaljski koordinatni sistem, p, q i r projekcije vektora ugaone brzine na koordinatni sistem čvrsto vezan za letelicu i φ, θ i ψ Ojlerovi uglovi orijentacije letelice u odnosu na zemaljski koordinatni sistem. Komponente vektora ulaza u za letelicu su otkloni komandnih površina (npr. horizontalne krme ili kanara δ_m, krilaca δ_l, vertikalne krme δ_n ,...) i komanda propulzora $\delta_f, \ldots$, tj. $\boldsymbol{u} = col\left(\delta_m, \delta_l, \delta_n, \delta_f, ...\right) \in R^{\geq 3}$.

Jednačine (1) za opis dinamike mehaničkog sistema su dobijene transformacijom m jednačina kretanja drugog reda (Lagranžeovih jednačina):

$$\underbrace{\frac{d}{dt}\frac{\partial \mathbf{T}}{\partial \dot{y}_i} - \frac{\partial \mathbf{T}}{\partial y_i} - \frac{\partial \mathbf{D}}{\partial \dot{y}_i}}_{=0 \text{ za statiku}} + \underbrace{\frac{\partial \mathbf{\Pi}}{\partial y_i}}_{\text{statika}} = Q_i, \quad i = 1, ..., m \tag{2}$$

gde su: $\mathbf{T}, \mathbf{\Pi}$ i $\mathbf{D}$ kinetička, potencijalna i energija disipacije, y_i i Q_i generalisane koordinate i generalisane sile. Ako se generalisane sile predstave u funkciji stvarnih spoljašnjih ulaza τ, razvijena forma jednačina (2) je:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\left(y_1\right) \cdot \ddot{y}_1 + \phi_1\left(y_1, ..., y_m, \dot{y}_1 ..., \dot{y}_m\right) = \\
&\qquad = F_1\left(y_1, .., y_m, \tau_1, .., \tau_p\right) \\
&\Phi_2\left(y_2\right) \cdot \ddot{y}_2 + \phi_2\left(y_1, .., y_m, \dot{y}_1, .., \dot{y}_m\right) = \\
&\qquad = F_2\left(y_1, .., y_m, \tau_1, .., \tau_p\right) \\
&\ldots \\
&\Phi_m\left(y_m\right) \cdot \ddot{y}_m + \phi_m\left(y_1, .., y_m, \dot{y}_1, .., \dot{y}_m\right) = \\
&\qquad = F_m\left(y_1, .., y_m, \tau_1, .., \tau_p\right)
\end{aligned} \tag{3}$$

Radi kompaktnijeg zapisa uvodi se vektor $\boldsymbol{y} = col\left(y_1, ..., y_m\right)$. Vektorska funkcija $\boldsymbol{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\tau})= = col\left(F_1\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\tau}\right), ..., F_m\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\tau}\right)\right)$ se često može predstaviti u obliku $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\tau}\right) = \mathbf{J}^T\left(\boldsymbol{y}\right) \cdot \boldsymbol{\tau}$, gde je $\mathbf{J}^T\left(\boldsymbol{y}\right) \in R^{m \times p}$ transponovana matrica matrice kojom se vektor brzina $\dot{\boldsymbol{y}} \in R^m$ transformiše u vektor brzina na mestu dejstva spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}$. U tom slučaju jednačina (3) se može predstaviti u sledećem kompaktnom skraćenom zapisu:

$$\begin{array}{ccccc}
\mathbf{\Phi}\left(\boldsymbol{y}\right)\ddot{\boldsymbol{y}} & +\boldsymbol{\varphi}\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right) & = & \mathbf{J}^T\left(\boldsymbol{y}\right) \cdot \boldsymbol{\tau} \\
\downarrow & \downarrow & & \downarrow
\end{array}$$

$$\overbrace{\begin{bmatrix} & & m \\ & \cdots & \\ m & & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \\ \cdots \\ m \end{bmatrix}} + \begin{bmatrix} \\ \cdots \\ m \end{bmatrix} = \overbrace{\begin{bmatrix} & p < m \; p = m \; p > m \\ \cdots & \cdots \\ m & \end{bmatrix}\begin{bmatrix} \boldsymbol{\tau} \\ -- \\ \cdots \end{bmatrix}}_{\substack{p<m \\ p=m \\ p>m}} \tag{4}$$

gde su: $\mathbf{\Phi}\left(\boldsymbol{y}\right) \in R^{m \times m}$, $\det \mathbf{\Phi}\left(\boldsymbol{y}\right) \neq 0$, pozitivno određena inerciona matrica sistema, $\boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right) \in R^m$ vektor kojim su uračunati uticaji gravitacije, trenja i Koriolisovog ubrzanja, $\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, \ddot{\boldsymbol{y}} \in R^m$ vektori položaja sistema i njegovi izvodi, $\boldsymbol{F}\left(\boldsymbol{\tau}\right) = \mathbf{J}^T\left(\boldsymbol{y}\right)\boldsymbol{\tau} \in R^m$ vektor prinude i $\boldsymbol{\tau} \in R^p$ vektor spoljašnjih ulaza. Uvođenjem vektora stanja $\boldsymbol{x} = col\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right)$ jednačina (4) se transformiše u jednačinu (1).

Sistem jednačina (2), tj. (4) opisuje ravnotežu sila i momenata mehaničkog sistema i pogodan je za validizaciju modela. Mehanički sistem predstavlja povezane krute ili elastične mehaničke elemente. Validizacija se sastoji u proveri konzistentnosti i tačnosti opisa. Ako se u (4) stavi da su $\ddot{\boldsymbol{y}} = \dot{\boldsymbol{y}} = 0$ dobijaju se algebarske jednačine koje opisuju statiku mehaničkog sistema. **Model koji ne opisuje tačno statiku sistema netačno opisuje i dinamiku sistema**. Ako mehanički sistem čine međusobno povezana kruta tela, tada po ukidanju relacija kojim su opisane veze treba da se dobije sistem jednačina koji opisuje kretanje nezavisnih krutih tela. Ako je sistem elastičan, tada pri kretanju bez elastičnih pomeranja sistem (4) treba da opisuje kretanje krutog sistema. Za mehanički sistem nema smisla tražiti rešenje upravljanja na bazi modela koji ne zadovoljava bilo koji od navedenih uslova.

Linearizacijom (4) i (1) za koju je usvojeno $\boldsymbol{x}= = col\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right)$ dobija se:

$$\begin{aligned}
&\mathbf{W}'\Delta\ddot{\boldsymbol{y}} + 2\mathbf{D}'\Delta\dot{\boldsymbol{y}} + \mathbf{K}'\Delta\boldsymbol{y} = \mathbf{D}\boldsymbol{\tau}\Delta\boldsymbol{\tau}, \; \mathbf{W}', \mathbf{D}', \mathbf{K}' \in R^{m \times m}, \\
&\qquad\qquad\qquad \mathbf{D}_\tau \in R^{m \times p} \\
&\Delta\dot{\boldsymbol{x}} = \mathbf{A}_x \Delta\boldsymbol{x} + \mathbf{B}_x \Delta\boldsymbol{u}, \\
&\qquad \mathbf{A}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0} & \mathbf{I} \\ -\mathbf{W}'^{-1}\mathbf{K}' & -2\mathbf{W}'^{-1}\mathbf{D}' \end{bmatrix} \in R^{2m \times 2m}, \\
&\qquad \mathbf{B}_x = \begin{bmatrix} \mathbf{0} \\ \mathbf{W}'^{-1}\mathbf{D}_\tau \end{bmatrix} \in R^{2m \times p}
\end{aligned} \tag{5}$$

gde Δ označava odstupanje odnosne veličine od njene nazivne vrednosti oko koje je vršena linearizacija. Kako je inerciona matrica $\mathbf{W}'$ pozitivno određena, to je singularnost matrice $\mathbf{A}_x$ određena singularnošću matrica krutosti $\mathbf{K}'$ i prigušenja $\mathbf{D}'$. Ako jednačine od (1) do (5) opisuju dinamiku krutog tela, matrice $\mathbf{K}', \mathbf{D}'$ i $\mathbf{A}_x$ su nesingularne. Ako jednačine od (1) do (5) opisuju dinamiku pokretne elastične strukture, matrice $\mathbf{K}', \mathbf{D}'$ i $\mathbf{A}_x$ su singularne [8,9]. Broj ulaza p može biti manji, jednak ili veći od broja m jednačina kretanja, odnosno, matrica $\mathbf{D}_\tau$ može biti kvadratna ili pravougaona sa manjim ili većim brojem kolona od broja vrsta.

Za statičke uslove jednačina (5) postaje algebarska:

$$\mathbf{K}'\Delta\boldsymbol{y} = \mathbf{D}_\tau\Delta\boldsymbol{\tau}, \quad \mathbf{K}' \in R^{m \times m}, \quad \mathbf{D}'_\tau \in R^{m \times p} \tag{6}$$

Mogućnost rešavanja jednačine (6) određena je osobinama singularnosti (rangom) matrica $\mathbf{K}'$, $\mathbf{D}_\tau$, brojem veličina stanja i brojem pobuda sistema p. Ako je matrica $\mathbf{K}'$ nesingularna tada je u statičkim uslovima položaj mehaničkog sistema jednoznačno određen u funkciji poznatog ulaza $\Delta\boldsymbol{y} = \mathbf{K}'^{-1}\mathbf{D}_\tau\boldsymbol{\tau}$. Ako je matrica $\mathbf{K}'$ singularna sa rangom $rang\ \mathbf{K}' = m' < m$, onda je u statičkim uslovima m' koordinata položaja određeno u funkciji poznatog ulaza i m-m' bilo kojih vrednosti koordinata položaja. Ako su ulazi međusobno nezavisni i ako je njihov broj jednak broju jednačina kretanja p=m, onda je matrica $\Delta\mathbf{D}_\tau$ kvadratna i nesingularna. Samo se u tom slučaju ulazi jednoznačno određuju u funkciji od poznatih položaja sistema $\boldsymbol{\tau} = \Delta \mathbf{D}_{\tau}^{-1} \mathbf{K}' \Delta \boldsymbol{y}$. U svim ostalim slučajevima ($p \neq m$, ulazi zavisni) ulazi se ne mogu jednoznačno odrediti u funkciji položaja sistema.

Kako matrice $\mathbf{W}'$, $\mathbf{D}'$, $\mathbf{K}'$ i $\mathbf{D}_{\tau}$, ili $\mathbf{A}_x$ i $\mathbf{B}_x$ odslikavaju osobine sistema u maloj okolini svake tačke prostora i kako ne menjaju svoje osobine pri kretanju sistema, to se isti problemi javljaju i pri nalaženju nominala i zakona upravljanja.

Rezultat okončanog zadatka modeliranja je verifikovan matematički model dinamike mehaničkog objekta dat u formi sistema diferancijalnih jednačina (1) ili (4). Dobijeni model je baza za sintezu nominala i zakona upravljanja.

Nominalno kretanje

Neporemećeno kretanje objekta upravljanja je svako njegovo kretanje koje se odvija bez spoljnjih poremećaja. Neporemećen upravljan objekat izvršava kretanje duž neporemećene trajektorije. Pod trajektorijom objekta podrazumeva se linija koju opiše vektor stanja objekta pri njegovom kretanju ili slika te linije u nekom drugom prostoru iste dimenzije. Sa matematičke tačke gledišta, trajektorija objekta je linija u prostoru stanja i predstavlja se kao vremenski promenljiv vektor, čiji je broj koordinata ravan dimenziji prostora stanja.

Nominalno kretanje je svako neporemećeno kretanje objekta koje zadovoljava neke postavljene uslove (želje). Maksimalan broj nezavisnih uslova koji se mogu postaviti za nominalno kretanje ravan je broju nezavisnih ulaza u objekat. Uslovi se mogu postaviti za ulaz ili za stanje objekta, što je detaljnije elaborirano u odeljku za zakone vođenja.

Nominalna trajektorija je neporemećena trajektorija koju ostvaruje objekat pri nominalnom kretanju. Za sistem opisan sa (1) nominalna trajektorija je $\boldsymbol{x}^0 \in R^{2m}$, a za sistem opisan sa (4) nominalna trajektorija je $col\left(\boldsymbol{y}^0, \dot{\boldsymbol{y}}^0\right) \in R^{2m}$.

Nominalni ulaz je vektor spoljašnje prinude pod čijim dejstvom se ostvaruje nominalno kretanje objekta. Za sisteme (1) i (4) nominalni ulaz je $\boldsymbol{\tau}^0 \in R^p$, ako ti sistemi predstavljaju opis dinamike istog objekta $\left(\boldsymbol{u}^0 = \boldsymbol{\tau}^0\right)$, što se u daljem tekstu podrazumeva.

Pod **nominalom** (objekta) se podrazumevaju nominalni ulaz i njemu odgovarajuća nominalna trajektorija (objekta), tj. vektor $col\left(\boldsymbol{\tau}^0, \boldsymbol{x}^0\right) \in R^{p+2m}$, odnosno, $col\left(\boldsymbol{\tau}^0, \boldsymbol{y}^0, \dot{\boldsymbol{y}}^0\right) \in$ $\in R^{p+2m}$. Sa matematičke tačke posmatrano, nominalna trajektorija je rešenje diferencijalne jednačine (1) ili (4) dobijeno dejstvom nominalnog ulaza.

Problem pri određivanju nominala objekta upravljanja je nalaženje postupka za sintezu vektora nominala $col\left(\boldsymbol{\tau}^0, \boldsymbol{x}^0\right) \in R^{p+2m}$, *odnosno* $col\left(\boldsymbol{\tau}^0, \boldsymbol{y}^0, \dot{\boldsymbol{y}}^0\right) \in R^{p+2m}$ *tako da (1) odnosno (4) bude indentično zadovoljeno ako je unapred zadat deo vektora nominala.*

Navedeni problem je samo bazna definicija problema analitičke sinteze jedne nominale za precizno definisanu dinamiku i parametre objekata. U praktičnim primenama potrebno je naći adekvatno rešenje za sintezu skupa nominala pri nepotpunim informacijama o karakteristikama objekata (nemodelovana dinamika, nedovoljno tačni parametri modela) i tehnička rešenja za off-line i on-line dela) i tehnička rešenja za off-line i on-line pripremu nominala. Pri tom je od posebnog interesa nalaženje rešenja za sintezu nominale dobijene iz sekvenca nominala sa, tokom kretanja, promenljivim setom njenih zahtevanih komponenti. Ako postoji realizovan objekat sa istom dinamikom kao objekt upravljanja, nominale se ne moraju sintetisati analitički već merenjem, tako da se problem generisanja nominala prevodi u problem akvizicije i obrade signala. U daljem tekstu analizira se samo bazni problem.

Pri definisanju zadatka upravljanja objektom obično je poznat deo nominala koji treba da bude realizovan ili samo projekcija dela nominala na deo konfiguracionog prostora. Na primer, pri manipulisanju je poznata putanja, kao konstantna linija u prostoru koju treba da opiše neka reperna tačka predmeta. Za avion ili krstareću letelicu se relativno jednostavno definiše profil leta, koji takođe predstavlja letnu putanju kao konstantnu liniju u trodimenzionom prostoru. U kontaktu objekta i okoline može unapred da bude zadata kontaktna sila kao poznata funkcija od, na primer, mesta ostvarivanja kontakta predmeta i okoline.

Radi interpretacije problema određivanja nominala objekta, pretpostavimo da je za objekat opisan sa (4) definisana linija $\boldsymbol{y}^{ld} = \left(y_i^{ld}, y_j^{ld}, y_k^{ld}\right) \in R^3$ u trodimenzionom prostoru koju treba da opiše projekcija dela vektora stanja $\left(y_i(t), y_j(t), y_k(t)\right) \in R^3$ na taj prostor. Očigledno da zadata konstantna linija $\boldsymbol{y}^{ld}$ kao varijabla ne figuriše u opisu sistema (4). Pri nalaženju nominala obično se ne zadaje neprekidna linija $\boldsymbol{y}^{ld}$, već samo pojedine tačke te linije. Odatle proističe problem provlačenja linije kroz zadate tačke tako, da konstruisana linija ne prolazi kroz prepreke. Pri rešavanju ovog zadatka treba da se uzme u obzir, da će po uvođenju vremena krivina linije biti u direktnoj vezi sa kinematičkim veličinama, a posebno sa ubrzanjem.

Prvi korak pri određivanju nominala je pridruživanje vremena kao parametra zadatoj liniji. Ne ulazeći u diskusiju kako taj korak treba uraditi, u rezultatu se dobija zahtevani deo vektora nominalne trajektorije, čije su koordinate funkcije vremena:

$$\boldsymbol{y}^d = \left(y_i^d(t), y_j^d(t), y_k^d(t)\right) = \\ = col\left(g_1(t), g_2(t), g_3(t)\right) = \boldsymbol{g}(t) \in R^3$$

Smenjujući u (3) i, j, k - te komponente vektora y i njihove izvode sa zahtevanim komponentama $\boldsymbol{y}^d = \boldsymbol{g}(t) = col\left(g_1, g_2, g_3\right)$ nominalne trajektorije dobija se sistem jednačina:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1\left(y_1^0\right)\cdot\ddot{y}_1^0+\\
&+\phi_1\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\dot{y}_1^0,..,\dot{g}_1,..,\dot{g}_2,..,\dot{g}_3,..,\dot{y}_m^0\right)\\
&=F_1\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\tau_1^0,..,\tau_p^0\right)\\
&\quad ....\\
&\Phi_i\left(g_1\right)\cdot\ddot{g}_1+\\
&+\phi_i\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\dot{y}_1^0,..,\dot{g}_1,..,\dot{g}_2,..,\dot{g}_3,..,\dot{y}_m^0\right)\\
&=F_i\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\tau_1^0,..,\tau_p^0\right)\\
&\quad ....\\
&\Phi_j\left(g_2\right)\cdot\ddot{g}_2+\\
&+\phi_j\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\dot{y}_1^0,..,\dot{g}_1,..,\dot{g}_2,..,\dot{g}_3,..,\dot{y}_m^0\right)\\
&=F_j\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\tau_1^0,..,\tau_p^0\right)\\
&\quad ....\\
&\Phi_k\left(g_3\right)\cdot\ddot{g}_3+\\
&+\phi_k\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\dot{y}_1^0,..,\dot{g}_1,..,\dot{g}_2,..,\dot{g}_3,..,\dot{y}_m^0\right)\\
&=F_k\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\tau_1^0,..,\tau_p^0\right)\\
&\quad ....\\
&\Phi_m\left(y_m^0\right)\cdot\ddot{y}_m^0+\\
&+\phi_m\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\dot{y}_1^0,..,\dot{g}_1,..,\dot{g}_2,..,\dot{g}_3,..,\dot{y}_m^0\right)\\
&=F_m\left(y_1^0,..,g_1,..,g_2,..,g_3,..,y_m^0,\tau_1^0,..,\tau_p^0\right)
\end{aligned}
\tag{7}
$$

gde gornji indeks „^{0}"označava da su veličine koje figurišu u ovoj jednačini nominalne. Kako su izvodi vremenskih funkcija takođe vremenske funkcije, jednačina (7) u opštem slučaju se svodi na:

$$
\begin{aligned}
&\Phi_1\left(y_1^0\right)\cdot\ddot{y}_1^0+\phi_1\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_1\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&..................\\
&\Phi_{i-1}\left(y_{i-1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{i-1}^0+\phi_{i-1}\left(t,\boldsymbol{y}^0,\boldsymbol{y}^0\right)=F_{i-1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&S_1\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\tau^0\right)=0\\
&\Phi_{i+1}\left(y_{i+1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{i+1}^0+\phi_{i+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_{i+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&..................\\
&\Phi_{j-1}\left(y_{j-1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{j-1}^0+\phi_{j-1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_{j-1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&S_2\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)=0\\
&\Phi_{j+1}\left(y_{j+1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{j+1}^0+\phi_{j+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_{j+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&..................\\
&\Phi_{k-1}\left(y_{k-1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{k-1}^0+\phi_{k-1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_{k-1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&S_3\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\tau^0\right)=0\\
&\Phi_{k+1}\left(y_{k+1}^0\right)\cdot\ddot{y}_{k+1}^0+\phi_{k+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_{k+1}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&..................\\
&\Phi_m\left(y_m^0\right)\cdot\ddot{y}_m^0+\phi_m\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)=F_m\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\boldsymbol{\tau}^0\right)
\end{aligned}
\tag{8}
$$

gde nadvučena crta iznad vektora $\boldsymbol{y}^0$ označava deo vektora nominalne trajektorije za čije komponente nisu postavljeni nikakvi zahtevi.

Zavisno od vrednosti indeksa i, j i k vektor $\boldsymbol{S}=\mathrm{co}l\left(S_1,S_2,S_3\right)$ može, ali ne mora, biti funkcija spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}$. Stoga jednačina (8) može imati jednu od sledeće dve matematičke forme:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)\ddot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0+\overline{\boldsymbol{\phi}}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0\right)=\overline{\boldsymbol{F}}\left(\overline{\boldsymbol{\tau}}^0\right)\\
&\boldsymbol{S}_\tau\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0,\boldsymbol{\tau}^{d0}\right)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{S}_\tau\in R^3
\end{aligned}
\tag{9}
$$

ako su zahtevi postavljeni za i, j, k - te komponente nominalne trajektorije, čiji drugi izvodi eksplicitno zavise od dela spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}^{d0}$ ili:

$$
\begin{aligned}
&\overline{\boldsymbol{\Phi}}\left(\overline{\boldsymbol{y}}^0\right)\ddot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0+\overline{\boldsymbol{\phi}}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0\right)=\overline{\boldsymbol{F}}^0\left(\boldsymbol{\tau}^0\right)\\
&\boldsymbol{S}\left(t,\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0\right)=\boldsymbol{0},\quad \boldsymbol{S}\in R^3
\end{aligned}
\tag{10}
$$

ako su zahtevi postavljeni za i, j, k-te komponente nominalne trajektorije, čiji drugi izvodi eksplicitno ne zavise od spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}^0$ (na desnoj strani i, j, k-te jednačina kretanja (7) u izrazima za F_i, F_j i F_k kao varijable ne figurišu komponente spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}$).

Dobijena su dva sistema sa m-3 diferencijalnih jednačina drugog reda u prisustvu tri diferencijalna ograničenja, koji moraju da zadovolje nezadati deo vektora nominala. Razlika u formi jednačina (9) i (10) je samo u obliku funkcije ograničenja. U (9) ograničenje $\boldsymbol{S}\tau$ je funkcija nezadatog dela vektora stanja $\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0$ i dela spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}^{d0}$ korespondentnih zadatom delu vektora stanja $\boldsymbol{y}^d$. U (10) ograničenje $\boldsymbol{S}$ je funkcija samo nezadatog dela vektora stanja $\overline{\boldsymbol{y}}^0,\dot{\overline{\boldsymbol{y}}}^0$. Forma jednačina (9) se pojavljuje pri odredjivanju nominala letelica, dok se forma jednačina (10) pojavljuje pri određivanju nominala kooperativnog sistema [9,10]. Rešenje jednačina (9 i 10) se nalazi tako što se zada desna strana jednačine pa traži leva ili obrnuto, što se zada leva strana jednačine pa traži desna. Naime, u jednačinama (9 i 10) figuriše $(2m+p)$-2 3=2m-6+p nepoznatih komponenti vektora nominala. Tim jednačinama definisano je 2m-6+3=2m-3 veza, tako da je (2m-6+p)-(2m-3)=p-3 veličine nezavisno. To znači da rešenje sistema (9 i 10) sadrži p-3 komponente vektora nominala koje teorijski mogu imati proizvoljnu vrednost. U inženjerskim primenama takva proizvoljnost se ne može dozvoliti, već je prema osobenostima dinamičkog ponašanja objekata upravljanja i potrebama konkretnih zadatka potrebno definisati dodatnih p-3 uslova. Dopunski uslovi se mogu postaviti za stanja pa se zadatak svodi na određivanje nominalnih ulaza. Dopunski uslovi se mogu postaviti za spoljašnje ulaze, pa se zadatak svodi na nalaženje nezadatog dela nominalne trajektorije [9,10].

Izuzetno je bitno shvatiti da se unošenjem u jednačine za opis dinamike objekta zahtevane vrednosti komponenti nominala, dobija u rezultatu sistem jednačina oblika (9 ili 10). To znači da je karakter komponenti vektora nominala koji se ne zahtevaju određen dinamikom objekta, odnosno karakterom rešenja sistema jednačina (9 ili 10) i izabranih dopunskih uslova. Od oblika tih jednačina zavisi kakav će karakter imati nezahtevane komponente nominala. Uticaj na karakter nezahtevanih komponenti nominala može se ostvariti promenom dopunskih uslova ili promenom seta zahtevanih komponenti nominala. Ako i pored toga, nominala ne može da zadovolji potrebe zadatka, mora se sintetisati nov objekat upravljanja (npr. objekat kod koga su zatvorene stabilizacione sprege).

Napominje se da je problem sintetisanja nominala pokazan na primeru koji se najčešće javlja u praksi, tj. u slučaju da su poznate tri komponente nominalne trajektorije objekta upravljanja. Ista matematička forma problema sinteze nominala se javlja i za bilo koji drugi broj poznatih komponenti nominala manji od broja spoljašnjih ulaza.

nenti nominala manji od broja spoljašnjih ulaza.

Rezultat okončanog zadatka sinteze nominala su postupci za određivanje skupa nominala objekta upravljanja datih u formi skupa vremenski promenljivih vektora ulaza $\boldsymbol{\tau}^{\boldsymbol{0}}(t) \in R^{p}$ i stanja $\boldsymbol{x}^{0}(t) \in R^{2m}$ ili $\boldsymbol{y}^{0} \in R^{m}, \dot{\boldsymbol{y}}^{0} \in R^{m}$ i koji identično zadovoljavaju diferancijalne jednačine (1 ili 4). Dobijene nominale su ulazne varijable za zakone upravljanja (sl.1). Problem nalaženja nominala prisutan je i rešavan na različite načine u robotici [11] i vazduhoplovstvu [12]. Prema izloženoj proceduri rešenje sinteze nominala u kooperativnoj manipulaciji dato je u [9,10].

Zakoni upravljanja - vođenja

Zadatak upravljanja objektom, koji treba da opiše izabranu nominalu, je zadatak vođenja objekta po toj nominali.

Kada bi model objekta upravljanja, na osnovu koga su sintetisane nominale, bio apsolutno tačan i kada bi se njegovo kretanje odvijalo bez poremećaja, bilo bi dovoljno u realan objekat upravljanja uvesti tačno izračunat nominalni ulaz i dobiti njegovo željeno kretanje. Međutim, matematički model nikad ne opisuje apsolutno verno dinamiku realnog objekta, niti se kretanje objekta može odvijati bez poremećaja. Iz tog razloga je nužno uvesti i odstupanja realnog ulaza u objekat od njegove nominalne vrednosti, koja će obezbediti povratak objekta na nominalnu trajektoriju kad god se odstupanja od nje pojave. U tu svrhu potrebno je sintetisati skup relacija, tzv. **zakone upravljanja**, koje povezuju nominalu i stvarnu trajektoriju objekta sa ulazom u objekat (sl.1). Radi naglašavanja razlike između zakona upravljanja regulacionih kola, zakoni upravljanja formirani na bazi nominalne i stvarne trajektorije zovu se zakoni vođenja (na engleskom guidance, tracking, [illegible]).

Matematički problem se može dalje definiše na sledeći način. Pretpostavlja se da je poznat vektor nominala, tj. vektor nominalnih ulaza $\boldsymbol{\tau}^{0} \in R^{p}$ i vektor nominalnih stanja $\boldsymbol{y}^{0}, \dot{\boldsymbol{y}} \in R^{m}$ i njihovi izvodi. Uvode se vektori odstupanja ulaza $\Delta\boldsymbol{\tau}$ i stanja $\Delta\boldsymbol{y}, \Delta\dot{\boldsymbol{y}}$.

$$\begin{aligned} \Delta\boldsymbol{\tau} &= \boldsymbol{\tau}^{0} - \boldsymbol{\tau} \in R^{p} \\ \Delta\boldsymbol{y} &= \boldsymbol{y}^{0} - \boldsymbol{y} \in R^{m} \\ \Delta\dot{\boldsymbol{y}} &= \dot{\boldsymbol{y}}^{0} - \dot{\boldsymbol{y}} \in R^{m} \end{aligned} \tag{11}$$

Zadatak je: iz vektora nominala $col\left(\boldsymbol{\tau}^{0}, \boldsymbol{y}^{0}, \dot{\boldsymbol{y}}^{0}\right)$ izabrati odreden broj n_{ε} komponenti kao željene velčine, uporediti ih sa ostvarenim veličinama - izlazima objekta upravljanja, tj. formirati njihov vektor odstupanja $\boldsymbol{\varepsilon} \subset col\left(\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\dot{\boldsymbol{y}}\right)$, $\boldsymbol{\varepsilon} \in R^{n_{\varepsilon} > 2m+p}$. Veličine za koje se eksplicitno određuju odstupanja od nominala su direktno praćene veličine. Na osnovu poznavanja vektora odstupanja direktno praćenih veličina, vektora nominala i vektora ostvarenih stanja treba generisati funkcije spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau}$ u objekat, čiji su argumenti nominala $col\left(\boldsymbol{\tau}^{0}, \boldsymbol{x}^{0}\right)$ i stvarna trajektorija $\boldsymbol{x}$ objekta i njihovi izvodi, $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}^{0}, \boldsymbol{x}^{0}, \dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{\tau}}^{0}, \dot{\boldsymbol{x}}^{0}, \ldots\right)$. Cilj je da objekat pobuđen sintetisanim ulazom $\boldsymbol{\tau}$, asimptotski stabilno prati nominalnu trajektoriju (svih $2m$ veličina, a ne samo n_{ε} direktno praćenih veličina), što se matematički izražava zahtevom da, sa porastom vremena $t \to \infty$ sva odstupanja od nominale opadaju ka nuli, $\Delta * \to \boldsymbol{0}, * = \tau, y, \dot{y}$ ili $\left\| col\left(\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\boldsymbol{y}, \Delta\dot{\boldsymbol{y}}\right) \right\| \to 0$.

Nalaženje rešenja za postupak sinteze zakona vođenja za mehanički objekat opisan jednačinama (1 ili 4), podrazumeva nalaženje rešenja za:

- upravljivost i opservabilnost objekta upravljanja,
- stabilinost praćenja i sistema za vođenje i

obezbeđenje željenih kvaliteta praćenja i dinamičkog ponašanja sistema vođenja

Osnovni problem pri traženju rešenja je nelinearnost. Nelinearnost se pojavljuje dvojako: kao prirodna karakteristika objekta i kao nelinearnost sistema jednačina (1 ili 4) koja je posledica izbora koordinata pomoću kojih se sistem opisuje.

Pokazano je da, za linearne stacionarne vremenski neprekidne dinamičke sisteme, pozitivno rešenje problema upravljivosti garantuje postojanje upravljanja u zatvorenom sistemu, koji će garantovati stabilnost celom sistemu upravljanja [11]. Intuitivno primenjujući istu logiku i na nelinearne sisteme sledi da rešenje upravljivosti ima presudni značaj i za postojanje rešenja za bilo koji zadatak teorije upravljanja, pa i za zadatke vođenja. Problem je što rezultate teorije linearnih sistema u istom obliku nije moguće koristiti za zaključivanje o nelinearnim sistemima.

Prema pretpostavci, domen ulaza i stanja objekta su podskupovi p- i $2m$-dimenzionog prostora, respektivno. Objekat upravljanja (fizički sistem) u čijem opisu upravljanje figuriše kao nezavisno promenljiva veličina je otvoren sistem. To znači da postoji neki drugi izvorni sistem iz koga se energija, materija i/ili informacija unose u njega. Deo prostora izlaza izvornog sistema je prostor ulaza za objekat upravljanja. Objekat „vidi" izvorni sistem samo preko njegove projekcije na prostor ulaza, tako da se na prostorima ulaza i stanja ima slika izolovanog mehaničkog sistema. Deo tog prostora ili ceo taj prostor može se nazvati prirodan prostor izlaza i jednak je proizvodu prostora ulaza i prostora stanja. Nominala objekta upravljanja cela leži u prirodnom prostoru izlaza objekta. Dimenzija prostora nad kojim se celokupan mehanički sistem vidi je stoga $2m+p$. Ujedno je to i maksimalna dimenzija prirodnog prostora izlaza za posmatrani objekat. Svi ostali prostori izlaza predstavljaju transformaciju ili preslikavanje prirodnog prostora izlaza. Dimenzija prostora izlaza može biti manja, jednaka ili veća od dimenzije prirodnog prostora izlaza.

U [9,12] je pokazano da uslovi i kriterijumi upravljivosti i opservabilnosti definišu osobine preslikavanja između domena ulaza, stanja i izlaza dinamičkog sistema, tj. objekta upravljanja. Pokazano je da je uslov izlazne upravljivosti uslov za postojanje obostrano jednoznačnog preslikavanja između domena ulaza i domena upravljanih izlaza (podprostor prirodnog domena izlaza) objekta upravljanja. Preslikavanje između domena određeno je rešenjem sistema i funkcijom izlaza, bez obzira da li je on linearan ili ne. Sledi da je uslov za obostrano jednoznačno preslikavanje između domena ulaza i izlaza primenljiv i za linearne i za nelinearne objekte upravljanja. Potreban uslov za obostrano jednoznačno preslikavanje [13] je da su dimenzije domena ulaza i izlaza iste. To znači da broj upravljanih izlaza treba da je ravan broju upravljačkih ulaza i tačno jednom ulazu treba da odgovara tačno jedan upravljan izlaz koji je funkcija tog ulaza i stanja sistema [illegible].

Za direktno praćenje [illegible] prirodnog prostora, izlazi mogu biti proizvoljno birani, tj. te veličine mogu biti bilo komponente nominalne trajektorije, bilo komponente nominalnog ulaza bilo njihova kombinacija. Konzistentan izbor veličina za praćenje podrazumeva izbor uzajamno nezavisnih veličina. Ako se za direktno praćenje izaberu čina. Ako se za direktno praćenje izaberu komponente nominalne trajektorije, onda će se one upoređivati sa izlazom sistema koji je algebarska funkcija vektora stanja $\left(\mathbf{C}^T col\left(y,\dot{y}\right), \mathbf{C} \in R^{n_\varepsilon \times 2m}\right)$. Ako se za direktno praćenje izaberu komponente nominalnog ulaza (kao što su kontaktne sile robota i okoline) onda će se one upoređivati sa izlazom sistema koji je diferencijalna funkcija vektora stanja (funkcija izlaza je diferencijalna jednačina $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}, \dot{\boldsymbol{y}}\right)$).

U slučaju mehaničkog objekta prirodni prostor izlaza je određen vektorom $col\left(\boldsymbol{\tau}, \boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right)$, tj. ulazom i stanjem objekta. Iz uslova izlazne upravljivosti sledi, da se od $2m+p$ izlaza samo $n_\varepsilon = p$ izlaza može direktno pratiti, odnosno onoliki broj izlaza koliki je broj spoljašnjih ulaza u objekat. Specifičnost mehaničkog sistema je što se dejstvom spoljašnjeg ulaza menja njegova inercijalna sila, odnosno drugi izvod linearnog ili ugaonog pomeranja. Time su dve veličine stanja određene kao jednostruki i dvostruki integrali ubrzanja i zajedno sa njim formiraju jednu diferencijalnu vezu – jednačinu kretanja (tj. jednačinu dinamičke ravnoteže sila ili momenata). To znači da se dejstvom jednog ulaza proizvode dva izlaza objekta, od kojih se samo jednim može nezavisno upravljati, tj. ili pomeranjem ili njegovim izvodom. Od $2m$ stanja, za praćenje se nezavisno može izabrati m stanja kao izlaza, odnosno onoliki broj izlaza koliki je broj nezavisnih jednačina kretanja (3).

Broj upravljačkih ulaza p (spoljašnjih prinuda u (3)) može da bude manji $p<m$, jednak $p=m$ ili veći $p>m$ od broja jednačina kretanja m.

Ako je $p=m$ sa m komponenti vektora stanja se upravlja, a ostalih m je jednoznačno određeno dinamikom objekta.

Ako je broj spoljašnjih ulaza veći od broja jednačina kretanja $p>m$, onda između njih postoji funkcionalna zavisnost. Samo rezultanta spoljašnjih ulaza (sila ili momenata), maksimalne dimenzije $p=m$ može biti upravljački ulaz. Stoga „višak" p-m>0 ulaza samo prividno proizvode neodređenost pri upravljanju. „Višak" od p-m>0 ulaza je najjednostavije održavati konstantnim, dok se m ulaza koristi za upravljanje, slično trimerima na avionu. Izbor p ulaza za upravljanje sa m izlaza i rukovanje sa „viškom" od p-m ulaza definiše se na višem hijerarhijskom nivou upravljanja.

U praksi je najčešće broj upravljačkih ulaza manji od broja jednačina kretanja $p<m$, pa će se jedino taj slučaj dalje obrađivati. Taj slučaj se javlja pri automatskom letu aviona i raketa, pri kooperativnom radu robota i pri kontaktu jednog robota sa okolinom.

Neka je izabrano $n_\varepsilon = p$ komponenti vektora nominalne trajektorije koji se direktno prate i neka je od njih formiran vektor željenih ulaza za zatvorenu petlju $\boldsymbol{u}^{loop} \in R^p$. Neka je vektor ostvarenih direktno praćenih $x^{loop} \in R^p$. Vektor odstupanja $\boldsymbol{\varepsilon}$ direktno praćenih stanja određen je sa $\boldsymbol{\varepsilon} = \boldsymbol{u}^{loop} - \boldsymbol{x}^{loop} \in R^p$. Zakonima vođenja formiraju se funkcije spoljašnjih ulaza $\boldsymbol{\tau} \in R^p$ u objekat. Kako njih ima tačno p, to se zakonima vođenja formira tačno p relacija. Te relacije se biraju iz uslova da p izabranih veličina bude praćeno, odnosno da, sa porastom vremena $t \to \infty$, sva odstupanja praćenih veličina od nominale teže ka nuli, $\boldsymbol{\varepsilon} \to 0$ ili $\|\boldsymbol{\varepsilon}\| \to 0$.

Uslov konvergencije odstupanja $\boldsymbol{\varepsilon}$ ka nultoj vrednosti ostvaruje se ako vektor $\boldsymbol{\varepsilon}$ zadovoljava diferencijalnu jednačinu čije rešenje teži ka nuli:

$$\boldsymbol{Q}\left(\overset{k}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \overset{k-1}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ldots, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}, \boldsymbol{\varepsilon}\right) = \boldsymbol{P}\left(\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\dot{\boldsymbol{\tau}}, \ldots\right)\left(= \mathbf{0}\right) \tag{12}$$

ili ako minimizira neki kriterijum [14]:

$$I\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \int_0^T L\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) dt + \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) \tag{13}$$

kad odstupanje teži nuli.

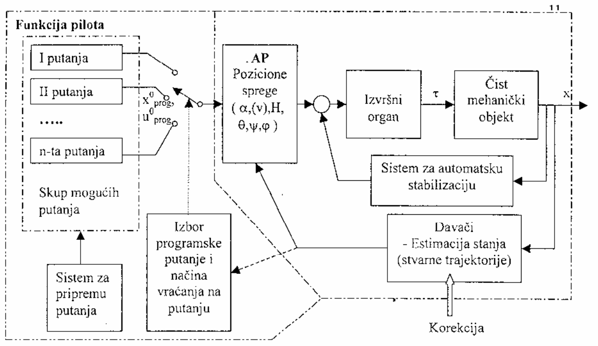
Zakonima vođenja $\boldsymbol{\tau}$ treba obezbediti da (3 ili 4) i (12 ili 13) budu istovremeno ispunjeni:

$$\begin{aligned} &\mathbf{\Phi}\left(\boldsymbol{y}\right)\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{F}\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\tau}\right) \\ &\mathbf{Q}\left(\overset{k}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \overset{k-1}{\boldsymbol{\varepsilon}}, \ldots, \boldsymbol{\varepsilon}, \dot{\boldsymbol{\varepsilon}}\right) = \mathbf{P}\left(\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\dot{\boldsymbol{\tau}}, \ldots\right)\left(= \mathbf{0}\right) \\ &\text{ili} \\ &\mathbf{\Phi}\left(\boldsymbol{y}\right)\ddot{\boldsymbol{y}} + \boldsymbol{\phi}\left(\boldsymbol{y}, \dot{\boldsymbol{y}}\right) = \mathbf{F}\left(\boldsymbol{y}, \boldsymbol{\tau}\right) \\ &I\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) = \int_0^T L\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) dt + \mathcal{L}\left(\boldsymbol{\varepsilon}\right) \end{aligned} \tag{14}$$

Veliki broj autora se bavi problemima sinteze zakona vođenja objekta po trajektoriji. Mnogo metoda je probano, a najperspektivnije su metode linearizacije, pseudo-linearizacije (input-output, feedforward and feedback linearization) [15-20] i različite metode izračunavanja ulaza [21,22,9].

Najčešće se (1) ili (4) linearizuje oko niza tačaka, koje se tako biraju da po izabranom kriterijumu najbolje prekrivaju dopušteni deo domena prostora stanja (tzv. anvelopu upotrebe). Dalje se generiše sistem jednačina u kojima kao nezavisno promenljive figurišu odstupanja od nominalne trajektorije u okolini tačke linearizacije. Za svaku izabranu tačku prostora stanja dobija se jedan sistem linearnih običnih diferencijalnih jednačina, oblika (5), sa odstupanjima od nominale kao argumentima. Za sintezu zakona vođenja se koristi teorija linearnih sistema. Za svaku tačku prostora stanja oko koje je vršena linearizacija mogu se dobiti različiti zakoni vođenja. Zakoni vođenja na celom prostoru stanja se dobijaju provlačenjem glatkih krivih kojima pripadaju izračunati zakoni vođenja u pojedinim tačkama prostora stanja.

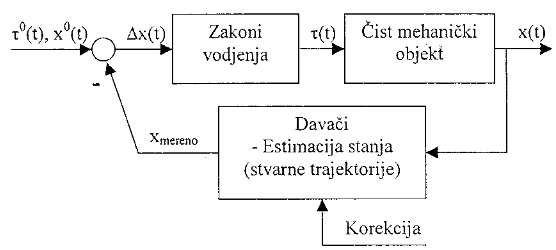
Specijalan slučaj su zakoni vođenja objekta po prostim stacionarnim nominalnim trajektorijama [23]. U tom slučaju zakoni vođenja definišu niz regulacionih kola koja istovremeno funkcionišu. Na avionima takvu funkciju vrše autopiloti sintetisani za čistu ili prethodno stabilisanu letelicu. Na primer, sve vreme ostvarivanja horizontalnog ustaljenog leta letelice, zahtevane nominalne veličine (željene veličine regulacionih kola) su: nulti nagib i klizanje, kao i konstantna brzina, ugao propinjanja i kurs. Na raketama za regulaciju se koriste glave za samonavođenje. Na primer, za navođenje na zemaljski cilj zahtevane nominalne veličine su konstantne (nulte) vrednosti uglova ose letelice u odnosu na osu senzora kojim je cilj zahvaćen. Korišćenjem niza regulacionih kola u automatskom letu moguće je ostvariti samo one proste trajektorije, čija realizacija ne izaziva nestabilno ponašanje neregulisanih veličina. Za prelaz sa jedne na drugu prostu trajektoriju i otklanjanje prekomernih spoljnjih poremećaja nužan je operator ili ugradnja uređaja koji će zameniti funkcije pilota - operatora (sl.2).



Slika 2. Globalna struktura sistema vođenja po prostim trajektorijama

Metode pseudolinearizacije baziraju se na traženju transformacije koordinata, kojom se nelinearni sistem prevodi u linearni. Po završenoj sintezi zakona vođenja za dobijeni linearni sistem inverznom transformacijom, sistem se prevodi u originalan sistem koordinata. Analitički problem je naći transformaciju, jer se zadatak svodi na rešavanje sistema parcijalnih diferencijalnih jednačina.

Metode izračunavanja ulaza omogućavaju egzaktno određivanje zakona vođenja objekta bez bilo kakvih uprošćavanja jednačina (4) (sl.3). Suština metode izračunavanja ulaza je što se unapred zadaju različiti uslovi koje sistem u zatvorenoj petlji treba da zadovoljava.



Slika 3. Globalna struktura sistema vođenja sa zakonima vođenja izračunatim za čist objekat

Na primer, može se tražiti minimiziranje vrednosti unapred izabranog funkcionala (13), ili zadovoljenje unapred zadate diferencijalne jednačine oblika (12), čije rešenje treba da se poklapa sa stvarnim odstupanjem ostvarenih veličina od njihovih nominalnih vrednosti. Stabilnost i kvalitet praćenja je određen osobinama konvergencije rešenja (12 i 13). Stoga se osobine stabilnosti i kvaliteta praćenja unapred zadaju izborom pogodnog oblika (12 i 13).

Razmotrimo slučaj zahteva za zadovoljenje unapred zadate diferencijalne jednačine po odstupanjima. Ako je (12) homogena diferencijalna jednačina, onda odstupanja predstavljaju njen odgovor na neka početna odstupanja. Između karaktera promene odstupanja od nominala, odnosno između osobina konvergencije ka nultoj vrednosti rešenja i oblika diferencijalne jednačine (12) postoji korespondencija. Po analogiji sa linearnim regulacijskim kolima, od sistema vođenja u zatvorenoj sprezi se može zahtevati da odstupanja od nominala zadovoljavaju diferencijalne jednačine sa tačno određenim svojstvima u pogledu stabilnosti i pokazatelja kvaliteta ponašanja njihovog rešenja. Rešavanjem (12) po najvišem izvodu dobijaju se funkcionalne zavisnosti najvišeg izvoda odstupanja od nižih izvoda odstupanja kao nezavisno promenljivih.

Smenom izračunatih najviših izvoda odstupanja u diferencijalne jednačine (11) računaju se vrednosti najviših izvoda (izabrane komponente vektora $\Delta \boldsymbol{y}^{(k)}(t)$ ili $\Delta \boldsymbol{\tau}^{(k)}(t)$ upravljanih veličina koje treba da ima upravljan objekat da bi odstupanje stvarne od nominalne trajektorije zadovoljilo tražene diferencijalne jednačine. Iz zahteva ostvarenja tih izvoda, posle smene izračunatih izvoda u (4), izračunavaju se ulazi $\boldsymbol{\tau}$.

Primena metode izračunavanja ulaza je jednostavna za sisteme kod kojih je broj ulaza ravan broju jednačina kretanja *(p=m)*. U jednačinama kretanja najviši izvod je drugi (ubrzanje), pa je stoga najjednostavnije izabrati da odstupanja zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu drugog reda. Primera radi, posmatrajmo neki objekat koji se može opisati jednom jednačinom drugog reda:

$$M(y)\ddot{y} + m(y,\dot{y}) = J(y)\tau, \quad y \in R^1 \tag{15}$$

Neka je poznata nominala $y^0 \in R^1, \dot{y} \in R^1, \ddot{y}^0 \in R^1, \tau^0 \in R^1$, koju objekat treba da opiše. Traži se da objekat (15) asimptotski stabilno prati poznatu nominalu. To će se ostvariti ako odstupanja od nominalne trajektorije zadovoljavaju diferencijalnu jednačinu:

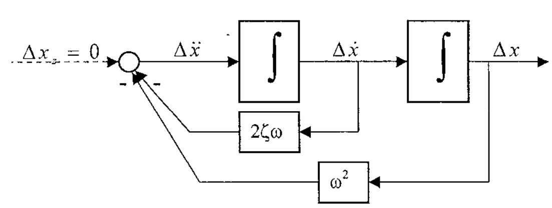
$$\Delta\ddot{y} + 2\zeta\omega\Delta\dot{y} + \omega^2\Delta y = 0 \tag{16}$$

Podešavanjem koeficijenta prigušenja ζ i učestanosti ω podešavaju se osobine stabilnosti i kvaliteta praćenja nominalne trajektorije, odnosno podešavaju se osobine sistema u zatvorenoj petlji za koga je željeni ulaz nulta vrednost odstupanja (sl.4). Iz (16) se određuje drugi izvod odstupanja:

$$\Delta\ddot{y} = -2\zeta\omega\Delta\dot{y} - \omega^2\Delta y \tag{17}$$

a kako je $\Delta\ddot{y} = \ddot{y}^0 - \ddot{y}, \Delta\dot{y} = \dot{y}^0 - \dot{y}$ i $\Delta y = y^0 - y$ to drugi izvod, koji treba da ima stvarni objekat, iznosi:

$$\ddot{y} = \ddot{y}^0 - \Delta\ddot{y} = \ddot{y}^0 + 2\zeta\omega\left(\dot{y}^0 - \dot{y}\right) + \omega^2\left(y^0 - y\right) \tag{18}$$



Slika 4. Globalna struktura sistema u zatvorenoj petlji

Smenom potrebnog drugog izvoda $\ddot{\boldsymbol{y}}$ u jednačinu kretanja (15) računa se ulaz koji treba uvoditi u objekat da bi se taj izvod realizovao:

$$\tau = J^{-1}(y)\cdot \cdot\left\{M(y)\left[\ddot{y}^0 + 2\zeta\omega\left(\dot{y}^0 - y\right) + \omega^2\left(y^0 - y\right)\right] + m(y,\dot{y})\right\} \tag{19}$$

Izračunati ulaz (19) predstavlja zakon vođenja koji treba uvoditi u stvarni objekat upravljanja da bi se ostvarilo asimptotski stabilno praćenje nominalne trajektorije. Očigledno je da će po uvođenju izračunatog zakona vođenja u model objekta (15) postavljeni zahtev (16) za ponašanje odstupanja biti identično zadovoljen.

Računanje zakona upravljanja se usložnjava za slučaj različitog broja ulaza od broja jednačina kretanja. Matematički posmatrano, problem se svodi na rešavanje sistema diferencijalnih jednačina u prisustvu ferencijalnih jednačina u prisustvu diferencijalnog ograničenja. Za slučaj $\mathbf{F}(\boldsymbol{y},\boldsymbol{\tau}) = \mathbf{J}^T(\boldsymbol{y})\tau$ i $\mathbf{P}(\Delta\boldsymbol{\tau}, \Delta\dot{\boldsymbol{\tau}}, ...) = \mathbf{0}$ opšte rešenje zadatka (14) za unapred zadatu diferencijalnu jednačinu po odstupanjima dato je u [9] za dva slučaja: za praćenje p komponenti nominalne trajektorije i za praćenje p komponenti kombinovanih od komponenti nominalne trajektorije i komponenti nominalnog ulaza.

Bez obzira koja se metoda koristi, sintetisanim zakonima vođenja $\boldsymbol{\tau} = \boldsymbol{\tau}\left(\boldsymbol{x}, \boldsymbol{\tau}^0, \boldsymbol{x}^0, \dot{\boldsymbol{x}}, \dot{\boldsymbol{\tau}}^0, \dot{\boldsymbol{x}}^0, ...\right)$ (tačno p relacija) diraktno je praćeno samo p komponenti nominalne trajektorije, a $2m$-p komponenti je određeno dinamikom objekta. Naime, zakonima vođenja se u najboljem slučaju može obezbediti idealno praćenje direktno praćenih komponenti nominalne trajektorije. To znači da će se po uvođenju zakona vođenja u objekat upravljanja ostvarivati baš nominalne komponente direktno praćenih stanja. Primera radi, neka su prvih p komponenti vektora y idealno praćeni, tj $y_i \equiv y_i^0$ i $i = 1,..,p$. U tom slučaju su i svi viši izvodi jednaki: $\dot{y}_i \equiv \dot{y}_i^0, \ddot{y}_i \equiv \ddot{y}_i^0$ $i = 1,..,p$. Smenom idealno praćenih veličina i zakona vođenja u model objekta upravljanja (3), dobija se:

$$\begin{aligned}
&\Phi_1\left(y_1^0\right)y_1^0 + \\
&+\phi_1\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\dot{y}_1^0,..,\dot{y}_p^0,\dot{y}_{p+1},..,\dot{y}_m\right) = \\
&= F_1\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\tau_1,..,\tau_p\right) \\
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_p\left(y_p^0\right)\ddot{y}_p^0 + \\
&+\phi_p\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\dot{y}_1^0,..,\dot{y}_p^0,\dot{y}_{p+1},..,\dot{y}_m\right) = \\
&= F_p\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\tau_1,..,\tau_p\right) \\
&\Phi_{p+1}\left(y_p+1\right)\ddot{y}_{p+1} + \\
&+\phi_{p+1}\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\dot{y}_1^0,..,\dot{y}_p^0,\dot{y}_{p+1},..,\dot{y}_m\right) = \\
&= F_{p+1}\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\tau_1,..,\tau_p\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

$$\begin{aligned}
&\qquad\qquad \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
&\Phi_m\left(y_m\right)\ddot{y}_m + \\
&+\phi_m\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\dot{y}_1^0,..,\dot{y}_p^0,\dot{y}_{p+1},..,\dot{y}_m\right) = \\
&= F_m\left(y_1^0,..,y_p^0,y_{p+1},..,y_m,\tau_1,..,\tau_p\right)
\end{aligned} \tag{20}$$

Slično kao pri određivanju nominalnih trajektorija, sistem (20) se svodi na formu:

$$\begin{aligned}
&\bar{\boldsymbol{\Phi}}(\bar{\boldsymbol{y}})\ddot{\bar{\boldsymbol{y}}} + \bar{\boldsymbol{\phi}}\left(t,\bar{\boldsymbol{y}},\dot{\bar{\boldsymbol{y}}}\right) = \bar{\boldsymbol{F}}(\bar{\boldsymbol{\tau}}) \\
&\boldsymbol{S}\left(t,\bar{\boldsymbol{y}},\dot{\bar{\boldsymbol{y}}},\boldsymbol{\tau}\right) = 0
\end{aligned} \tag{21}$$

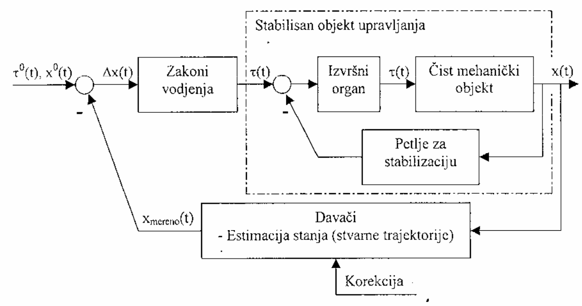
gde nadvučena crta označava veličine koje se direktno ne prate. Karakter direktno nepraćenih veličina određen je krakterom rešenja (21) i posebno se mora dokazivati u kom slučaju to rešenje konvergira nominalnim vrednostima $\bar{\boldsymbol{y}}^0, \dot{\bar{\boldsymbol{y}}}^0$ direktno nepraćenih komponenti nominalne trajektorije. Za jednu klasu objekata upravljanja i različite izbore zakona vođenja dokazi su dati u [9,12].

Dinamičko ponašanje objekta i pri idealnom praćenju ne mora biti stabilno iz dva razloga. Prvi razlog je zahtev da se prate nominalne trajektorije nestabilnog kretanja. Drugi razlog je posledica izbora komponenti vektora nominala koje se prate.

se prate.

Postoji više načina obezbeđenja stabilnog ponašanja svih komponenti vektora izlaza.

- Može da se prvo izvrši stabilizacija objekta upravljanja, pa za stabilisan sistem, kao novi objekat upravljanja, traži nove nominale i nove zakone upravljanja (sl.5)
- Od svih dopuštenih nominala formira se skup samo onih nominala ili sekvenca nominala, čije sve komponente imaju zadovoljavajući karakter.
- Izvrši se promena komponenti vektora izlaza koje se direktno prate. Posledica će biti promenjeni zakoni vođenja i novi oblik sistema (21).



Slika 5. Globalna struktura sistema vodenja sa stabilisan objekat

Algoritmi (logika) za izbor nominala, za generisanje nominala iz sekvenci, za promenu zakona vođenja i za ponašanje objekta u ekstremnim uslovima, zovu se **sistem vođenja**.

Zakoni vođenja se mogu shvatiti kao unutrašnja petlja sistema vođenja po p fiksnih komponenti vektora izlaza. Spoljašnje petlje vođenja su algoritmi sistema vođenja i predstavljaju viši hijerarhijski nivo upravljanja u odnosu na zakone vođenja.

Razlika između zakona upravljanja za regulaciona kola i zakona vođenja je prvenstveno u karakteru ulaza u zakon i u složenosti zakona. Ulaz u zakon upravljanja regulacionih kola je željena (obično konstantna) i ostvarena vrednost regulisane veličine. Zakon upravljanja u regulacionom kolu se formira samo na bazi odstupanja stvarne od željene veličine, pri čemu objekat upravljanja može biti bez ili sa zatvorenim unutrašnjim stabilizacionim petljama. Ravnotežno stanje regulacionog kola je tačka ili okolina tačke u prostoru stanja. Ulaz u zakone vođenja je nominala (vremenski promenljiv vektor) i trajektorija (stanje) objekta upravljanja. Zakon vođenja se formira na bazi kompletnog vektora odstupanja praćenih veličina od njihovih nominalnih vrednosti, za što su neophodne informacije o kompletnom vektoru stanja objekta upravljanja. Ravnotežno stanje sistema vođenja je linija ili okolina linije u prostoru stanja (nominalna trajektorija). Zakonima upravljanja u regulacionim kolima se obezbeđuje da stanja objekta upravljanja imaju zahtevane vrednosti, bez eksplicitnog zahteva u kom trenutku će se zahtev ostvariti. Zakonima vođenja se obezbeđuje da stanja objekta upravljanja imaju zahtevane vrednosti, i to, u tačno određenom trenutku (praćenje u prostoru i vremenu).

Sinteza zakona vođenja po trajektoriji je osnovni zadatak u robotici, kojim se bavi izuzetno mnogo autora (spisak literature dat je u [9]). Za potrebe vazduhoplovstva i raketne tehnike, u većini slučajeva, zakoni vođenja se uprošćavaju i svode na zakone autopilota i zakone navođenja. Rezultat okončanog zadatka su zakoni vođenja objekta upravljanja dati u formi skupa relacija vektora ulaza u funkciji nominala i stvarne trajektorije. Dobijeni zakoni vođenja su polazište za realizaciju sistema vođenja.

nja su polazište za realizaciju sistema vođenja.

Zaključak

Pokazano je da se rešavanje zadataka vođenja mehaničkih sistema po nominalama ostvaruje u tri uzastopna koraka: nalaženju odgovarajućeg matematičkog modela posmatranog mehaničkog sistema, određivanju nominala koje treba ostvariti i sintezi zakona vođenja po tim nominalama. Pokazano je da je osnovni i najvažniji zadatak nalaženje adekvatnog matematičkog modela mehaničkog sistema kao objekta upravljanja. Zahtevana tačnost ostvarivanja poslednja dva koraka određuju tačnost, koju u opisivanju statike i dinamike objekta upravljanja mora da zadovolji njegov matematički model. Za izabrane objekte upravljanja su date matematičke forme i osobine modela koji se mogu dobiti, sa posebnim naglaskom na objekte kod kojih je broj spoljašnjih ulaza različit od broja stepeni slobode kretanja, tj. od broja jednačina kretanja. Postupak i matematičke forme koje se javljaju pri sintezi nominala i sintezi zakona vođenja analizirani su samo za slučaj manjeg broja ulaza od broja jednačina kretanja. Problem sintetisanja nominala definisan je kao problem nalaženja postupka za određivanje ulaza i stanja objekta upravljanja, tako da jednačine kretanja koje opisuju objekat budu identički zadovoljene za unapred zadati deo vektora nominala. Zadatak sinteze zakona vođenja je definisan kao postupak za određivanje onih ulaza u objekat koji obezbeđuju njegov povratak na nominalu kad god se odstupanje od nje pojavi. Data je analiza postupaka sinteze zakona vođenja po nominalama sa posebnim osvrtom na zadovoljenje zahteva koji se odnose na upravljivost i opservabilnost objekta, stabilnost praćenja i obezbeđenje željenih kvaliteta praćenja. Ukazuje se da upravljanje mora biti hijerarhijsko ako je broj spoljašnjih ulaza u objekat različit od broja jednačina kretanja. Pokazano je da i pri idealnom praćenju dela vektora stanja ili ulaza, dinamičko ponašanje celokupnog sistema vođenja ne mora biti stabilno. Posebno je naglašena razlika između zakona vođenja po nominalama i zakona upravljanja regulacionih kola.

Literatura

[1] VELIČENKO,V. *Matrično-geometričeskie metodi v mehanike s priloženijami k zadačam robototehniki.* Moskva, Nauka, 1988.

[2] BUTKOVSKIJ,A. *Dinamičeskie sistemi s upravljenijem i optomehaničeskaja analogija,* Maj 1988, pp.34-47.

[3] ŽIVANOVIĆ,M. Predlog postupka za projektovanje klase sistema automatskog upravljanja. *Zbornik radova III konferencije SAUM,* (Vrnjačka Banja), oktobar 1989, pp.108-122.

[4] ŽIVANOVIĆ,M., BAJOVIĆ,M., STOJAKOVIĆ,P. Novi prilaz u analizi dinamike rotacije aviona na svim napadnim uglovima. *Naučnotehnički pregled,* novembar 1998, vol.XLVIII, no.4, pp.70-79.

[5] PJATNICKIJ,E. Upravljenije černim jašćikom mehaničeskoj prirodi. *Avtomatika i telemehanika,*,mart 1999, pp.202-212.

[6] PJATNICKIJ,E. Upravljenije mehaničeskimi sistemami v uslovjah neopredeljennosti pri otsutnostvii količestvennoj informacii o tekušćem sostojanii. *Avtomatika i telemehanika,*maj 1999,pp.164-169.

[7] PROPOJ,A."Ob odnoj zadače upravljenija. *Avtomatika i telemehanika,*maj 1999,pp.156-164.

[8] JOSIFOVICH,M.,*Fundamentals of Structural Analysis of Aertechnical Constructions (in Serbian).*Beograd.Mašinski fakultet (Faculty of Mechanical Engineering),1979.

[9] ŽIVANOVIĆ,M.*Prilog izučavanju kooperativnog rada manipulacionih robota (doktorska disertacija),* PhD thesis, Fakultet tehničkih nauka,Novi Sad,jul 1997.

[10] ŽIVANOVIĆ,M.,VUKOBRATOVIĆ,M. Synthesis of Nominal Motion of the Multi-Arm Cooperating Robots with Elastic Interconnections at the Contacts. *Trans. of the ASME: Journal on Dynamic Systems, Measurement, and Control,* 2000. (in procedure).

[11] VUKOBRATOVIĆ,V. *Dinamika aktivnih mehanizama*. Centar za multidisciplinarne studije Univerziteta u Beogradu,Beograd, 1974.

[12] VUKOBRATOVIĆ,M., STOJIĆ,R. *Modern Aircraft Flight Control.* Berlin, Springer-Verlag, 1988.

[13] WONHAM,W. On pole assignemant in multi-input controllable linear systems. *IEEE Trans. of Automatic Control,* 1967,pp.660-665.

[14] ŽIVANOVIĆ,M., VUKOBRATOVIĆ,M. Control laws synthesis of multi-arm cooperating robots with elastic interconnection at the contacts. *Robotica,* 1999,(in procedure).

[15] KORN,G.,KORN,T. *Matematical handbook for scientists and engineers (in Russian).*Moskva, Nauka,1984.

[16] BEJCZY,A.K., TARN,T.J., CHEN,Y. *Robot arm dynamic by computer.* Proc.of IEEE Conf. on Robotics and Automation, 1985, pp.960-970.

[17] DOUGLAS,A.,WILSON,J., Input-output pseudolinearization for nonlinear systems. *IEEE Trans. of Automatic Control,* November 1994, vol.39, pp.2207-2218.

[18] HUNT,L.R., RENJENG,S., MEYER,G. Global transformations of nonlinear systems. *IEEE Trans. of Automatic Control,* January 1983, vol.28, pp.24-31.

[19] MEYER,G.,SU,R., HUNT,L. Aplication of nonlinear transformations to automatic flight control. *Automatica,* 1984, vol.20, pp.103-107.

[20] CALVET,J., ARKUN,Y.:Feedforward and feedback linearization of non-linear systems with disturbances. *Int.J.Control,* 1988, vol.48, no.4, pp.1551-1559.

[21] WANG,D.,VIDYASAGAR,M.. Control of a class of manipulators with a single flexible link-Part I:feedback linearization. *Journal of Dynamic Systems, Measurement, and Control, Transactions of the ASME,* December 1991, vol.113, pp.655-660.

[22] ERBBATUR,K.,VINTER,R.,KAYNAK,O. *Feedback linearization control for a 3 dof flexible joint elbow manipulator.* Proc. of IEEE Conf. on Robotocs and Automation, 1994, pp.2979-2984.

[23] RAMADORAI,A,TARN,T.BEJCZY,A: *Task definition,decoupling and redundancy resolution by nonlinear feedback in multi-robot object handling.* Proc. of IEEE Conf. on Robotics and Automation,(Nice,France), May 1992, pp.467-474.

[24] JANKOWSKI,K.,ELMARAGFY,H., WLMARAGFY,W. Dynamic coordination of multiple robot arms with flexible joints. *Int.J.Robotic Research,* December 1993., vol.12, pp.505-528.

[25] STOJIĆ,R., KULJIĆ,R.,ŽIVANOVIĆ,M. O upravljanju letom po zadatoj putanji, *Naučnotehnički pregled,* 1990, vol.XL, no.8-9, pp.21-28.

Rad primljen: 7.4.2000. god.