

UDK: 623.428.2(047)=861  
 COSATI: 16-01, 16-04, 20-11

## Analiza dinamičkih parametara lansirne rampe pri lansiranju letelice

Dr Ratko Šelmić, dipl.inž.<sup>1)</sup>  
 Mr Vlado Đurković, dipl.inž.<sup>2)</sup>

Istraživanjem se razmatrao mehanički model lansirnog uređaja i analizirao uticaj konstrukcijskih parametara sistema na startne parametre letelice. Izvršena je numerička analiza i optimizacija datih parametara važnih za start i preciznost letelice. Predmet istraživanja je: predviđanje ponašanja lansirnih uređaja tokom procesa lansiranja letelica korišćenjem dinamičkog modela sa više stepeni slobode kretanja.

**Cljučne reči:** Lansirna rampa, letelica, raketa, kriva oblika oscilovanja, kinetička energija sistema, potencijalna energija sistema, generalisane sile.

### Uvod

ANALIZA dinamičkih parametara lansirne rampe i letelice pri lansiranju, u literaturi je još uvek nedovoljno istražena. U monografiji [1], koja predstavlja referentnu literaturu iz ove oblasti, lansirna rampa (strela) se razmatra kao kruto telo, što ne odgovara stvarnim uslovima u eksploataciji. Donekle analogan mehanički problem – izvlačenje teleskopa strele auto-dizalice, takođe je razmatran [2]. Postavljen je mehaničko-matematički model kojim se u obzir uzimaju uticajni parametri u fazi lansiranja letelice. Posebno je analizirana deformacija lansirne rampe, brzina letelice, uticaj krutosti oslonaca rampe, a zatim je razrađen numerički primer konkretne konstrukcije i izvedeni validni zaključci od interesa za poboljšanje konstrukcije.

### Model lansiranja letelice

Pretpostavlja se da je lansirna rampa nepokretna, odnosno da je postolje na kome je postavljena rampa apsolutno kruto (sl.1). Ovakav mehanički model predstavlja specijalan slučaj opšteg modela sa više stepeni slobode kretanja, koji su autori postavili, a čije je istraživanje u toku. Takođe se pretpostavlja da je lansirna rampa, greda sa prepustom (zanemaruje se manji prepust rampe), i da je greda elastična i deformabilna u vertikalnoj ravni (sl.2).

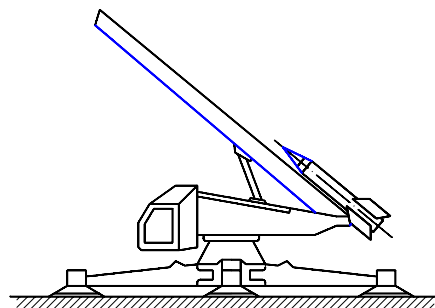
Usvojene su sledeće generalisane koordinate, koje određuju kretanje sistema:

- $\xi$  kretanje (pomeranje) težišta letelice (rakete) u pravcu podužne ose deformabilne lansirne rampe u odnosu na zglob lansirne rampe,
- $u$  ugib vrha lansirne rampe u pravcu upravnom na podužnu, nedeformisanu osu lansirne rampe.

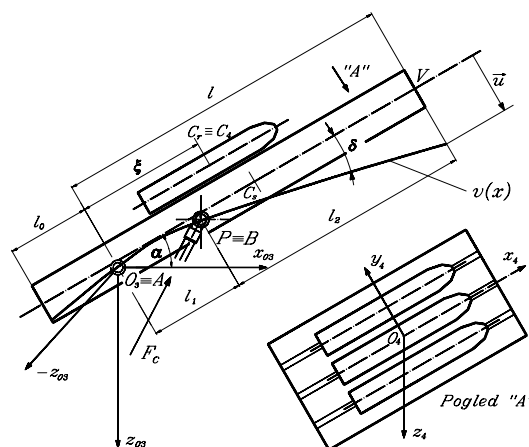
Pretpostavimo krivu oblika oscilovanja  $v = v(x)$  lansirne rampe, funkcijom [2,3],

$$v(x) = u \left( \frac{x}{l} \right)^2 \quad (1)$$

predstavljenoj na slikama 2 i 3, gde je  $x$ – podužna težišna osa rampe,  $l$ – dužina rampe od oslonca-zgloba do vrha rampe.



Slika 1. Lansirna rampa sa letelicom

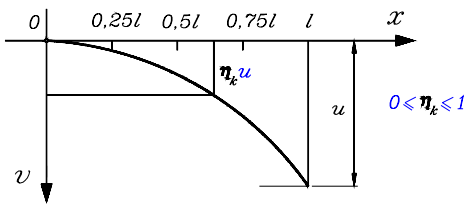


Slika 2. Mehanički model lansirne rampe sa letelicom

<sup>\*)</sup> Redovni član Akademije Problemi kvaliteta Ruske federacije

<sup>1)</sup> Saobraćajni fakultet, 11000 Beograd, Vojvode Stepe 305

<sup>2)</sup> Vojnotehnička akademija VJ, 11000 Beograd, Ratka Resanovića 1



Slika 3. Kriva oblika oscilovanja rmake

### Kinetička energija sistema

Za izračunavanje kinetičke energije kretanja lansirne rampe i rakete, određeni su uglovi:  $\delta_1$ - nagib rakete i  $\delta_2$  - nagib centra mase lansirne rampe, u funkciji deformacije vrha lansirne rampe ( $u$ ).

Uglovi nagiba rakete i centra mase lansirne rampe dobijeni su iz funkcije ugiba lansirne rampe (1) u obliku:

$$\delta_1 = 2u \frac{\xi}{l^2}, \quad \delta_2 = \frac{u}{l} \quad (2)$$

Kinetička energija datog mehaničkog sistema sastoji se od kinetičke energije rakete i kinetičke energije lansirne rampe:

$$E_k = E_{k_r} + E_{k_s} \quad (3)$$

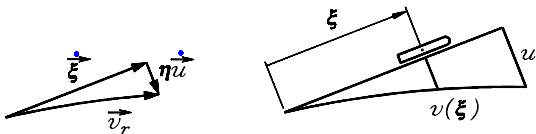
$$E_k = \frac{1}{2} m_r v_r^2 + \frac{1}{2} J_r \dot{\delta}_1^2 + \frac{1}{2} m_s v_T^2 + \frac{1}{2} J_s \dot{\delta}_2^2 \quad (4)$$

gdje su:  $m_r$  – masa rakete,  $v_r$  – brzina rakete,  $J_r$  – moment inercije rakete za  $y$  osu (poprečna osa), koja prolazi kroz centar mase rakete,  $m_s$  – masa lansirne rampe,  $v_T$  – brzina pomeranja središta masa lansirne rampe usled elastičnog oslonca i deformacije lansirne rampe (strele),  $J_s$  – moment inercije lansirne rampe za  $y$  osu (poprečna osa), koja prolazi kroz zglobov rampe,

Brzina rakete prikazana na sl.4, data je izrazom:

$$v_r^2 = \dot{\xi}^2 + (\eta \dot{u})^2 = \dot{\xi}^2 + \left(\frac{\xi}{l}\right)^4 \cdot \dot{u}^2 \quad (5)$$

jer je  $\eta = \left(\frac{\xi}{l}\right)^2$ .

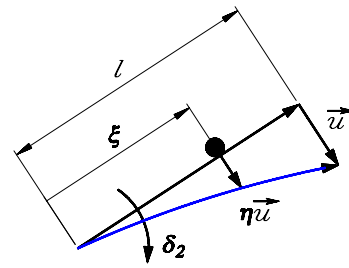


Slika 4. Brzina rakete

Ugaona brzina rakete dobija se na osnovu izvoda ugla rotacije rakete  $\dot{\delta}_1 = 2\dot{u} \frac{\xi}{l^2} + 2u \frac{\dot{\xi}}{l^2}$ .

Brzina težišta lansirne rampe dobija se na osnovu izraza  $v = u \left(\frac{\xi}{l}\right)^2$ , koji se diferencira po vremenu, pa se za  $\xi = l/2$  dobija:

$$v_T = \frac{\dot{u}}{4} \quad (6)$$



Slika 5. Ugaona deformacija rampe

Ugaona brzina lansirne rampe rakete na osnovu sl.5 dobija se prema (2):

$$\dot{\delta}_2 = \frac{\dot{u}}{l} \quad (7)$$

Konačno, kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2} m_r \left[ \dot{\xi}^2 + \left(\frac{\xi}{l}\right)^4 \dot{u}^2 \right] + 2 \frac{J_r}{l^4} (\dot{u} \cdot \xi + u \cdot \dot{\xi})^2 + \frac{1}{32} m_s \dot{u}^2 + \frac{1}{2} J_s \frac{\dot{u}^2}{l^2} \quad (8)$$

### Potencijalna energija sistema

Potencijalna energija usvojenog mehaničkog sistema jednaka je zbiru potencijalne energije rakete, lansirne rampe i potencijalne energije deformacije oslonca hidrocilindra:

$$E_p = E_{p_r} + E_{p_s} + E_{p_0} \quad (9)$$

Potencijalna energija rakete je:

$$E_p = m_r g (z_r - z_{r0}) = m_r g (\xi \cdot \sin \alpha - z_{r0}) \quad (10)$$

gde su  $\alpha$  – ugaon nagiba lansirne rampe (slika 2.),  $z_{r0}$  – ordinata težišta rakete u početnom položaju.

Potencijalna energija lansirne rampe je [5,6],

$$E_{p_s} = E_{p_s1} + E_{p_s2} + E_{p_s3} \quad (11)$$

$$E_{p_s} = \frac{1}{2} \int_0^l EI_{sy} \left( \frac{\partial^2 v}{\partial x^2} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l N(x, t) \left( \frac{\partial v}{\partial x} \right)^2 dx + \frac{1}{2} \int_0^l f(x, t) \cdot v dx \quad (12)$$

gde prvi sabirak predstavlja potencijalnu energiju elastične deformacije usled savijanja rampe, drugi sabirak potencijalnu energiju pritiska-zatezanja lansirne rampe usled delovanja aksijalne sile  $N(x, t)$ , i treći sabirak definiše potencijalnu energiju zbog dejstva transverzalne sile  $f(x, t)$ . U izrazu (12) sa  $l$  je označena dužina rampe,  $E$  je modul elastičnosti materijala rampe, a  $I_{sy}$  moment inercije poprečnog preseka rampe za osu  $y$ .

Ukupna sila u hidrocilindru je:

$$F_c = \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) p + cv(l_1) \cos \theta \quad (13)$$

gde su:  $D$ - prečnik klipa,  $d$ -prečnik klipnjače,  $p$ -pritisak u hidrauličnoj instalaciji,  $c$ -krutost hidrocilindra,  $\theta$ - ugaon

između ose hidrocilindra i normale na podužnu osu rampe u tački vešanja hidrocilindra. Potencijalna energija deformacije oslonca uzima se u obzir preko sabiraka 2 i 3 u izrazu (12), tako što se sila  $F_c$  projektuje na aksijalnu i poprečnu osu rampe.

Konačan izraz za potencijalnu energiju dobija formu:

$$E_p = k_o + k_1 u + k_2 u^2 + k_3 u^3 \quad (14)$$

gde su konstantni koeficijenti:

$$\begin{aligned} k_o &= m_r g (\xi \sin \alpha - z_{ro}), \\ k_1 &= \frac{1}{6} \left[ (m_r + m_s) g \cos \alpha - \frac{\pi}{4} (D^2 - d^2) p \cos \theta \right], \\ k_2 &= \frac{2EI_{sy}}{l^3} + \frac{2a}{l^3} + \frac{cl_1^2}{6l^2} \cos^2 \theta, \quad k_3 = \frac{2b}{l^3} \end{aligned}$$

pri čemu su  $a, b$  - takođe konstante.

### Generalisane sile

Generalisane sile koje odgovaraju koordinatama  $\xi$  i  $u$  su:

$$Q_\xi = F_p - F_\mu - F_{ov}, \quad Q_u \approx 0 \quad (15)$$

gde su:  $F_p$  - sila potiska rakete,  $F_\mu$  - sila trenja između rakete i rampe,  $F_{ov}$  - sila otpora vazduha. Sila potiska rakete se menja po zakonu (sl.6):

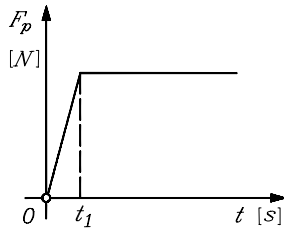
$$F_p = \begin{cases} kt, & 0 < t < t_1 \\ kt_1 & t \geq t_1 \end{cases} \quad (16)$$

Sila trenja rakete o lansirnu rampu je:

$$F_\mu = \mu m_r g \cos \alpha$$

a sila otpora vazduha pri kretanju rakete po lansirnoj rampi:

$$F_{ov} = C \rho A \left[ \dot{\xi}^2 + \left( \frac{\xi}{l} \right)^2 \dot{u}^2 \right] \quad (17)$$



Slika 6. Promena sile potiska u funkciji vremena

gde su:  $\mu$  - koeficijent trenja rakete po lansirnoj rampi,  $\rho$  - gustina vazduha,  $C$  - bezdimenzioni koeficijent koji zavisi od oblika rakete,  $A$  - projekcija površine rakete na ravan koja je upravna na vektor brzine.

### Diferencijalne jednačine kretanja

Usvojeni mehanički sistem je nekonzervativan, a odgovarajuće veze su holonomne, nestacionarne i idealne. Za izvođenje diferencijalnih jednačina kretanja koristiće se Lagranžove jednačine druge vrste:

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{\partial E_k}{\partial \dot{q}_r} \right) - \frac{\partial E_k}{\partial q_r} + \frac{\partial E_p}{\partial q_r} = Q_r \quad (r = 1, 2; q_1 = \xi, q_2 = u) \quad (18)$$

Ako se uvedu oznake za konstante:

$$\begin{aligned} A &= \frac{4J_{ry}}{m_r l^4}, B = \frac{2}{l^4}, F = \frac{\rho CA}{2m_r}, D = \frac{1}{m_r}, P = \frac{F}{l^4}, \\ G &= \frac{m_s}{16m_r}, H = \frac{J_{sy}}{m_r l^2} \end{aligned} \quad (19)$$

$$K = \frac{1}{l^4}, L = G + H, R = 2D(k_1 + k_2 + k_3) \quad (20)$$

tada diferencijalne jednačine, koje opisuju kretanje razmatranog mehaničkog modela, imaju oblik:

$$\begin{aligned} (1 + Au^2) \ddot{\xi} + A \xi u \ddot{u} &= D(F_p - F_\mu) - \\ -g \sin \alpha - F \dot{\xi}^2 - Q \xi^4 \dot{u}^2 + B \dot{u}^2 \xi^3 - 2A u \dot{u} \dot{\xi} \end{aligned} \quad (21)$$

$$\begin{aligned} (K \xi^4 + A \xi^2 + L) \ddot{u} + A u \xi \ddot{\xi} &= \\ = -2A \xi \dot{\xi} \dot{u} - A \dot{\xi}^2 u - Ru - 3Dk_3 u^2 - Dk_4 \end{aligned} \quad (22)$$

Ako se izvrši smena:

$$x_1 = \xi, x_2 = \dot{\xi}, x_3 = u, x_4 = \dot{u} \quad (23)$$

dobija se sistem diferencijalnih jednačina:

$$\begin{aligned} (1 + Ax_3^2) \cdot \dot{x}_2 + Ax_1 x_3 \cdot \dot{x}_4 &= D(F_p - F_\mu) - g \sin \alpha - F x_2^2 - \\ - Q x_1^4 x_4^2 + B x_4^2 x_1^3 - 2Ax_3 x_4 x_2 \end{aligned} \quad (24)$$

$$\begin{aligned} Ax_3 x_1 \cdot \dot{x}_2 + (Kx_1^4 + Ax_1^2 + L) \cdot \dot{x}_4 &= \\ = -2Ax_1 x_2 x_4 - Ax_2^2 x_3 - Rx_3 - 3Dk_3 x_3^2 - Dk_4 \end{aligned}$$

Sistem diferencijalnih jednačina (24) ima oblik:

$$\begin{aligned} \|A(\xi, u)\| \left\| \begin{Bmatrix} \ddot{\xi} \\ \ddot{u} \end{Bmatrix} \right\| + \|B(\xi, u)\| \left\| \begin{Bmatrix} \dot{\xi} \\ \dot{u} \end{Bmatrix} \right\| + \\ + \|C(\xi, u)\| \left\| \begin{Bmatrix} \xi \\ u \end{Bmatrix} \right\| = \left\{ D(\xi, u, \dot{\xi}, \dot{u}) \right\} \end{aligned} \quad (25)$$

a transformiše se na sistem od četiri diferencijalne jednačine prvog reda, pogodan za numeričko rešavanje programskim paketom MAT-LAB. Numerička analiza ovog problema je urađena za konkretnu letelicu.

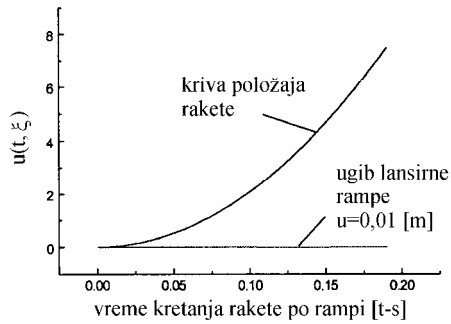
Dijagrami pređenog puta rakete, brzine rakete i ugiba lansirne rampe u funkciji vremena kretanja rakete na rampi, dati su na slikama 7 i 8. Dijagrami ugiba u funkciji krutosti cilindra i brzine rakete u funkciji mase rakete pokazani su na slikama 9 i 10. Na slikama 11 i 12 dati su ugibi vrha rampe u zavisnosti od ugla nagiba lansirne rampe i mase rakete. Konačno, na slikama 13 i 14 dati su brzina rakete u zavisnosti od nagiba rampe i ugib rampe u funkciji vremena.

### Analiza rezultata i zaključak

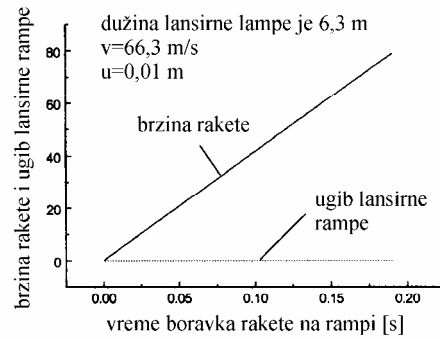
U okviru numeričke analize problema, analiziran je uticaj geometrijskih parametara  $l_1$  i  $l$ , zatim krutosti hidrocilindra ( $c$ ), mase rakete  $m_r$ , mase lansirne rampe  $m_s$  i ugla nagiba lansirne rampe ( $\alpha$ ) na ugib vrha rampe ( $u$ ) i brzinu letelice ( $v_r$ ).

Izvedeni su sledeći zaključci:

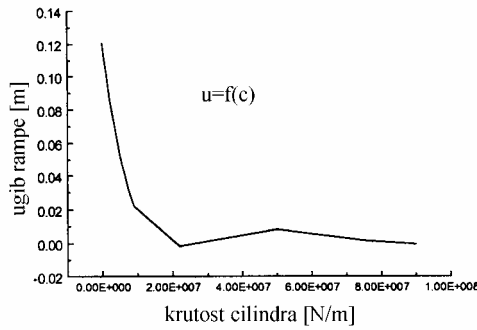
- krutost cilindra u jednom određenom području dominantno utiče na ugib lansirne rampe (sl.9),
- brzina rakete opada sa povećanjem mase rakete po zakonu koji može da se aproksimira hiperbolom (sl.10.),



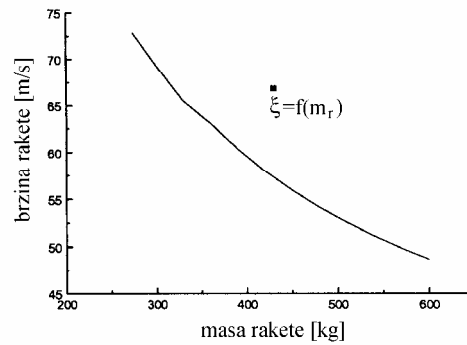
Slika 7



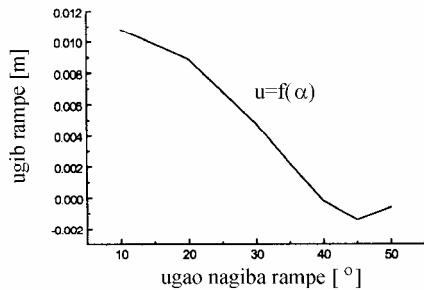
Slika 8



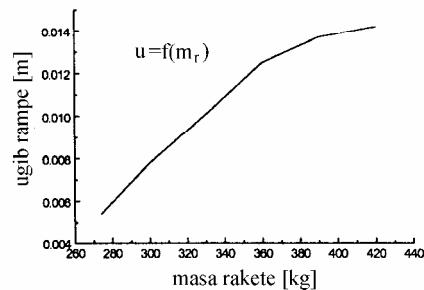
Slika 9



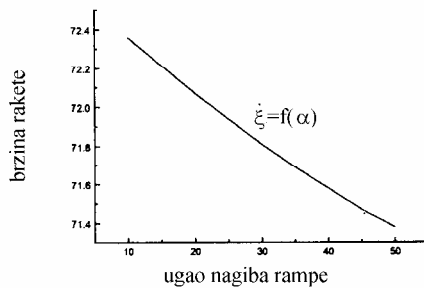
Slika 10



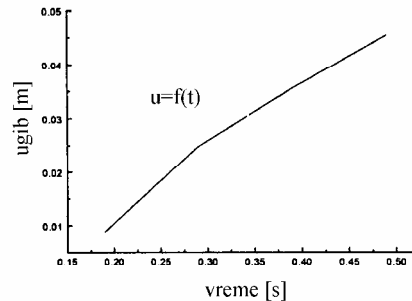
Slika 11



Slika 12



Slika 13



Slika 14

- ugao nagiba lansirne rampe, takođe utiče na ugib, ali u manjem obimu nego krutost oslonca (sl.11.),
- povećanje mase rakete skoro linearno povećava ugib

- vrha rampe (sl.12.),
- smanjenje brzine rakete, usled povećanja ugla nagiba rampe, je neznatno i za promenu ugla od  $10^\circ$  do  $50^\circ$  iznosi  $\approx 2\%$  (sl.13),

- ugib vrha rampe raste srazmerno vremenu kretanja rakete po njoj i dostiže maksimalnu vrednost u trenutku kada raketa napušta rampu (sl.14).

### Literatura

- [1] SVETLICKIJ V.A. Dinamika starta letatel'nyh aparatov. "Nauka", Moskva, 1986.
- [2] ŠELMIĆ,R.R. Opterećenja teleskopske strele auto-dizalica pri izvlačenju teleskopa, Mašinstvo, 1982, vol.31, no.5, p.727-731.
- [3] ŠELMIĆ,R.R. Prilog istraživanju dinamičkih opterećenja noseće konstrukcije auto-dizalice sa specijalnom (ojačanom) šasijom, hidropogonom i teleskopskom strelom, doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Beograd, 1979.
- [4] ŠELMIĆ,R.R. Nekotorye voprosy dinamičeskoj ustojčivosti teleskopičeskoj strely avtokrana, Konferenz uber fördertechnik, Zbornik radova, Miskolc 1987., p.743-750.
- [5] RAŠKOVIĆ,D. Teorija oscilacija, "Naučna knjiga", Beograd, 1957.
- [6] BABAKOV,I.M. Teorija kolebanij, "Nauka", Moskva 1965.
- [7] ŠELMIĆ,R.R. Dinamičeskie nagruzki i ustojčivosté avtokrana na uprugom osnovanii, "Stroitel'nye i dorožnye mašiny", 1996, no.4.

Rad primljen: 18.4.2000.god.