UDK: 681.5.015(047)=861
COSATI: 14-02, 12-01, 14-07

Suboptimalan algoritam za ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog modela

Dr Nenad Dodić, dipl.inž.[1)]

Boks-Dženkinskov model je pogodan za opis široke klase linearnih sistema u čijim su kanalima merenja prisutni šumovi određenih spektralnih karakteristika. Razmatra se ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog diskretnog modela i predlaže suboptimalan algoritam koji u realnom vremenu daje ocene parametara modela koje su nepristrasne sa približno minimalnom varijansom. Forma algoritama omogućuje neposrednu realizaciju na računaru. Ocenjivanje parametara analognog ili hibridnog sistema se može realizovati posredno, primenom određene obostrano jednoznačne transformacije analognog matematičkog modela sistema u diskretni i primenom opisanog algoritma na transformisani model. Algoritam se poredi sa nizom drugih postupaka za ocenjivanje parametara i ilustruje njegova superiornost.

Ključne reči: **Ocenjivanje parametara, Boks-Dženkinsov model, linearan sistem, diskretan sistem, analogan sistem, algoritam, dijagram toka, računar, merenje odziva.**

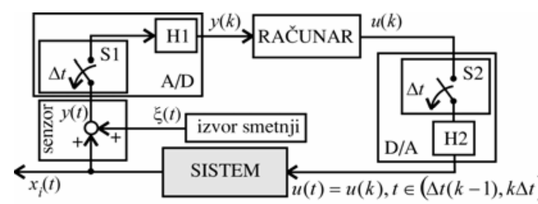
U v o d

PRIMENA računara u tehnici je uzela toliko maha, da osnovna deviza savremenih konstrukcionih biroa i razvojnih laboratorija može da glasi: "Ako se računar može primeniti u obavljanju određene delatnosti, primeniće se tako da učešće čoveka u njoj bude minimalno". Tako je danas u naprednom razvojno-industrijskom okruženju nemoguće zamisliti ozbiljnije merenje ili ispitivanje, bez primene računara.

Ocenjivanje nepoznatih parametara sistema se obavlja na osnovu merenja odziva sistema na određeni vremenski promenljivi ulaz. Postupci ocenjivanja su veoma zahtevni u pogledu broja potrebnih računskih operacija, pa je još u ranoj fazi razvoja računara postojala težnja da se računari upotrebe u postupku ocenjivanja parametara sistema. Ocene parametara su potrebne ne samo u postupku analize sistema i potpunog definisanja njegovog matematičkog modela, već i za adaptivne šeme upravljanja sistemima sa promenljivim parametrima. S obzirom da se adaptivno upravljanje po pravilu ostvaruje primenom računara, jasno je da su postupci za ocenjivanje parametara u realnom vremenu, primenom računara, najpoželjniji. Najpogodnije je da se takvi postupci definišu u obliku algoritama, koji omogućuju što jednostavniju izradu odgovarajućih računarskih programa. Jedan takav efikasan algoritam za ocenjivanje parametara linearnih sistema će biti razmatran.

Postavka zadatka

Na sl.1 je prikazana šema merenja, koja automatizuje merenje odziva sistema na proizvoljan vremenski promenljivi ulaz. Računar pobuđuje ispitivani sistem ulaznim signalom $u(t)$. Ulaz $u(t)$ je poznata veličina, za računar jer ga sam računar generiše i šalje sistemu posredstvom digitalno--analognog (D/A) pretvarača (u slučaju da je ispitivani sistem analogan), ili neke digitalne sprege (kada je sistem diskretan ili hibridan).



Slika 1. Putanja simuliranog cilja

Neka se merenje izlaza $x_i(t)$ obavlja u prisustvu smetnji. Izvor smetnji može biti u samom mernom senzoru ili negde drugde u mernom kanalu. On generiše šum $\xi(t)$, koji "zagađuje" veličinu $x_i(t)$ koja se meri. Stoga je stvarna vrednost veličine $x_i(t)$ nepoznata. Izmereni izlaz $y(t)$ sadrži i koristan signal $x_i(t)$ i šum $\xi(t)$. Računar izmereni izlaz sistema dobija preko analogno-digitalnog (A/D) pretvarača ili posredstvom određene digitalne sprege.

Pretvarači A/D i D/A sadrže odabirače. Odabirač A/D pretvarača obeležen je kao S1 na sl.1, a odabirač D/A pretvarača kao S2. Pri merenjima za potrebe ocenjivanja parametara sistema je uobičajeno da ovi prekidači rade sinhronizovano (zatvaraju se i otvaraju u istom trenutku), da se zatvaraju u jednakim vremenskim razmacima Δt, i da je period u toku koga su oni zatvoreni zanemarljivo kratak u odnosu na Δt. Period Δt između dva trenutka odabiranja nazvan je *period odabiranja*.

Pretvarači A/D i D/A sadrže kola za zadržavanje signala. Kolo za zadržavanje signala A/D pretvarača je označeno na sl.1 sa H1, a odgovarajuće kolo D/A pretvarača sa H2.

[1)] Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

Zadatak kola H1 je da zadržava vrednost $y(k\Delta t)$, očitanu u trenutku k-tog odabiranja (k=0,1,...), u toku vremena ($k\Delta t$, $(k+1)\Delta t$), kako bi računar mogao da je upotrebi u trenutku kada to bude potrebno. Zadatak kola H2 je da pobudni signal $u(k)$, generisan u k-tom diskretnom trenutku, odnosno u trenutku $t = k\Delta t$, "produžava" tokom vremena ($k\Delta t$, $(k+1)\Delta t$), odnosno sve dok se ne generiše nova vrednost pobudnog signala. Kola za produžavanje su, nultog reda, što znači da vrednost primljenog signala drže konstantnom između dva trenutka odabiranja.

Po prirodi mernih lanaca prosečna apsolutna brzina promene šuma $\xi(t)$ je bar za red veličine veća od prosečne apsolutne brzine promene veličine koja se meri. Šum merenja sadrži harmonike čije su frekvencije bar desetak puta veće od harmonika veličine $x_i(t)$. Česta je pretpostavka da šum merenja ima neograničen frekventni opseg. Uobičajena je pretpostavka da je šum merenja beli šum, odnosno da je vremenski nekorelisan.

S obzirom da vremenske konstante mernih senzora ipak nisu beskonačno male, da se ne bi gubilo na opštosti pretpostaviće se da šum $\xi(t)$ ima ograničen frekventni opseg, tj. da je tzv. *obojeni šum*.

Neka je sistem koji se posmatra linearan. Izložiće se algoritam koji određuje parametre matematičkog modela sistema, tako da je odstupanje njegovog izlaza od izlaza stvarnog sistema minimalno, za proizvoljan oblik ulaznog signala. Time se dobija model koji verno odslikava dinamiku posmatranog sistema.

Neka su trenuci odabiranja signala izlaza $y(t)$ i signala ulaza $u(t)$ identični i neka je period odabiranja Δt konstantan. Računar veličine $u(t)$ i $y(t)$ "vidi" samo u trenucima $t = k\Delta t$, k=0,1,..., odnosno on "vidi" $u(k\Delta t)$, $y(k\Delta t)$, k=0,1,..., što će se kratko pisati: $u(k)$, $y(k)$, k=0,1,... . Stoga je diskretna reprezentacija sistema najpogodnija za računarsku primenu.

Pretpostavlja se da je šum ξ aditivan, odnosno da je:

$$y(k) = x_i(k) + \xi(k) \tag{1}$$

gde je k proizvoljan diskretan trenutak. Ova pretpostavka je opravdana kada se izvor šuma ne nalazi u samom sistemu.

Za opis sistema se koristi linearni diskretni model:

$$x_i(k) = -\sum_{j=1}^{n} a_j x_i(k-j) + \sum_{j=0}^{m} b_j u(k-j) \tag{2}$$

gde je n red posmatranog sistema, m ceo broj manji ili jednak n ($m \le n$), a a_i, i=1,2,...,n, b_j, j=0,1,...,m, realni koeficijenti. Za opis šuma se koristi diskretan filtar za uobličavanje signala:

$$\xi(k) = -\sum_{i=1}^{q} c_i \xi(k-i) + n(k) + \sum_{j=1}^{r} d_j n_j(k-j) \tag{3}$$

gde je q red filtra, a r je ceo broj manji ili jednak q ($r \le q$). Koeficijenti c_i, i=1,2,...,q, d_j, j=1,2,...,r, su realni brojevi. $n(k)$ je *beli šum* - slučajna vremenski nekorelisana veličina nultog matematičkog očekivanja:

$$E\{n(k)\} \equiv 0 \tag{4}$$

$$E\{n(k)n(k-j)\} = \sigma^2 \delta_k(k-j)\ , \quad k, j = 0,1,\ldots \tag{5}$$

$$\delta_k(i) = \begin{cases} 1\ , & i = 0 \\ 0\ , & i \ne 0 \end{cases} \tag{6}$$

"E" označava matematičko očekivanje. σ^2 je varijansa belog šuma. Kao što je poznato iz teorije slučajnih procesa, frekventni spektar belog šuma je konstantan i neograničen [1]. Filtar (3) prigušuje harmonike visokih frekvencija i uvodi vremensku korelaciju vrednosti $\xi(k)$, k =0,1 ,....

Treba napomenuti da ξ ne mora da bude isključivo šum koji se javlja u lancu merenja. To može da bude i ukupan šum sistema i mernog lanca, pod uslovom da važi (1). Sistem (1-3), pri čemu važi (4-6), je poznat pod nazivom *Boks--Dženkinsov (Box-Jenkins) model* [2].

Postavlja se sledeći zadatak: modeli sistema i šuma dati su izrazima (1-6), pri čemu su vrednosti n, m, q i r unapred zadate (struktura sistema je, znači, poznata). Meri se vremenska sekvenca izlaza sistema:

$$\mathbf{y}(T) = (y(1), y(2), \ldots, y(T))' \tag{7}$$

pri dejstvu sekvence ulaza:

$$\mathbf{u}(T) = (u(1), u(2), \ldots, u(T))' \tag{8}$$

Treba oceniti parametre: a_j, j=1,2,...,n, b_j, j=0,2,...,m, c_i, i=1,2,...,q, d_j, j=1,2,...,r, tako da je slaganje između izlaza sistema $x_i(t)$ i izlaza $\hat{x}_i(t)$ njegovog modela, definisanog pomoću:

$$\hat{x}_i(k) = -\sum_{j=1}^{n} \hat{a}_j \hat{x}_i(k-j) + \sum_{j=0}^{n} \hat{b}_j u(k-j) \tag{9}$$

maksimalno.

Veličine: $\hat{a}_j$, j=1,2,...,n, $\hat{b}_j$, j=0,2,...,m, $\hat{c}_i$, i=1,2,...,q, $\hat{d}_j$, j=1,2,...,r, predstavljaju ocene parametara modela sistema i šuma. Sekvence veličina $y(t)$, $u(t)$ su predstavljene vektorima. Apostrof (') označava transpoziciju vektora ili matrice. T označava dužinu, odnosno trajanje vremenskih sekvenci.

Teorijska osnova algoritma

Pretpostavlja se da beli šum $n(k)$, kao ulaz u filtar za uobličavanje signala, ima Gausovu raspodelu, odnosno da je njegova gustina raspodele verovatnoća data izrazom:

$$p(n) = \frac{\exp\left(-\dfrac{n^2}{2\sigma^2}\right)}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} \tag{10}$$

Za rešavanje postavljenog zadatka se koristi tzv. *inverzni model šuma*, koji sledi iz izraza (1) i (3) u kojima su nepoznate veličine zamenjene ocenama:

$$\hat{n}(k) = \hat{\xi}(k) + \sum_{i=1}^{q} \hat{c}_i \hat{\xi}(k-i) - \sum_{j=1}^{n} \hat{d}_j \hat{n}_j(k-j) \tag{11}$$

$$\hat{\xi}(k) = y(k) - \hat{x}_i(k) \tag{12}$$

Jednačine (11,12) važe za k=1,2,..., pri čemu se usvaja $\xi(i) \equiv n(i) \equiv 0$, za i<0. Može se formirati vremenska sekvenca vrednosti $\hat{n}$:

$$\mathbf{N}(T) = \begin{pmatrix} \hat{n}(1) & \hat{n}(2) & \cdots & \hat{n}(T) \end{pmatrix}' \tag{13}$$

Vektor $\mathbf{N}$ ima normalnu raspodelu:

$$p(\mathbf{N}) = \frac{\exp\left(-\dfrac{1}{2\sigma^2}\mathbf{N}'\,\mathbf{N}\right)}{(2\pi\sigma^2)^{T/2}} \tag{14}$$

Uvodi se funkcija verodostojnosti L, koja predstavlja prirodni logaritam gustine raspodele verovatnoće $p(\mathbf{N})$:

$$L(\hat{\mathbf{a}}^p, \hat{\mathbf{c}}^p, \mathbf{u}(t), \mathbf{y}(t), \sigma^2) = \ln p(\mathbf{N}) \tag{15}$$

gde su $\hat{\mathbf{a}}^p$ i $\hat{\mathbf{c}}^p$ vektori čiji su elementi ocene nepoznatih parametara:

$$\hat{\mathbf{a}}^p = \left(\hat{a}_1 \cdots \hat{a}_n \quad \hat{b}_0 \cdots \hat{b}_m\right)' = \left(\hat{a}_1^p \cdots \hat{a}_{n+m+1}^p\right)' \tag{16}$$

$$\hat{\mathbf{c}}^p = \left(\hat{c}_1 \cdots \hat{c}_q \quad \hat{d}_1 \cdots \hat{d}_r\right)' = \left(\hat{c}_1^p \cdots \hat{c}_{q+r}^p\right)' \tag{17}$$

Pošto se izmere sekvence $\mathbf{u}(T)$, $\mathbf{y}(T)$, nepoznati parametri mogu da se ocene maksimizacijom L (15), odnosno rešavanjem sistema jednačina:

$$\frac{\partial L(\hat{\mathbf{a}}^p, \hat{\mathbf{c}}^p, \sigma^2)}{\partial \hat{\mathbf{a}}^p} = \mathbf{0} \tag{18}$$

$$\frac{\partial L(\hat{\mathbf{a}}^p, \hat{\mathbf{c}}^p, \sigma^2)}{\partial \hat{\mathbf{c}}^p} = \mathbf{0} \tag{19}$$

Rešenja $\hat{\mathbf{a}}^p$, $\hat{\mathbf{c}}^p$ sistema (18,19) predstavljala bi optimalne ocene parametara Boks-Dženkinsovog modela na osnovu izmerenih sekvenci $\mathbf{u}(T)$, $\mathbf{y}(T)$. Relacije (18,19) se ne mogu direktno da reše radi dobijanja ocena $\hat{\mathbf{a}}^p$, $\hat{\mathbf{c}}^p$. Međutim, ako je $\hat{\mathbf{c}}^p$ poznato, onda se $\hat{\mathbf{a}}^p$ može dobiti rešavanjem (18). Korišćenjem ove činjenice, prema [3], mogu da se formiraju sledeći rekurentni izrazi za rešavanje (18):

$$\hat{\mathbf{a}}^p \leftarrow \hat{\mathbf{a}}^p - \mathbf{K}\left[\left(\mathbf{z}^*\right)' \hat{\mathbf{a}}^p - y^*(k)\right] \tag{20}$$

$$\mathbf{H} \leftarrow \mathbf{H} - \mathbf{K}\left(\mathbf{z}^*\right)' \mathbf{H} \tag{21}$$

$$\mathbf{K} \leftarrow \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^*\left[\hat{\sigma}^2 + \left(\mathbf{z}^*\right)' \mathbf{H}\hat{\mathbf{x}}^*\right]^{-1} \tag{22}$$

Simbol "←" znači "postaje" i standardno se koristi u računarskim algoritmima. Na primer, veličini $\hat{\mathbf{a}}^p$ se u posmatranom trenutku dodeljuje vrednost desne strane izraza, pri čemu $\hat{\mathbf{a}}^p$ desno od znaka "←" predstavlja vektor ocena dobijen u prethodnom ciklusu računanja, odnosno u prethodnom diskretnom trenutku. Veličine koje se pojavljuju u izrazima (20-22) imaju sledeća značenja:

$$\hat{\mathbf{x}}^* = \begin{pmatrix} \hat{x}_1^* \\ \hat{x}_2^* \\ \vdots \\ \hat{x}_{n+m+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{x}_i^*(k-1) \\ -\hat{x}_i^*(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{x}_i^*(k-n) \\ u^*(k) \\ \vdots \\ u^*(k-m) \end{pmatrix} \tag{23}$$

$$\hat{\mathbf{z}}^* = \begin{pmatrix} \hat{z}_1^* \\ \hat{z}_2^* \\ \vdots \\ \hat{z}_{n+m+1}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^*(k-1) \\ -y^*(k-2) \\ \vdots \\ -y^*(k-n) \\ u^*(k) \\ \vdots \\ u^*(k-m) \end{pmatrix} \tag{24}$$

$$\mathbf{K} = \begin{pmatrix} K_1 \\ K_2 \\ \vdots \\ K_{n+m+1} \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H} = \begin{pmatrix} h_{11} & \cdots & h_{1,n+m+1} \\ h_{21} & \cdots & h_{2,n+m+1} \\ \vdots & & \vdots \\ h_{n+m+1,1} & \cdots & h_{n+m+1,n+m+1} \end{pmatrix} \tag{25}$$

$\hat{\sigma}^2$ predstavlja ocenu varijanse σ^2. $\mathbf{K}$ je pomoćni vektor, a $\mathbf{H}$ pomoćna matrica. Elementi vektora $\hat{\mathbf{x}}^*$ i $\mathbf{z}^*$ se dobijaju primenom sledećih diskretnih filtara [3]:

$$\hat{x}_i^*(k) = -\sum_{j=1}^{n} \alpha_j \hat{x}_i^*(k-j) + \sum_{j=0}^{m} \beta_j u^*(k-j) \tag{26}$$

$$u^*(k) = u(k) - \sum_{i=1}^{n+r}(\alpha_i + \delta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \delta_{i-j}) u^*(k-i) + + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j u(k-j) \tag{27}$$

$$y^*(k) = y(k) - \sum_{i=1}^{n+r}(\alpha_i + \delta_i + \sum_{j=1}^{i-1} \alpha_j \delta_{i-j}) y^*(k-i) + + \sum_{j=1}^{q} \gamma_j y(k-j) \tag{28}$$

$$\delta_i \equiv 0 \;, \quad i > \mathrm{r} \tag{29}$$

$$\alpha_i \equiv 0 \;, \quad i > n \tag{30}$$

Veličine α_i, j=1,2,...,n, β_j, j=0,2,...,m, γ_i, i=1,2,...,q, δ_j, j=1,2, ...,r, predstavljaju polazne (inicijalne) vrednosti ocena $\hat{a}_i$, i=1,2,...,n, $\hat{b}_j$, j=0,2,...,m, $\hat{c}_i$, i=1,2,...,q, $\hat{d}_j$, j=1,2,..., r, respektivno. To su koeficijenti pomoćnih filtara (26-28). Za razliku od ocena $\hat{a}_i$, $\hat{b}_j$, $\hat{c}_i$, $\hat{d}_j$, koje se u načelu menjaju pri porastu vremena k, veličine α_i, β_j, γ_i, δ_j, ostaju fiksne tokom promene vremena od k=1 do k=T.

Kao inicijalne vrednosti veličina koje se pojavljuju u filtrima (26-28) usvajaju se: $\hat{x}_i^*(j)$=0, $u^*(j)$=0, $y^*(j)$=0, za j<1 i $u(j)$=0, $y(j)$=0, za j<0. Izrazi (26-28) se rekurentno primenjuju za k=0, 1, ..., T i u trenutku k=n+r+q su vektori $\hat{\mathbf{x}}^*$ i $\mathbf{z}^*$ popunjeni nenultim elementima. Izrazi (20-22) se rekurentno primenjuju za k=n+r+q, ..., T.

Ako je $\hat{\mathbf{a}}^p$ poznato, $\hat{\mathbf{c}}^p$ se može dobiti rešavanjem (19). Rekurentni izrazi za rešavanje (19), prema [3], glase:

$$\hat{\mathbf{c}}^p \leftarrow \hat{\mathbf{c}}^p - \mathbf{K}^n \hat{\mathbf{n}}'\left[\hat{\mathbf{c}}^p - \hat{\xi}(k)\right] \tag{31}$$

$$\mathbf{H}^n \leftarrow \mathbf{H}^n - \mathbf{K}^n \hat{\mathbf{n}}' \mathbf{H}^n \tag{32}$$

$$\mathbf{K}^n \leftarrow \mathbf{H}^n \hat{\mathbf{m}}\left[\hat{\sigma}^2 + \hat{\mathbf{n}}' \mathbf{H}^n \hat{\mathbf{m}}\right]^{-1} \tag{33}$$

Veličine koje se pojavljuju u izrazima (31-33) imaju sledeća značenja:

$$\hat{\mathbf{n}} = \begin{pmatrix} \hat{n}_1 \\ \hat{n}_2 \\ \vdots \\ \hat{n}_{q+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\xi}(k-1) \\ -\hat{\xi}(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{\xi}(k-q) \\ \hat{n}(k-1) \\ \vdots \\ \hat{n}(k-r) \end{pmatrix} \tag{34}$$

$$\hat{\mathbf{m}} = \begin{pmatrix} \hat{m}_1 \\ \hat{m}_2 \\ \vdots \\ \hat{m}_{q+r} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\xi}^*(k-1) \\ -\hat{\xi}^*(k-2) \\ \vdots \\ -\hat{\xi}^*(k-q) \\ \hat{n}^*(k-1) \\ \vdots \\ \hat{n}^*(k-r) \end{pmatrix} \tag{35}$$

$$\mathbf{K}^n = \begin{pmatrix} K_1^n \\ K_2^n \\ \vdots \\ K_{q+r}^n \end{pmatrix}, \quad \mathbf{H}^n = \begin{pmatrix} h_{11}^n & \cdots & h_{1,q+r}^n \\ h_{21}^n & \cdots & h_{2,q+r1}^n \\ \vdots & & \vdots \\ h^n & \cdots & h_{q+r,q+r}^n \end{pmatrix} \tag{36}$$

$\mathbf{K}^n$ je pomoćni vektor, a $\mathbf{H}^n$ pomoćna matrica. Elementi vektora $\hat{\mathbf{n}}$ i $\hat{\mathbf{m}}$ se dobijaju primenom (11,12) i sledećih diskretnih filtara [3]:

$$\hat{\xi}^*(k) = \hat{\xi}(k) - \sum_{j=1}^{r} \delta_j \hat{\xi}^*(k-j) \tag{37}$$

$$\hat{n}^*(k) = \hat{n}(k) - \sum_{j=1}^{r} \delta_j \hat{n}^*(k-j) \tag{38}$$

Kao inicijalne vrednosti veličina, koje se pojavljuju u filtrima (31-33) usvajaju se: $\hat{n}_i^*(j)$=0, $\hat{n}_i(j)$=0, $\hat{\xi}_i^*(j)$=0, $\hat{\xi}_i(j)$=0, za , j<1. Relacije (37-38) se rekurentno primenjuju za k=1, 2 ,..., T. U trenutku k=n+r+q su vektori $\hat{\mathbf{n}}$ i $\hat{\mathbf{m}}$ popunjeni nenultim elementima. Izrazi (31-33) se rekurentno primenjuju za k=n+r+q, ..., T.

Da bi rekurentni postupak ocenjivanja definisan izrazima (20-28) i (31-38) otpočeo, moraju se usvojiti početne vrednosti veličina $\hat{\mathbf{a}}^p$, $\hat{\mathbf{c}}^p$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^n$,$\hat{\sigma}^2$. Početni vektor ocena $\hat{\mathbf{a}}^p$ se može dobiti nekim jednostavnijim i manje tačnim postupkom ocenjivanja, dok izbor početnih vrednosti $\hat{\mathbf{c}}^p$, $\mathbf{H}$, $\mathbf{H}^n$,$\hat{\sigma}^2$ nije kritičan. Tako se može usvojiti početna ocena varijanse šuma:

$$\hat{\sigma}^2 = |\, y_{\max}|^2 / 10^5 \tag{39}$$

gde je $|y_{max}|$ maksimalna apsolutna vrednost izlaza sistema, nulte početne ocene parametara modela šuma ($\hat{\mathbf{c}}^p = \mathbf{0}$), $\mathbf{H}$=$10^9\mathbf{I}$ i $\mathbf{H}^n$=$10^9\mathbf{I}$, gde je $\mathbf{I}$ jedinična matrica.

Da bi rekurentne relacije (20-22) i (31-33) dale ocene nepoznatih parametara željene tačnosti, njihova primena se mora ponavljati više puta, pri čemu svaki rekurentni prolaz počinje sa k= n+r+q, a završava se sa k= T, gde je $T\Delta t$ unapred usvojeno trajanje prolaza. Drugi prolaz i svaki naredni prolaz se inicijalizuje mnogo tačnije nego prvi prolaz. Koeficijenti pomoćnih filtara (26-28), (37-38) se grupišu u vektore:

$$\alpha_p = \left(\alpha_1^p \ \cdots \ \alpha_{n+m+1}^p\right)' = \left(\alpha_1 \ \cdots \ \alpha_n \ \ \beta_o \ \cdots \ \beta_m\right)' \tag{40}$$

$$\gamma_p = \left(\gamma_1^p \ \cdots \ \gamma_{q+r}^p\right)' = \left(\gamma_1 \ \cdots \ \gamma_q \ \ \delta_1 \ \cdots \ \delta_r\right)' \tag{41}$$

i inicijalizuju na sledeći način:

$$\alpha_p = \hat{\mathbf{a}}^p\big|_{k=T}, \quad \gamma_p = \hat{\mathbf{c}}^p\big|_{k=T} \tag{42}$$

gde su $\hat{\mathbf{a}}^p|_{k=T}$, $\hat{\mathbf{c}}^p|_{k=T}$, ocene parametara dobijene u poslednjem diskretnom trenutku (k=T) prethodnog prolaza. Izuzetak je prvi rekurentni prolaz u kome su vektori α_p i γ_p identični početnim vektorima ocena $\hat{\mathbf{a}}^p$ i $\hat{\mathbf{c}}^p$, respektivno. Preporučuje se da se kao inicijalne vrednosti matrica $\mathbf{H}$ i $\mathbf{H}^n$ i skalara $\hat{\sigma}^2$ za drugi i svaki naredni prolaz, usvoje njihove vrednosti dobijene u trenutku k=int(T/$\hat{n}_{it}$) prethodnog prolaza, gde je $\hat{n}_{it}$ procenjen broj prolaza (iteracija), a "int" je funkcija zaokruživanja realnog broja na ceo broj:

$$\mathbf{H}^0 = \mathbf{H}\,|_{k=\mathrm{int}(T/\hat{n}_{it})}\, \mathbf{H}^{0n} \leftarrow \mathbf{H}^n\big|_{k=\mathrm{int}(T/\hat{n}_{it})} \tag{43}$$

Inicijalna vrednost ocene varijanse $\hat{\sigma}^2$ za naredni prolaz se računa na osnovu vrednosti ocena belog šuma $\hat{n}(k)$, k=n+r+q,...,T, iz prethodnog prolaza:

$$\hat{\sigma}^2 = \frac{1}{T-(n+r+q)} \sum_{i=n+r+q}^{T} \hat{n}^2(i) \tag{44}$$

Sa iterativnim prolazima se prestaje kada razlika između ocena parametara modela sistema (2), dobijenih u dva uzastopna iterativna prolaza, postane dovoljno mala. Neka je $e_{\%}$ srednja procentualna razlika ocena parametara dobijenih u poslednjem i pretposlednjem prolazu:

$$e_{\%} = \frac{100}{n_{nn}} \left(\sum_{i=1}^{n} \left| \frac{\hat{a}_i - \alpha_i}{\hat{a}_i} \right|_{\hat{a}_i \neq 0} + \sum_{i=0}^{m} \left| \frac{\hat{b}_i - \beta_i}{\hat{b}_i} \right|_{\hat{b}_i \neq 0} \right) \tag{45}$$

gde je n_{nn} broj nenultih koeficijenata. Neka je $e_{\%doz}$ dozvoljena procentualna greška ocena parametara. Postupak ocenjivanja parametara se može prekinuti, ako je zadovoljeno:

$$e_{\%} < e_{\%doz} \tag{46}$$

Da bi se formalni algoritam za ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog modela pojednostavio, uvode se nove skalarne i vektorske veličine:

- skalari za pamćenje trenutnih vrednosti varijabli (označavaju se sa "s" u donjem indeksu):

$$u_s = u(k), \quad u_s^* = u^*(k), \quad y_s = y(k), \quad y_s^* = y^*(k) \tag{47}$$

$$\hat{x}_s = \hat{x}_i(k), \quad \hat{x}_s^* = x_i^*(k), \quad \hat{n}_s = \hat{n}(k), \quad \hat{n}_s^* = \hat{n}^*(k) \tag{48}$$

$$\hat{\xi}_s = \hat{\xi}(k), \quad \hat{\xi}_s^* = \hat{\xi}^*(k) \tag{49}$$

- vektor koeficijenata filtara (27,28):

$$\mathbf{p} = (p_1 \ \cdots \ p_{n+r+q}) = \\ (\alpha_1 + \delta_1 \quad \alpha_2 + \alpha_1\delta_1 + \delta_2 \ \cdots \ \alpha_n + \delta_r \ \ \gamma_1 \ldots \ \gamma_q)' \tag{50}$$

- vektori za pamćenje minulih vrednosti varijabli:

$$\hat{\mathbf{x}} = \begin{pmatrix} \hat{x}_1 \\ \vdots \\ \hat{x}_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{x}_i(k-1) \\ \vdots \\ -\hat{x}_i(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{pmatrix} \tag{51}$$

$$\mathbf{z} = \begin{pmatrix} z_1 \\ \vdots \\ z_{n+m+1} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y(k-1) \\ \vdots \\ -y(k-n) \\ u(k) \\ \vdots \\ u(k-m) \end{pmatrix} \tag{52}$$

$$\mathbf{y}^* = \begin{pmatrix} y_1^* \\ \vdots \\ y_{n+r+q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -y^*(k-1) \\ \vdots \\ -y^*(k-n-r) \\ y(k-1) \\ \vdots \\ y(k-q) \end{pmatrix} \tag{53}$$

$$\mathbf{u}^* = \begin{pmatrix} u_1^* \\ \vdots \\ u_{n+r+q}^* \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -u^*(k-1) \\ \vdots \\ -u^*(k-n-r) \\ u(k-1) \\ \vdots \\ u(k-q) \end{pmatrix} \tag{54}$$

$$\xi_v = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \vdots \\ \xi_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{\xi}^*(k-1) \\ \vdots \\ -\hat{\xi}^*(k-1) \end{pmatrix} \tag{55}$$

$$\mathbf{N}^* = \begin{pmatrix} N_1 \\ \vdots \\ N_r \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\hat{n}^*(k-1) \\ \vdots \\ -\hat{n}^*(k-1) \end{pmatrix} \tag{56}$$

$$\delta_p = (\delta_1 \ \cdots \ \delta_r)' \tag{57}$$

Korišćenjem vektora (34,40,41,51), model sistema (9) i inverzni model šuma (11) mogu da se prikažu u obliku:

$$\hat{x}_s = (\alpha\,\mathbf{p})'\hat{\mathbf{x}} \tag{58}$$

$$\hat{n}_s = \hat{\xi}(k) - (\gamma\,\mathbf{p})'\hat{\mathbf{n}} \tag{59}$$

Korišćenjem vektora (23,40,50,53-57), diskretni filtri (26-28,37,38) mogu da se prikažu u obliku:

$$\hat{x}_s^* = \alpha_p{}'\,\hat{\mathbf{x}}^* \tag{60}$$

$$u_s^* = u_s + \mathbf{p}'\mathbf{u}^* \tag{61}$$

$$y_s^* = y_s + \mathbf{p}'\mathbf{y}^* \tag{62}$$

$$\hat{\xi}_s^* = \hat{\xi}_s + \delta_p{}'\xi_v \tag{63}$$

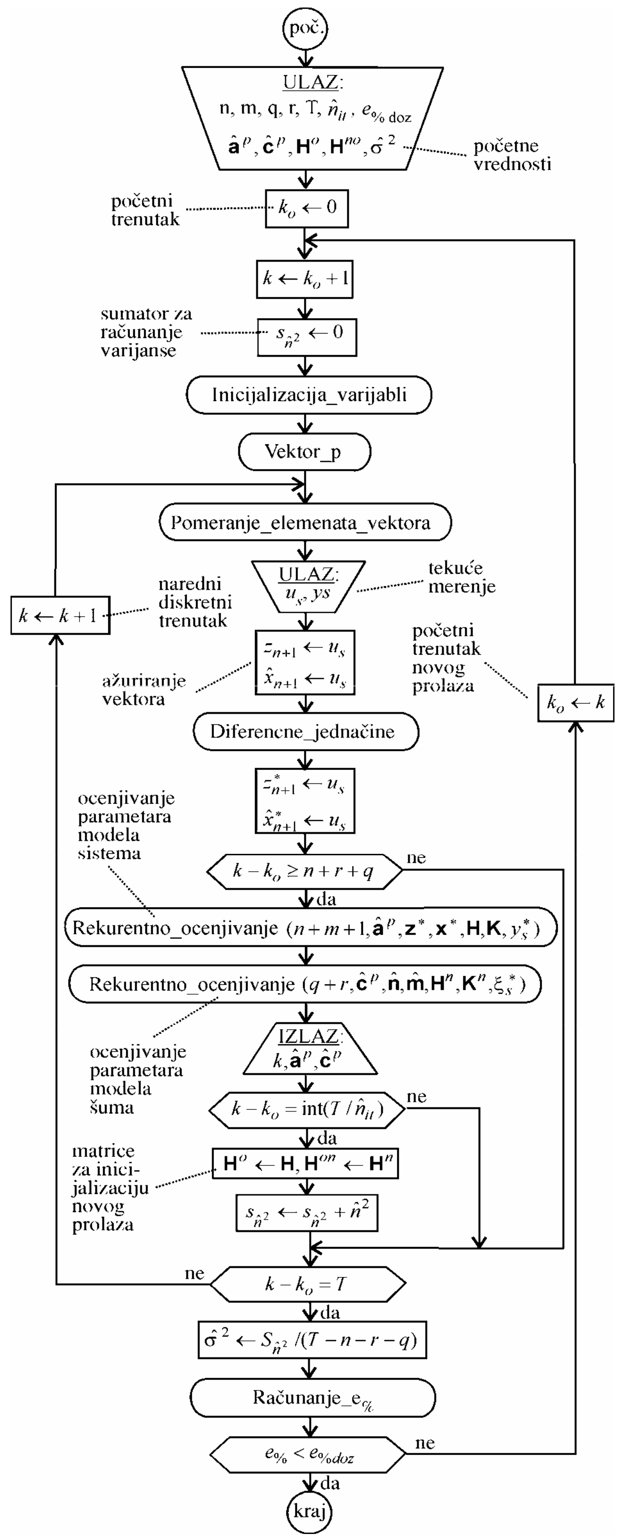
$$\hat{n}_s^* = \hat{n}_s + \delta_p{}'\mathbf{N}^* \tag{64}$$

Uvođenjem skalara (47-49), vektora (50-57) i formi diferencnih jednačina (58-64) pojednostavljuje se rešavanje diferencnih jednačina primenom digitalnog računara.

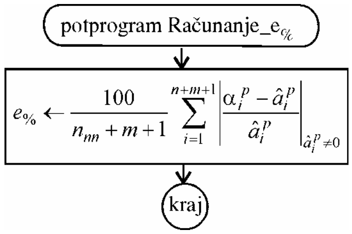
Na osnovu prethodnih relacija može da se pristupi izradi strukturnog algoritma za ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog modela, korišćenjem ulaza sistema $u(k)$, zadatih u diskretnim trenucima k = 0, 1, ..., T i merenja odgovarajućih izlaza sistema: $y(k)$, k = 0, 1, ..., T. Pri izradi algoritma maksimalno se koriste algoritamski potprogrami, kako bi se dobila što jednostavnija i preglednija struktura algoritma i omogućila realizacija računarskog programa sa što kraćim kodom.

Algoritam

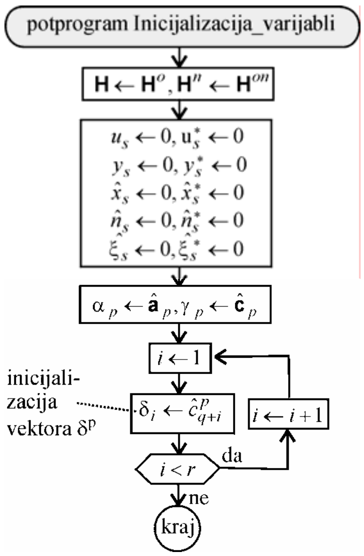
Glavni tok algoritma za ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog modela je prikazan na sl.2. Potprogrami ovog algoritma su prikazani na slikama 3-10. Algoritam je rekurentan u smislu da se koriste rekurentne relacije za ocenjivanje parametara, a iterativan u smislu da se postupak ponavlja više puta nad vremenskim sekvencama dužine T. Iterativni postupak konvergira, što znači da se u svakoj narednoj iteraciji (ponavljanju, prolazu) dobijaju tačniji parametri modela sistema (9), inverznog modela šuma (11) i primenjenih pomoćnih diskretnih filtara (26-28,37,38), odnosno (58-64) nego u prethodnoj iteraciji.



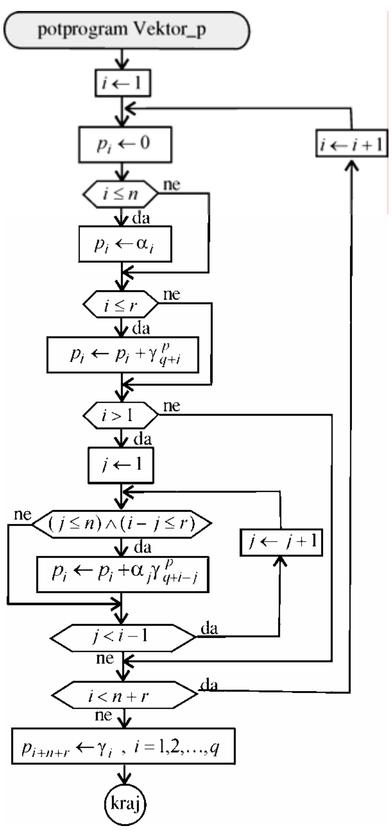
Slika 2. Algoritam za ocenjivanje parametara



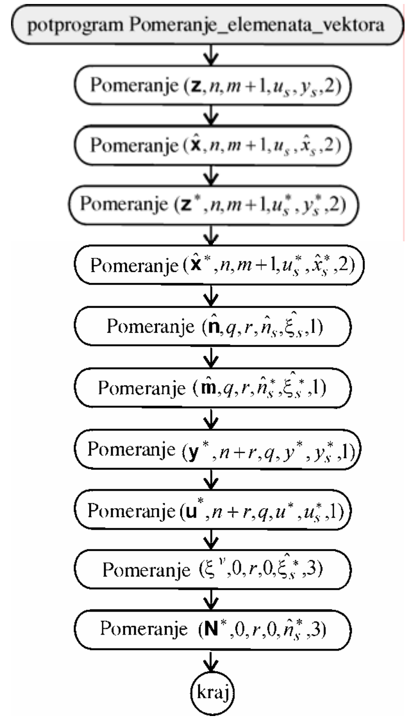
Slika 3. Računanje srednje procentualne razlike ocena parametara dva uzastopna prolaza



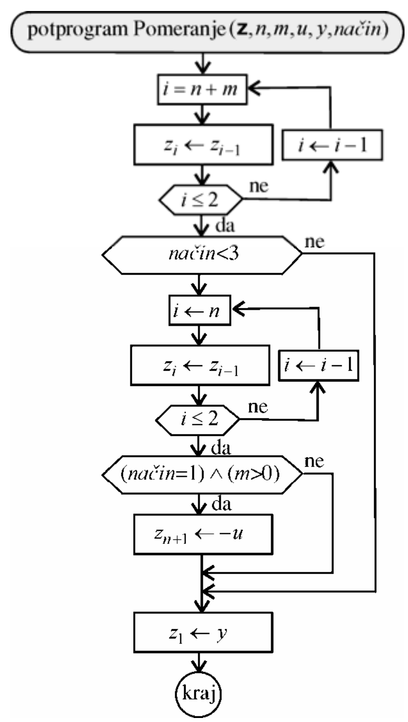
Slika 4. Inicijalizacija korišćenih varijabli



Slika 5. Računanje koeficijenata filtara za u_s^* i y_s^*



Slika 6. Pomeranje elemenata svih vektora sa vremenskim sekvencama zbog priraštaja vremena

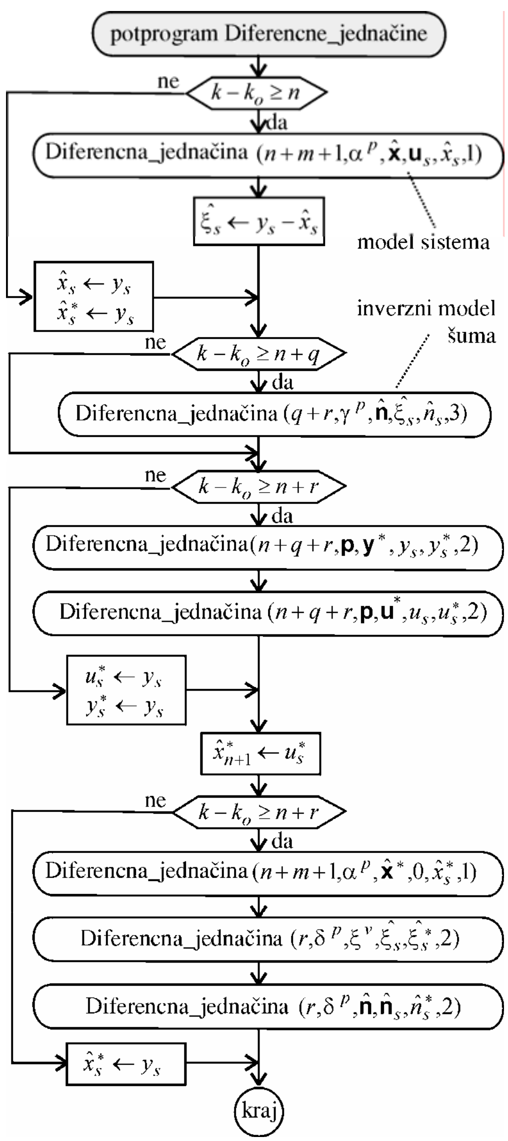


Slika 7. Pomeranje elemenata vektora

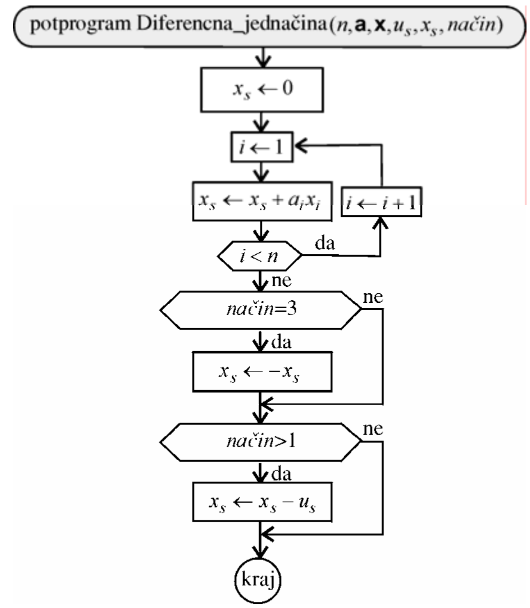
U dijagramima tokova algoritma i njegovih potprograma su korišćene oznake koje su uobičajene u teoriji sistema, numeričkoj analizi i programiranju. Da bi prikaz algoritma bio sažet, načini označavanja su kombinovani na neuobičajen način, pa je potrebno dati uputstva za tumačenje dijagrama tokova:

- Instrukcije dodeljivanja (znak "←") u algoritamskim blokovima se izvršavaju po redosledu navođenja, s leva nadesno i odozgo naniže. Zapis $z_i \leftarrow z_{i-1}$, i=n, n-1,...,2 ekvivalentan je zapisu: $z_n \leftarrow z_{n-1}$, $z_{n-1} \leftarrow z_{n-2}$, ..., $z_2 \leftarrow z_1$.

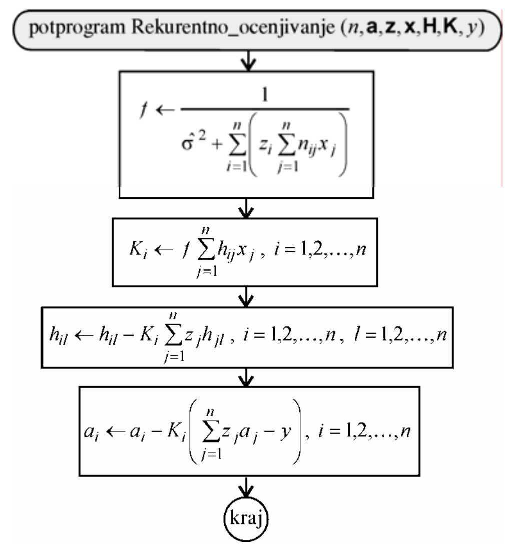
- Blokovi instrukcija se izvršavaju po redosledu koji određuje smer strelica koje ih povezuju, počevši od bloka sa napisom "poč." ili zaglavlja potprograma, sve do bloka s napisom "kraj".
- Tok algoritma se grana jedino u logičkim blokovima, zavisno od istinitosti logičkog upita. Na primer, ako je logički upit "i>1" onda, ako je i=2 algoritam teče u pravcu označenom sa "da", a ako je i=0, on teče u pravcu označenom sa "ne".
- Potprogram je zasebna celina algoritma, koja počinje zaglavljem, a završava se izlaznim blokom, označenim sa "kraj". Zaglavlje sadrži reč "potprogram", naziv potprograma, a po potrebi i spisak argumenata koji se prenose (naveden u zagradi). Kada se negde u algoritmu naiđe na "poziv" potprograma, a to je blok sa njegovim nazivom, prelazi se na izvršavanje potprograma, počev od zaglavlja. Kada se naiđe na blok potprograma označen sa "kraj", vraća se na mesto u algoritmu, sa koga je potprogram "pozvan", i prelazi na naredni blok.



Slika 8. Rešavanje svih diferencnih jednačina



Slika 9. Rešavanje diferencne jednačine



Slika 10. Potprogram za realizaciju rekurentnih relacija za ocenjivanje parametara

- Kada se u toku algoritma naiđe na potprogram sa spiskom argumenata koji se prenose, npr.:

$$\text{Rekurentno\_ocenjivanje}(q+r, \hat{\mathbf{c}}^p, \hat{\mathbf{n}}, \hat{\mathbf{m}}, \mathbf{H}^n, \mathbf{K}^n, \xi_s^*)$$

onda se pri prelasku na odgovarajući potprogram, npr.:

$$\text{potprogram Rekurentno\_ocenjivanje}(n, \mathbf{a}, \mathbf{z}, \mathbf{x}, \mathbf{H}, \mathbf{K}, y)$$

argumentima navedenim u zaglavlju potprograma dodeljuju vrednosti argumenata navedenih u pozivu tog potprograma i to po redosledu navođenja, npr.:

$$n = q + r,\ \mathbf{a} = \hat{\mathbf{c}}^p,\ \mathbf{z} = \hat{\mathbf{n}},\ \mathbf{x} = \hat{\mathbf{m}},\ \mathbf{H} = \mathbf{H}^n,\ \mathbf{K} = \mathbf{K}^n,\ y = \xi_s^*$$

i nastavlja sa izvršavanjem potprograma. Pre napuštanja potprograma, vrši se inverzno dodeljivanje: argumentima navedenim u pozivu potprograma kojima je u toku izvršavanja potprograma promenjena vrednost, dodeljuju vanja potprograma promenjena vrednost, dodeljuju se odgovarajuće vrednosti argumenata navedenih u zaglavlju potprograma – u datom primeru:

$$\hat{\mathbf{c}}^p = \mathbf{a},\ \mathbf{H}^n = \mathbf{H},\ \mathbf{K}^n = \mathbf{K}\ .$$

Efikasnost i primenljivost algoritma

Da bi postupak ocenjivanja parametara bio efikasan, on mora da ispuni sledeće uslove:

- pristrasnost ocena mora biti dovoljno mala, odnosno matematička očekivanja (srednje vrednosti) ocena moraju biti dovoljno bliska stvarnim vrednostima ocena;
- statistička rasturanja ocena (njihova srednjekvadratna odstupanja od srednjih vrednosti) moraju biti dovoljno mala;
- postupak mora da konvergira dovoljno brzo, u smislu kretanja ocena parametara od njihovih početnih vrednosti do vrednosti čija tačnost zadovoljava.

Jasno je da postupak koji maksimizira funkciju verodostojnosti (15) daje optimalne ocene parametara ($\hat{\mathbf{a}}^p$, $\hat{\mathbf{c}}^p$), u okviru postojećih ograničenja [4]. Takve ocene su nepristrasne i imaju minimalnu varijansu. S obzirom da opisani algoritam predstavlja približan postupak maksimizacije funkcije verodostojnosti, teorijski posmatrano, dobijena rešenja ne moraju da budu optimalna. Pod određenim uslovima ona su dovoljno bliska optimalnim rešenjima. Ti uslovi su:

- početne ocene parametara modela sistema su dovoljno bliske tačnim vrednostima parametara;
- vremenske sekvence ulaza i izmerenog izlaza su dovoljno dugačke, odnosno T je dovoljno veliko;
- broj iteracija (ponavljanja algoritamskih prolaza) je dovoljno veliki, odnosno $e_{\%doz}$ je dovoljno malo.

Pored ovih uslova, potrebno je da budu ispunjeni opšti uslovi vezani za izbor modela sistema, realizaciju merenja, generisanje pobudnog signala i izbor perioda odabiranja, koji važe i za druge metode identifikacije sistema i ocenjivanje parametara. Ovi uslovi razmatrani su npr. u [5 i 6]. Analitičko utvrđivanje potrebne bliskosti početnih ocena i potrebne dužine vremenskih sekvenci je veoma teško, zbog velike složenosti algoritma, pa je praksa da se ispitivanje konvergentnosti ovakvih algoritama i izbor njihovih parametara zasnivaju na eksperimentima, bilo da se oni izvode na stvarnom objektu, bilo da se računarski simulira rad sistema i postupak merenja. Laboratorijska istraživanja i računarska simulacija pokazali su da predloženi algoritam konvergira i da obezbeđuje tačnije ocene parametara od većine drugih postupaka i algoritama, pod opštim uslovima za ocenjivanje parametara i pod dodatnim uslovom da su početne ocene parametara modela obezbeđene tako da se odziv modela sistema (9) i odziv ispitivanog sistema na isti ulaz, slažu u tehnički prihvatljivim granicama. Drugim rečima, dinamičko ponašanje modela, za usvojene početne ocene parametara, ne sme drastično da odstupa od dinamičkog ponašanja posmatranog sistema.

Diskretni model sistema oblika (2) može dovoljno tačno da opiše ponašanje linearnog sistema bez čistog (transportnog) kašnjenja ili sa malo čistim kašnjenjem. U slučaju analognog sistema, dodatni uslov je da period odabiranja Δt bude dovoljno mali. Model šuma (3), dovoljno visokog reda q, može dobro da aproksimira slučajne poremećaje i smetnje sa linearnom dinamikom. To znači da je Boks-Dženkinsov model pogodan za opis mnogih linearnih sistema u prisustvu šuma, bilo da su sistemi diskretni ili analogni. Za svaki linearni analogni model može da se pronađe takav diskretan linearni, da postoji obostrano jednoznačna korespondencija (preslikavanje) između koeficijenata (parametara) ovih modela. To znači da se opisani algoritam može posredno da koristi za ocenjivanje parametara analognih sistema. Nekoliko praktičnih primera ovakvog posrednog ocenjivanja dato je u [7].

Efikasnost i superiornost predloženog algoritma nad drugim postupcima ocenjivanja parametara sistema, ilustrovaće naredni primer.

Primer ocenjivanja parametara

Ispitivan je servosistem za upravljanje brzinom rotacije platforme električnim motorom koji se napaja jednosmernom strujom. Ulaz sistema u je naponski signal, proporcionalan željenoj ugaonoj brzini platforme, a izlaz je idealni napon tahogeneratora (senzora ugaone brzine platforme) x_i - bez prisustva šuma. Izmeren je i memorisan veći broj sekvenci izlaza y servosistema (signal tahogeneratora zagađen šumom), pri dejstvu različitih sekvenci ulaznih signala, kao i njegova frekventna karakteristika. Linearna diferencijalna jednačina servosistema ima oblik:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + A_1 \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} + A_0 x_i(t) = B_0 u(t) + B_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{65}$$

Zamenom izvoda konačnim prethodnim razlikama, npr. $\mathrm{d}u(t)/\mathrm{d}t \leftarrow [u(k)-u(k-1)]/\Delta t$, dobija se:

$$x_i(k) + a_1 x_i(k-1) + a_0 x_i(k-2) = b_0 u(k) + b_1 u(k-1) \tag{66}$$

gde su:

$$a_1 = -\frac{2 + A_1 \Delta t}{1 + A_1 \Delta t + A_0 \Delta t^2}\ ,\ a_2 = \frac{1}{1 + A_1 \Delta t + A_0 \Delta t^2} \tag{67}$$

$$b_0 = \frac{(B_0 \Delta t + B_1)\Delta t}{1 + A_1 \Delta t + A_0 \Delta t^2}\ ,\ b_1 = -\frac{B_1 \Delta t}{1 + A_1 \Delta t + A_0 \Delta t^2} \tag{68}$$

Usvojen je period odabiranja Δt =0,005 s. Na 19 memorisanih sekvenci ulaza u obliku pseudoslučajnih signala frekventnog opsega od 0 do 23 rad/s dužine T=1000 i odgovarajuće izmerene sekvence izlaza, primenjeni su sledeći postupci ocenjivanja parametara:

- *opisani algoritam maksimizacije funkcije verodostojnosti,*
- *metoda najmanjih kvadrata i*
- *metoda instrumentalne promenljive.*

Poslednja dva postupka su primenjena u formi rekurentnih algoritama zasnovanih na Boks-Dženkinsovom modelu [4]. Ovim postupcima su dobijene ocene parametara diskretnog modela (66), na osnovu kojih su preračunate ocene parametara analognog modela (65).

Takođe je na izmerene odskočne odzive primenjena *metoda Čidambare* [8], dok je na izmerenu frekventnu karakteristiku primenjen postupak *aproksimacije frekventne karakteristike racionalnom kompleksnom funkcijom* [9].

Za srednje vrednosti dobijenih ocena parametara računata su srednja kvadratna odstupanja s_t^2 modela:

$$\frac{\mathrm{d}^2 x_i(t)}{\mathrm{d}t^2} + \hat{A}_1 \frac{\mathrm{d}x_i(t)}{\mathrm{d}t} + \hat{A}_0 x_i(t) = \hat{B}_0 u(t) + \hat{B}_1 \frac{\mathrm{d}u(t)}{\mathrm{d}t} \tag{69}$$

od izmerenih izlaza sistema i srednja kvadratna odstupanja s_F^2 frekventne karakteristike:

$$\hat{F}(j\omega) = \frac{\hat{B}_1 j\omega + \hat{B}_0 u(t)}{(j\omega)^2 + \hat{A}_1 j\omega + \hat{A}_0}\ ,\ j = \sqrt{-1} \tag{70}$$

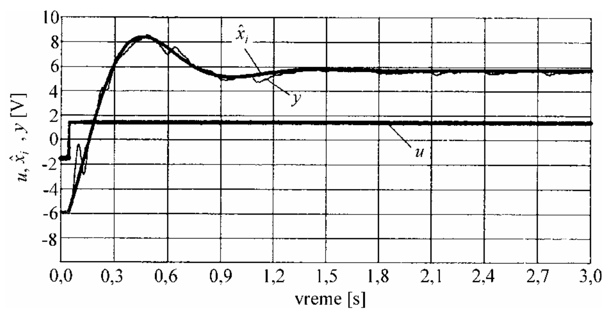
od izmerene frekventne karakteristike F_m. Ova odstupanja su definisana na sledeći način:

$$s_t^2 = \frac{1}{N \cdot T}\sum_{k=1}^{T}\sum_{j=1}^{N}\left[\hat{x}_{i,j}(k\Delta t) - y(k\Delta t)\right]^2 \tag{71}$$

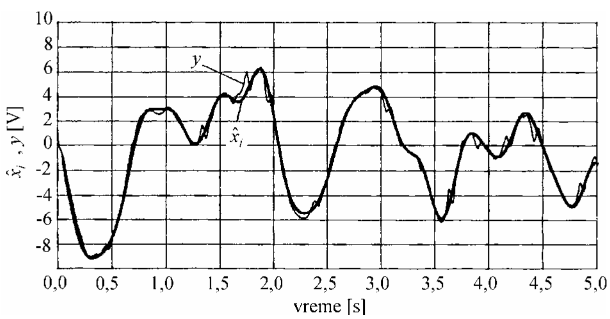
$$s_F^2 = \frac{1}{N_\omega}\sum_{l=1}^{N_\omega}\left|F_m(j\omega_k) - \hat{F}(j\omega_k)\right|^2 \tag{72}$$

N je broj korišćenih sekvenci merenja. $\hat{x}_{i,j}$je izlaz ocenjen korišćenjem j-te sekvence merenja. N_ω je broj izmerenih tačaka frekventne karakteristike. Veličina ω_k označava frekvenciju k-te tačke izmerene frekventne karakteristike. s_t^2 je računato za odzive na pseudoslučajne ulaze.

Odskočni odziv modela (69) i izmereni odskočni odziv servostema prikazani su zajedno na sl.11. Na sl.12 prikazani su odziv modela (69) i izmereni odziv servosistema na pseudoslučajni ulaz sa sl.13. Sl.14 prikazuje frekventnu karakteristiku modela (puna linija) i izmerenu frekventnu karakteristiku. Rezultati prikazani na slikama 11-14 su dobijeni korišćenjem parametara ocenjenih predloženim algoritmom.

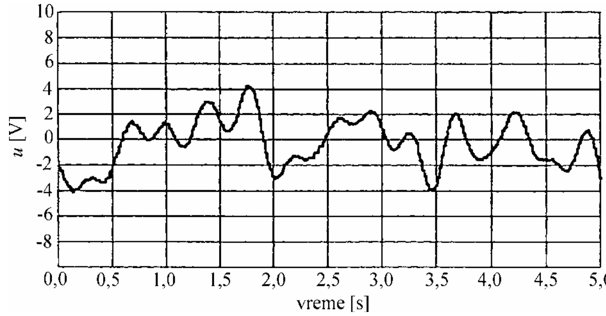


Slika 11. Odskočni odziv (parametri ocenjeni predloženim algoritmom)

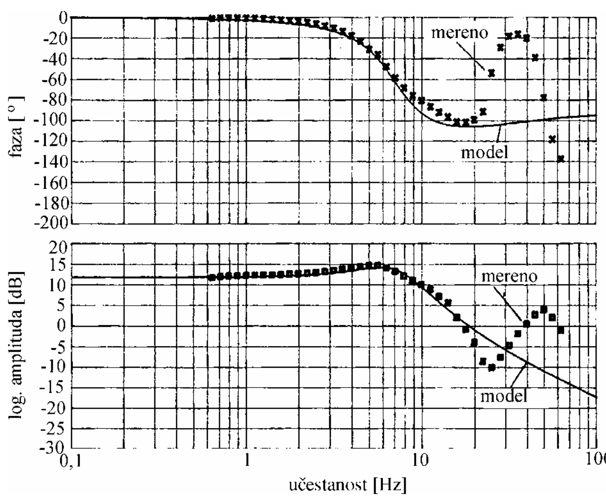


Slika 12. Odziv na pseudoslučajni ulaz (parametri ocenjeni predloženim algoritmom)

Na izmerenim odzivima su uočljive nepravilne oscilacije oblika "zubaca". Na izmerenoj frekventnoj karakteristici uočljiv je skok frekventne karakteristike na učestanosti od 50 rad/s. Te pojave su posledica uticaja mrtvog hoda reduktora i slučajnih odstupanja mera i profila pojedinih zubaca zupčanika. Nelinearne su, nemaju dominantan uticaj na ponašanje sistema i ne mogu se opisati modelom tipa (65). U postupku ocenjivanja te pojave su tretirane kao šum. Za početne vrednosti ocena parametara modela su usvojene ocene dobijene metodom Čidambare. Usvojen je model šuma drugog reda: q=r=2, sa nultim početnim ocenama i početne matrice **H**=10^9**I** i **H**^{n}=10^9**I**.

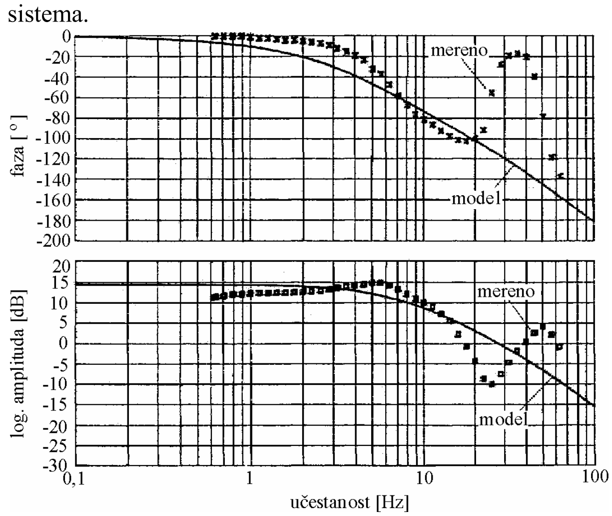


Slika 13. Pseudoslučajni ulaz

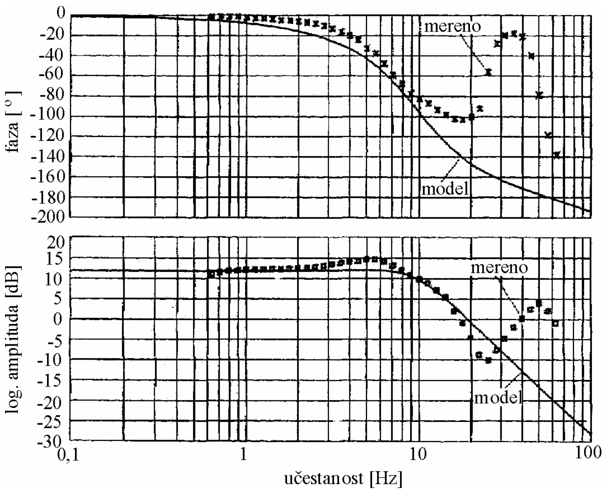


Slika 14. Frekventna karakteristika - parametri ocenjeni predloženim algoritmom

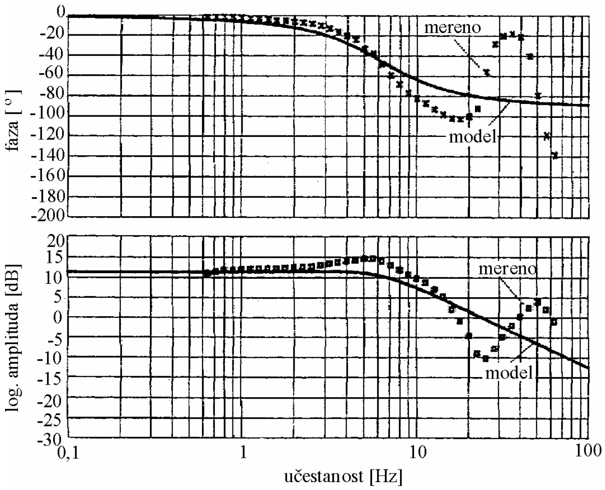
Uočljivo je da postoji dobro slaganje ponašanja modela (69), sa parametrima ocenjenim predloženim algoritmom i ponašanja posmatranog servosistema u vremenskom i frekventnom domenu, osim u okolini učestanosti 50 rad/s. U toj oblasti je slabljenje signala veliko (preko 8 dB), pa prisutno neslaganje nema veliki uticaj na ponašanje sistema.



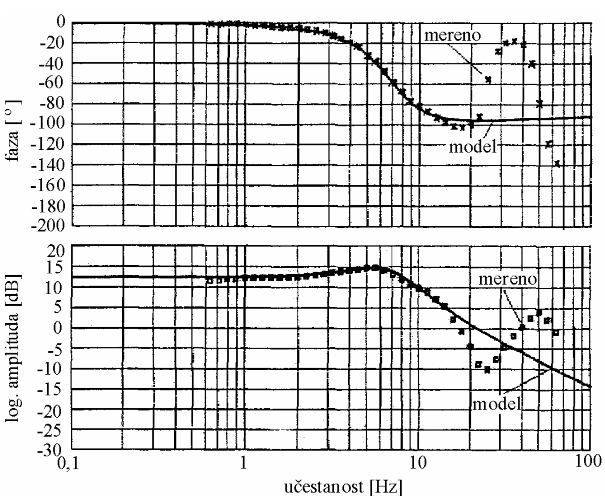
Slika 15. Frekventna karakteristika - parametri ocenjeni metodom najmanjih kvadrata



Slika 16. Frekventna karakteristika - parametri ocenjeni metodom instrumentalne promenljive



Slika 17. Frekventna karakteristika - parametri ocenjeni metodom Čidambare



Slika 18. Frekventna karakteristika - parametri ocenjeni postupkom aproksimacije frekventne karakteristike kompleksnom funkcijom

Na slikama 15-18 su prikazane frekventne karakteristike modela (69) sa srednjim vrednostima parametara ocenjenih primenom navedenih postupaka. U tabeli 1 su date srednje vrednosti ocena parametara i srednja kvadratna odstupanja.

Tabela 1: Uporedni rezultati različitih postupaka ocenjivanja

Postupak	Srednja ocena i standardna greška				Srednja kvadratna odstupanja	
	$\hat{A}_0$ / σ_{A_0}	$\hat{A}_1$ / σ_{A_1}	$\hat{B}_0$ / σ_{B_0}	$\hat{B}_1$ / σ_{B_1}	s_t^2	s_F^2
Maksimizacija verodostojnosti	50,65 / 3,01	6,398 / 0,242	194,8 / 12,7	13,24 / 1,71	0,355	0,028
Najmanji kvadrati	300,9 / 47,4	55,81 / 9,85	1569 / 314	-9,71 / 7,40	1,984	0,772
Instrumentalna promenljiva	91,22 / 24,57	11,83 / 3,92	357,5 / 115,0	-1,34 / 6,76	0,959	0,293
Čidambara	38,46 / 21,96	9,935 / 3,521	145,2 / 83,3	24,26 / 17,23	3,056	0,468
Aproks. frekventne karakteristike	45,10 / -	6,590 / -	171,2 / -	17,51 / -	0,698	0,014

Poređenjem rezultata se može zaključiti da za vrednosti ocena parametara dobijenih metodama najmanjih kvadrata, instrumentalne promenljive i Čidambare, model (69) u proseku ne opisuje dovoljno verno dinamiku posmatranog servosistema. Ponašanje modela je u ovim slučajevima prigušenije od ponašanja sistema, ocene su pristrasne i imaju velika rasturanja, što daje iskrivljenu sliku o karakteristikama sistema.

Nasuprot tome, model (69) sa vrednostima parametara dobijenim predloženim algoritmom u radu, kao i vrednostima parametara dobijenim postupkom aproksimacije frekventne karakteristike, prilično verno odslikava dinamiku servosistema. Vrednosti s_F^2 za ova dva postupka su za red veličine manje nego za ostale navedene postupke, a i vrednosti s_t^2 su značajno manje.

Aproksimacija frekventne karakteristike obezbeđuje najbolje slaganje modela i sistema u frekventnom domenu, dok algoritam maksimizacije funkcije verodostojnosti obezbeđuje najbolje slaganje u vremenskom domenu i zadovoljavajuće slaganje u frekventnom domenu. Za primenu postupka aproksimacije frekventne karakteristike, neophodno je izmeriti frekventnu karakteristiku sa nultom prosečnom greškom i dovoljno malom varijansom greške, na širokom opsegu frekvencija. Ovo zahteva primenu kvalitetne i skupe opreme, sa velikom brzinom merenja i složenom obradom signala, kao i ponavljanje merenja i njihovo osrednjavanje. Predloženi algoritam ima značajnu prednost pri izboru postupka za ocenjivanje parametara, u slučaju da se zahteva velika tačnost ocena parametara.

Zaključak

Predloženi algoritam za ocenjivanje parametara Boks-Dženkinsovog modela ima oblik pogodan za izradu savremenog, strukturiranog računarskog programa. Forma algoritma omogućuje ocenjivanje parametara u realnom vremenu, jer nije potrebno da se pamte sve izmerene vrednosti ulaza i izlaza sistema koji se ispituje, već se u proračunu koriste samo njihova najnovija merenja. Algoritam daje nepristrasne ocene približno minimalne varijanse i efikasniji je od većine drugih postupaka te ocenjivanje parametara linearnih sistema. Verifikovan je kroz niz ispitivanja servosistema vojne namene. Nedostatak algoritma je što zahteva početne ocene parametara, koje moraju da se obezbede nekim jednostavnijim, manje tačnim postupkom, u krajnjem slučaju postupnim približavanjem - putem pokušaja i pogrešaka. Dati primer ilustruje superiornost predloženog algoritma.

Literatura

[1] DEBELJKOVIĆ,D. *Stohastički linearni sistemi automatskog upravljanja.* Naučna knjiga, Beograd 1985.

[2] BOX,G., JENKINS,M. *Time Series Analysis - Forecsting and Control.* Holden-Day, San Francisco 1970.

[3] DODIĆ,N. *Estimacija parametara jednog elektrohidrauličnog servosistema za pokretanje platforme borbenog sredstva* - magistarski rad, Mašinski fakultet Beograd, 1990.

[4] YOUNG,P. *Recursive Estimation and Time Series Analysis.* Springer -Verlag, Berlin 1984.

[5] SINHA,K., KUSZTA,B. *Modeling and Identification of Dynamic Systems.* Van Nostrand Reinhold Co., New York 1984.

[6] DODIĆ,N. Savremeni pristup estimaciji parametara servosistema. *Vojnotehnički glasnik*, 1993, vol.41, no.6, p.609-620.

[7] DODIĆ,N. Ocenjivanje parametara servosistema metodom najveće verodostojnosti. *Vojnotehnički glasnik*, 1998, vol.46, no.5, p.583-593.

[8] CHIDAMBARA,P. A new canonical form of state-variable equations and its application in the determination of a mathematical model of an unknown system. *Int. Journal of Control*, 1971, vol.14, no.5, p.897-909.

[9] DODIĆ,N. Određivanje prenosne funkcije sistema na bazi izmerenih vrednosti frekventne karakteristike. *Naučnotehnički pregled*, 1987, vol.37, no.9, p.24-28.

Rad primljen: 24.5.2000.god.