UDK: 519.718(047)=861
COSATI: 14-07, 14-02

Stabilnost linearnih sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem u stanju na konačnom vremenskom intervalu

Dr Dragutin Lj. Debeljković, dipl.inž.[1)]
Mr Mihajlo P. Lazarević, dipl.inž.[1)]
Dr Đura Koruga, dipl.inž.[1)]
Dr Stevan A. Milinković, dipl.inž.[2)]
Dr Mića B. Jovanović, dipl.inž.[2)]

U radu se daje dalje proširenje ranije izvedenih rezultata istih autora, koji su se odnosili na klasu sistema sa kašnjenjem u stanju a za njihov rad u slobodnom radnom režimu a na konačnom vremenskom intervalu. Izvedeni su do-voljni uslovi praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu jedne posebne klase sistema sa čistim vremenskim kašnjenjem.

Ključne reči: **Linearna analiza, matrične metode, kriterijumi stabilnosti, čisto vremensko kašnjenje.**

Uvod

STABILNOST sistema sa kašnjenjem već dugi niz godina zaokuplja pažnju mnogih naučnika širom sveta. Čisto vremensko kašnjenje javlja se u velikom broju tehničkih sistema, kao što su dugački električni, pneumatski i hidraulični vodovi, hemijski procesi i duge transmisione linije itd. Prisustvo čisto vremenskog kašnjenja, bez obzira da li je ono prisutno u upravljanju i/ili u stanju, može da izazove neželjene prelazne karakteristike ali i nestabilnost. Zbog toga je ovaj problem naišao na veliko interesovanje mnogih istraživača. U opštem slučaju, razmatranje problema koji uključuje i čisto vremensko kašnjenje, povlači daleko složeniju matematičku analizu. U postojećim kriterijumima za ovu klasu sistema dominiraju dva prilaza: jedan koji u kriterijume unosi iznos čisto vremenskog kašnjenja i drugi koji to ne čini. U prvom slučaju veoma često se dobijaju, na izgled, veoma lepe relacije koje su obično iskazane u obliku algebarskih jednačina ili nejednačina, ali je manjkavost evidentna jer se ne sagledava iznos i uticaj čisto vremenskog kašnjenja na stabilnost sistema. Veliki broj radova publikovan je na tu temu sa posebnim akcentom na primeni Ljapunovljevog prilaza ili prilaza koji se zasniva na korišćenju matrične mere, Lee and Dianat [1], Mori et al. [2], Mori [3], Hmamed [4], Lee et al. [5] itd.

U praksi je često od posebnog interesa, ne samo da se ispita stabilnost sistema po Ljapunovu, već je od daleko većeg značaja da se utvrdi da li trajektorije sistema pri njegovom kretanju u prostoru stanja dosežu ili ostaju unutar ranije propisanih granica. Sistem može da bude stabilan u smislu Ljapunova, a potpuno neupotrebljiv sa stanovišta njegovih pokazatelja prelaznog procesa. Tu se, u prvom redu, misli na nedozvoljeni preskok ili neprihvatljivo dugo vreme smirenja. Zbog toga je sasvim opravdano da se kretanje sistema posmatra unutar unapred propisanih granica, koje se mogu usvojiti u obliku hipercilindara u prostoru stanja koji mogu biti shvaćeni kao skupovi dozvoljenih stanja u kojima se sistem može zadesiti. Isti ti skupovi mogu biti stacionarni ili vremenski promenljivi i potrebno je da budu unapred definisani. Pored toga, od posebnog je interesa da se i dinamičko ponašanje sistema posmatra na konačnom vremenskom intervalu.

Granice do kojih dostiže odziv sistema bilo u slobodnom bilo u prinudnom radnom režimu, predstavljaju veoma značajan problem sa inženjersko-tehničke tačke gledišta. Uvažavajući ovu činjenicu, pojavio se veliki broj definicija praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu. Grubo govoreći, ove definicije se zasnivaju na unapred određenim granicama dozvoljenih početnih stanja sistema, kao i na dozvoljenim granicama u kojima se očekuje kretanje razmatranog sistema. U inženjerskim primenama ova činjenica dobija posebno na težini, a nekada postaje i krucijalna kada se, na primer, radi o procenama kretanja sistema u prostoru stanja i neophodnosti uvođenja adekvatnog upravljanja. Samim tim, izučavanje koncepta praktične stabilnosti i stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu predstavlja poseban izazov za svakog istraživača, posebno kod sistema sa kašnjenjem, gde se svi ovi problemi izuzetno usložnjavaju.

Motivisani "kratkom diskusijom" praktične stabilnosti koja se pojavila u monografiji La Salle i Lefschet [6], Weiss i Infante [7,8] su uveli ceo niz definicija stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu vremenski neprekidnih sistema, a na vremenski invarijantnim skupovima. Novih rezultata u ovim istraživanjima bilo je zahvaljujući Michelu [9], Grujiću [10], Lashireru i Story [11]. Praktičnu stabil-

[1)] Mašinski fakultet, 11000 Beograd, 27. marta 80
[2)] Tehnološko-metalurški fakultet, 11000 Beograd, Karnegijeva 4

nost prostih i povezanih sistema na vremenski promenljivim skupovima po prvi put je razmatrao Michel [9] a nešto kasnije i Grujić [12]. Nešto opštije definicije stabilnosti ("praktična stabilnost sa vremenom smirenja", "praktična eksponencijalna stabilnost" itd.), a koje uključuju i mnoge prethodno iznete definicije, uveo je Grujić [10,13,14]. Koncept "konačne stabilnosti", kao posebnog koncepta stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, uveli su Lashirer i Story [11], a dalje razvijali Lam i Weiss [15].

U kontekstu praktične stabilnosti za singularne sisteme, različiti rezultati bili su, po prvi put, izvedeni u radovima Debeljkovića i Owensa [16] i Owensa i Debeljkovića [17]. Analizu nelinearnih singularnih i implicitnih sistema, po prvi put je tretirao Bajić [18,19] a kroz generički kvalitativni i kvantitativni koncept koji, kao posebne slučajeve, uključuje i praktičnu i tehničku stabilnost sistema.

U ovom kratkom pregledu pomenuti su samo rezultati vezani za različite klase vremenski neprekidnih sistema.

U radu se istražuje problem dovoljnih uslova koji garantuju da će trajektorije neautonomnog sistema sa kašnjenjem u stanju ostati u unapred zadatom skupu stanja na konačnom vremenskom intervalu njegovog rada. Prema saznanjima autora, ovim problemom se do sada niko nije bavio.

Oznake i preliminarni rezultati

Linearni multivarijabilni sistem sa kašnjenjem može se predstaviti sledećom diferencijalnom jednačinom ponašanja:

$$\dot{\mathbf{x}}(t) = A_0\mathbf{x}(t) + A_1\mathbf{x}(t-\tau) + B_0\mathbf{u}(t) + B_1\mathbf{u}(t-\tau) \tag{1}$$

i sa pridruženim funkcijama početnih stanja:

$$\mathbf{x}(t) = \psi_x(t)$$
$$-\tau \le t \le 0 \tag{2}$$
$$\mathbf{u}(t) = \psi_u(t)$$

Jednačina (1) je poznata pod nazivom nehomogena jer iskazuje ponašanje sistema u prinudnom radnom režimu, $\mathbf{x}(t)$ je vektor stanja, $\mathbf{u}(t)$ je vektor upravljanja, A_0, A_1, B_0 and B_1 su konstantne matrice odgovarajućih dimenzija, a τ je čisto vremensko kašnjenje $\tau = \text{const.}$ ($\tau > 0$).

Dinamičko ponašanje sistema (1) sa početnim funkcijama (2) definisano je na vremenskom intervalu $J=\{t_0, t_0+T\}$, gde veličina T može biti bilo realan pozitivan broj, bilo simbol $+\infty$, tako da se praktična stabilnost i stabilnost na konačnom vremenskom intervalu mogu jednovremeno tretirati. Jasno je da $J \in R$.

Vremenski nepromenljivi skupovi, uzeti kao granice do kojih dosežu trajektorije sistema, pri njegovom kretanju u prostoru stanja, su otvoreni, povezani i ograničeni. Indeks β se koristi i označava sva dozvoljena stanja sistema, a indeks α označava sva dozvoljena početna stanja sistema, tako da važi: $S_\alpha \subseteq S_\beta$. U opštem slučaju može da se napiše:

$$S_\rho = \left\{\mathbf{x} : \|\mathbf{x}\|_Q^2 < \rho\right\}, \quad \rho \in [\alpha, \beta] \tag{3}$$

gde se za realnu matricu Q pretpostavlja da je simetrična i pozitivno definisana.

S_ε označava skup svih dozvoljenih upravljanja.

Neka $|\mathbf{x}|_{(\cdot)}$ označava bilo koju vektorsku normu (tj.=1,2,∞) a $\|(\cdot)\|$ matričnu normu indukovanu tim vektorom. Ovde se koristi sledeća notacija: $|\mathbf{x}|_2 \stackrel{\Delta}{=} (\mathbf{x}^T\mathbf{x})^{1/2}$ a $\|(\cdot)\|_2 = \lambda_{\max}^{1/2}(A^*A)$. Gornji indeks * i T označavaju konjugovanu transpoziciju i transpoziciju, sledstveno.

Matrična mera se široko koristi kada su u pitanju sistemi sa kašnjenjem. Matrična mera μ bilo koje matrice $A \in C^{n\times n}$ je definisana na sledeći način:

$$\mu(A) \stackrel{\Delta}{=} \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{\|I + \varepsilon A\| - 1}{\varepsilon} \tag{4}$$

Matrična mera definisana u (4) može da se razdeli u sledeće tri forme, zavisno od toga koja je norma upotrebljena, tako da se može pisati:

$$\mu_1(A) = \max_k \left(\mathrm{Re}(a_{kk}) + \sum_{\substack{i=1\\ i\neq k}}^{n} |a_{ik}| \right) \tag{5}$$

$$\mu_2(A) = \frac{1}{2}\max_i \lambda_i(A^* + A) \tag{6}$$

i

$$\mu_\infty(A) = \max_i \left(\mathrm{Re}(a_{ii}) + \sum_{\substack{k=1\\ k\neq i}}^{n} |a_{ki}| \right) \tag{7}$$

Coppel [20] ili Desoer i Vidysagar [21].

Prethodni rezultati

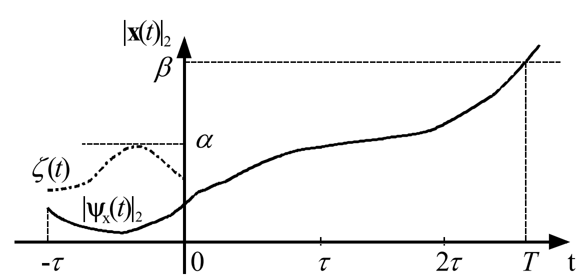
Definicija 1: Sistem dat jednačinom (1), koji zadovoljava početne uslove date u (2), je stabilan na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $[\zeta(t), \beta, \tau, T]$ ako i samo ako:

$$|\psi_x(t)|_2 < \zeta(t) \tag{8}$$

povlači:

$$|\mathbf{x}(t)|_2 < \beta \tag{9}$$

gde je $\zeta(t)$ skalarna funkcija sa osobinom $0 < \zeta(t) \le \alpha$, $-\tau \le$ $\le t \le 0$, gde je α realan, pozitivan broj, a $\beta \in R$ i $\beta > \alpha$, pri $\Psi_x(t) = \mathbf{x}(t)$, $\forall t \in [-\tau, 0]$.



Slika 1. Grafička ilustracija prethodne definicije

Teorema 1: Autonomni sistem dat u (1), sa početnim funkcijama datim u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, T\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\|\Phi\|_2 < \frac{\sqrt{\beta/\alpha}}{1+\tau\|A_1\|_2}, \quad \forall t\in[0,T] \tag{10}$$

gde $\|(\cdot)\|$ označava euklidsku normu, a $\Phi(t)$ fundamentalnu matricu sistema sa kašnjenjem, Nenadić et al. [22], Debeljković et al. [23].

Teorema 2: Autonomni sistem dat u (1), sa početnom funkcijom datom u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, T\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu_2(A_0)t} < \frac{\sqrt{\beta/\alpha}}{1+\tau\|A_1\|_2}, \quad \forall t\in[0,T] \tag{11}$$

gde $\|(\cdot)\|$ označava euklidsku normu, Debeljković et al. [24].

Teorema 3: Autonomni sistem dat u (1), sa početnom funkcijom datom u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \tau, T\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$e^{\mu_2(A_0)t} < \frac{\beta/\alpha}{1+\mu_2^{-1}(A_0)\|A_1\|_2(1-e^{-\mu_2(A_0)\tau})}, \forall t\in[0,T] \tag{12}$$

Debeljković et al. [25].

Teorema 4: Autonomni sistem dat u (1), sa početnom funkcijom datom u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\sqrt{\alpha}, \sqrt{\beta}, \tau, T, \mu(A_0)\neq 0\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$1+\|A_1\|_2\,\tau < \beta/\alpha \tag{13}$$

Debeljković et al. [25].

Definicija 2: Sistem dat u (1), pri $\mathbf{u}(t-\tau)\equiv 0$, $\forall t$, koji zadovoljava početni uslov dat u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \varepsilon, \tau, J, \mu(A_0)\neq 0\}$ ako i samo ako:

$$\psi_x(t)\in S_\alpha, \ \forall t\in[-\tau, 0] \tag{14}$$

i

$$\mathbf{u}(t)\in S_\varepsilon \forall t\in J \tag{15}$$

povlači:

$$\mathbf{x}(t; t_0, \mathbf{x}_0)\in S_\beta, \ \forall t\in[0, T] \tag{16}$$

Teorema 5: Autonomni sistem dat u (1), sa početnom funkcijom datom u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \varepsilon, \tau, J, \mu(A_0)\neq 0, B_1 = = 0\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\begin{gathered} e^{\mu_2(A_0)t} < \frac{\beta/\alpha}{\theta} \\ \theta = \mu^{-1}(A_0)\big(\mu(A_0)+\|A_1\|_2(1-e^{-\mu_2(A_0)\tau})\big) \\ +\mu^{-1}(A_0)\gamma\|B_0\|_2(1-e^{-\mu_2(A_0)t}), \quad \forall t\in J \end{gathered} \tag{17}$$

gde je :

$$\gamma = \varepsilon/\alpha, \quad \mu_2(A_0) = 0.5\lambda_{\max}(A_0 + A_0^T) \tag{18}$$

Debeljković et al. [26].

Teorema 6: Sistem dat u (1), pri $\mathbf{u}(t-\tau)\equiv 0$, $\forall t$, koji zadovoljava početne uslove date u (2), stabilan je na konačnom vrenenskom intervalu u odnosu na $\{\zeta(t), \beta, \varepsilon, \tau, J, \mu(A_0)\neq 0\}$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$(1+\tau\|A_1\|_2) + \gamma\|B_0\|_2\, t < \beta/\alpha, \quad \forall t\in J \tag{19}$$

gde je skalarna veličina γ data jed.(18), Debeljković et al. [26].

Definicija 3: Sistem dat u (1), koji zadovoljava početne uslove date u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na$\{\alpha, \beta, \varepsilon_\psi, \varepsilon, \tau, J, \mu(A_0)\neq 0\}$ ako i samo ako:

$$\psi_x(t)\in S_\alpha, \forall t\in[-\tau, 0] \tag{20}$$

$$\psi_u(t)\in S_{\varepsilon_\psi}, \forall t\in[-\tau, 0] \tag{21}$$

$$\mathbf{u}(t)\in S_\varepsilon, \forall t\in J \tag{22}$$

povlači:

$$\mathbf{x}(t, t_0, \mathbf{x}_0, \mathbf{u}(t))\in S_\beta, \ \forall t\in J \tag{23}$$

Teorema 7: Autonomni sistem dat u (1), sa početnom funkcijom datom u (2), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \varepsilon_\psi, \varepsilon, \tau, J, \mu(A_0)\neq 0\}$ ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\mu_2^{-1}(A_0)\cdot e^{\mu_2(A_0)t} < \frac{\beta}{\alpha}\cdot\delta^{-1} \tag{24}$$

gde je:

$$\begin{aligned} \delta = a_1\big(&\mu_2(A_0)\cdot a_1^{-1} + (1-e^{-\mu_2(A_0)\tau})\cdot C_1 \\ &+(1-e^{-\mu_2(A_0)t})\cdot C_2\big) \end{aligned} \tag{25}$$

$$c_1 = 1 + b_1(\gamma + \gamma_\psi) \tag{26}$$

$$c_2 = \gamma(b_0 + b_1) \tag{27}$$

$$a_1 = \|A_1\|, \quad b_1 = \frac{\|B_0\|}{a_1}, \quad b_0 = \frac{\|B_0\|}{a_1} \tag{28}$$

$$\gamma = \frac{\varepsilon}{\alpha}, \quad \gamma_\psi = \frac{\varepsilon_\psi}{\alpha} \tag{29}$$

Debeljković et al. [27].

Glavni rezultati

Jednačina (2) može da se predstavi u svojoj opštijoj formi, kao:

$$\mathbf{x}(t_0+\theta) = \boldsymbol{\psi}_x(t_0+\theta), \qquad t_0-\tau\le\theta\le 0 \tag{30}$$

$$\mathbf{u}(t_0+\theta) = \boldsymbol{\psi}_u(t_0+\theta), \qquad t_0-\tau\le\theta\le 0 \tag{31}$$

sa:

$$\boldsymbol{\psi}_x(t_0+\theta)\in C[t_0-\tau, 0] \tag{32}$$

$$\boldsymbol{\psi}_u(t_0+\theta)\in C[t_0-\tau, 0] \tag{33}$$

gde t_0 označava početni trenutak sistema datog jednačinom (1), a $C[(\cdot)]$ je Banachov prostor neprekidnih funkcija na vremenskom intervalu $[t-\tau, t]$ koji ga preslikava u $\mathbb{R}^n$ sa normom definisanom na sledeći način:

$$\| \boldsymbol{\psi} \|_C = \max_{t_0-\tau\le\theta\le t_0} \| \boldsymbol{\psi}(t_0+\theta) \| \tag{34}$$

Pretpostavlja se da su uobičajni uslovi glatkosti rešenja, sistema datog u (1), zadovoljeni tako da se ne postavlja pitanje egzistencije, jedinstvenosti i neprekidnosti pomenutog rešenja u odnosu na početne uslove.

Definicija 4: Sistem dat u (1), koji zadovoljava početne uslove date u (30) i u (31), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \varepsilon_0, \varepsilon, t_0, J\}$, $\alpha < \beta$, ako i samo ako:

$$\| \boldsymbol{\psi}_x \|_C < \alpha, \ \| \boldsymbol{\psi}_u \|_C < \varepsilon_0 \tag{35}$$

$$\| \mathbf{u}(t) \| < \varepsilon, \quad \forall t \in J \tag{36}$$

povlači:

$$\| \mathbf{x}(t) \| < \beta, \quad \forall t \in J \tag{37}$$

Teorema 8: Sistem dat u (1), koji zadovoljava početne uslove date u (30) i u (31), stabilan je na konačnom vremenskom intervalu u odnosu na $\{\alpha, \beta, \varepsilon_0, \varepsilon, t_0, J\}$, $\alpha < \beta$, ako je zadovoljen sledeći uslov:

$$\begin{aligned} &\left(1+(t-t_0)\sigma^A_{\max}\right) e^{\sigma^A_{\max}(t-t_0)} \\ &+\gamma^*_1(t-t_0)+\gamma^*_0\tau \le \beta/\alpha, \qquad \forall t \in J \end{aligned} \tag{38}$$

gde su:

$$\begin{aligned} &\gamma^*_1 = \gamma_1/\alpha, \ \gamma^*_0 = \gamma_0/\alpha, \ \gamma_1 = \frac{(b_1+b_0)}{\alpha} \\ &\|B_0\| = b_0, \ \|B_1\| = b_1, \ \gamma_0 = \frac{\varepsilon_0-\varepsilon}{\alpha}\cdot b_1 \\ &\sigma^A_{\max} = \sigma_{\max}(A_0)+\sigma_{\max}(A_1) \end{aligned} \tag{39}$$

Dokaz : Koristeći osobinu matrične norme, može se odmah pisati:

$$\begin{aligned} \|\dot{\mathbf{x}}(t)\| &= \|A_0\mathbf{x}(t)+A_1\mathbf{x}(t-\tau)+B_0\mathbf{u}(t)+B_1\mathbf{u}(t-\tau)\| \\ &\le \|A_0\|\cdot\|\mathbf{x}(t)\|+\|A_1\|\cdot\|\mathbf{x}(t-\tau)\| \\ &+\|B_0\|\cdot\|\mathbf{u}(t)\|+\|B_1\|\cdot\|\mathbf{u}(t-\tau)\| \end{aligned} \tag{40}$$

Imajući u vidu da se može iskoristiti sledeća nejednakost:

$$\| \mathbf{x}(t-\tau) \| \le \sup_{t-\tau\le t^*\le t} \| \mathbf{x}(t^*) \| \tag{41}$$

jed. (40) se može prepisati u sledećem obliku:

$$\begin{aligned} &\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \le \sigma_{\max}(A_0)\|\mathbf{x}(t)\|+\sigma_{\max}(A_1) \sup_{t-\tau\le t^*\le t} \|\mathbf{x}(t^*)\| \\ &+\|B_0\|\cdot\|\mathbf{u}(t)\|+\|B_1\|\cdot\|\mathbf{u}(t-\tau)\|, \\ &t > t_0+\tau \end{aligned} \tag{42}$$

ili kao:

$$\begin{aligned} &\|\dot{\mathbf{x}}(t)\| \le \sigma^A_{\max}\left(\sup_{t-\tau\le t^*\le t} \|\mathbf{x}(t^*)\|+\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C \right) \\ &+\|B_0\|\cdot\|\mathbf{u}(t)\|+\|B_1\|\cdot\|\mathbf{u}(t-\tau)\|, \\ &t > t_0, \end{aligned} \tag{43}$$

gde $\sigma_{\max}(A_i)$ označava maksimalnu sopstvenu vrednost matrice A_i, $i = 1, 2$.

Da bi se dobio konačan rezultat, potrebno je integraliti jed. (1), pri čemu se dobija:

$$\begin{aligned} \int_{t_0}^{t} \dot{\mathbf{x}}(t)dt &= \int_{t_0}^{t} (A_0\mathbf{x}(s)+A_1\mathbf{x}(s-\tau))\,ds \\ &+\int_{t_0}^{t} (B_0\mathbf{u}(s)+B_1\mathbf{u}(s-\tau))\,ds \end{aligned} \tag{44}$$

a kombinujući prethodni rezultata sa (43), očigledno je da važi i:

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{x}(t) \| \le \| \mathbf{x}(t_0) \| \\ &+\int_{t_0}^{t} \| A_0 \| \cdot \| \mathbf{x}(s) \|\, ds+\int_{t_0}^{t} \| A_1 \| \cdot \| \mathbf{x}(s-\tau) \|\, ds \\ &+\int_{t_0}^{t} \| B_0 \| \cdot \| \mathbf{u}(s) \|\, ds+\int_{t_0}^{t} \| B_1 \| \cdot \| \mathbf{u}(s-\tau) \|\, ds \end{aligned} \tag{45}$$

kao i:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{x}(t_0)\|+\sigma^A_{\max}\int_{t_o}^{t} \Big(\sup_{t-\tau\le t^*\le t} \|\mathbf{x}(t^*)\|+\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C \Big)\, ds \\ &+\|B_0\|\int_{t_0}^{t} \|\mathbf{u}(s)\|\, ds+\|B_1\|\int_{t_0-\tau}^{t_0} \|\boldsymbol{\psi}_u\|_C\, ds \\ &+\|B_1\|\int_{t_0}^{t-\tau} \|\mathbf{u}(s)\|\, ds \end{aligned} \tag{46}$$

odnosno:

$$\begin{aligned} &\|\mathbf{x}(t)\| \le \|\mathbf{x}(t_0)\|+\sigma^A_{\max}\int_{t_o}^{t} \Big(\sup_{t-\tau\le t^*\le t} \|\mathbf{x}(t^*)\|+\|\boldsymbol{\psi}_x\|_C \Big)\, ds \\ &+(\|B_0\|+\|B_1\|)\,\varepsilon\cdot(t-t_0) \\ &+(\varepsilon_0-\varepsilon)\|B_1\|\cdot\tau \end{aligned} \tag{47}$$

Pošto je:

$$\| \mathbf{x}(t_0) \| = \| \boldsymbol{\psi}_x(0) \| \le \| \boldsymbol{\psi}_x \|_C \tag{48}$$

to sve dovodi i do sledećeg rezultata:

$$\begin{aligned} &\| \mathbf{x}(t) \| \le \| \boldsymbol{\psi}_x \|_C \cdot (1+\sigma^A_{\max}(t-t_0)) \\ &+\sigma^A_{\max}\int_{t_0}^{t} \sup_{s-\tau\le t^*\le s} \| \mathbf{x}(t^*) \|\, ds \\ &+(b_1+b_0)\,\varepsilon(t-t_0) \\ &+(\varepsilon_0-\varepsilon)b_1\tau. \end{aligned} \tag{49}$$

S obzirom na činjenicu da je:

$$\rho(t) = \| \boldsymbol{\psi}_x \|_C \cdot (1+\sigma^A_{\max}(t-t_0)) \tag{50}$$

očigledno neka neopadajuća vremenska funkcija, može se odmah napisati:

$$\sup_{s-\tau\le t^*\le s} \| \mathbf{x}(t^*) \| \le \rho(t)+\sigma^A_{\max}\int_{t_0}^{t} \sup_{s-\tau\le t^*\le s} \| \mathbf{x}(t^*) \|\, ds \tag{51}$$

Ako se sada primeni dobro poznata Bellman-Gronwallova lema, Hale (1971), lako se pokazuje da važi i:

$$\| \mathbf{x}(t) \| \le \sup_{s-\tau \le t^* \le s} \| \mathbf{x}(t) \| \le \rho(t) e^{\sigma_{\max}^{A}(t-t_0)} \tag{52}$$

kao i:

$$\begin{aligned} \|x(t)\| \le \alpha(1+(t-t_0)\sigma_{\max}^{A}) e^{\sigma_{\max}^{A}(t-t_0)} \\ +(b_1+b_0)\varepsilon(t-t_0)+(\varepsilon_0-\varepsilon)b_1\tau \end{aligned} \tag{53}$$

I konačno, ako se iskoristi osnovni uslov Teoreme 8, odnosno jed. (38), to sve dovodi do:

$$\| \mathbf{x}(t) \| < \beta, \quad \forall t \in J \tag{54}$$

što je trebalo i dokazati.

Zaključak

Matrična mera često se koristi u analizi stabilnosti i asimptotske stabilnosti sistema sa kašnjenjem. Ovaj prilaz kao i Bellman-Gronwallova lema, korišćeni su u radu sa evidentnim ciljem da se unaprede već od ranije poznati rezultati. Taj put se pokazao ispravnim. Naime, pokazano je da je nepotrebno sračunavanje fundamentalne matrice sistema sa kašnjenjem a dobijeni dovoljni uslovi stabilnosti na konačnom vremenskom intervalu, u vidu prostih algebarskih nejednačina koje uključuju i iznos čisto vremenskog kašnjenja, predstavljaju poseban kvalitet. Korišćenje Bellman-Gronwallove leme do sada nije bilo primenjeno u literaturi u proučavanju i primeni neljapunovskih koncepata na sisteme sa kašnjenjem.

Prema saznanjima autora, ovi problemi nisu bili do sada izučavani sa ovakvog stanovišta, naročito kada su u pitanju neautonomni sistemi sa kašnjenjem u stanju i, u osnovi, predstavljaju značajno proširenje rezultata, koji je ranije dao Lazarević at al. [28]

Literatura

[1] LEE,T.N., DIANT,S. Stability of Time Delay Systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1981, vol.26**,** no.4, p.951–953.

[2] MORI,T., FUKUMA,N., KUWAHARA,M. Simple Stability Criteria for Single and Composite Linear Systems with Time Delays. *Int. J. Control*, 1981, vol.34, no.6, p.1175–1184.

[3] MORI,T. Criteria for Asymptotic Stability of Linear Time Delay Systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1985, vol.30, no.8, p158–161.

[4] HMAMED,A. On the Stability of Time Delay Systems: New Results. *Int. J. Control* 1986, vol.43, no.1, p.321–324.

[5] LEE,E.B., LU,W.S., WU,N.E.A. Lyapunov Theory for Linear Time Delay Systems. *IEEE Trans. Automat. Control*, 1986, vol.31, no.3, p.259–262.

[6] LA SALLE, LEFSCHET,S. *Stability by Lyapunov's Direct Method*. Academic Press, New York, 1961.

[7] WEISS,L., INFANTE,E.F. On the Stability of Systems Defined over Finite Time Interval. *Proc. National Acad. Science*, 1965, vol.54, no.1, p.44–48.

[8] WEISS,L., INFANTE,E.F. Finite Time Stability under Perturbing Forces on Product Spaces. *IEEE Trans. on Automat. Cont*., 1967, vol.12, no.1, p.54–59.

[9] MICHEL,A.N. Stability, Transient Behavior and Trajectory Bounds of Interconnected Systems. *Int. J. Control*, 1970, vol.11, no.4, p.703–715.

[10] GRUJIĆ,LJ.T. *On Practical Stability.* 5th Asilomar Conf. on Circuits and Systems, USA, 1971, p.174–178.

[11] LASHIRER,A.M., STORY,C. Final-Stability with Applications. *J. Inst. Math. Appl*., 1972, no.9, p.379–410.

[12] GRUJIĆ,LJ.T. Non-Lyapunov Stability Analysis of Large-Scale Systems on Time-Varying Sets. *Int. J. Control*, 1975, vol.21, no.3, p.401–415.

[13] GRUJIĆ,LJ.T. Practical Stability with Settling Time on Composite Systems. *Automatika* (YU), T. P. 9, 1975, p.1–11.

[14] GRUJIĆ,LJ.T. Uniform Practical and Finite-Time Stability of Large-Scale Systems. *Int. J. System Science*, 1975, vol.6, no.2, p.181–195.

[15] LAM,L., WEISS,L. Finite Time Stability with Respect to Time-Varying Sets. *J. Franklin Inst*., 1974, no.9, p.415–421.

[16] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., OWENS,D.H. *On Practical Stability.* Proc. MELECON Conference, Madrid (Spain), October, 1985, p.103–105.

[17] OWENS,D.H., DEBELJKOVIĆ,D.LJ. *On Non-Lyapunov Stability of Discrete Descriptor System.* Proc. 25th Conference on Decision and Control, Athens, Greece, 1986, p.2138–2139.

[18] BAJIĆ,V.B. Generic Stability and Boundedness of Semistate Systems. *IMA Journal of Mathematical Control and Information*, 1988, vol.5, no.2, p.103–115.

[19] BAJIĆ,V.B. *Generic Concepts of System Behavior and the Subsidiary Parametric Function Method*. SACAN, Link Hills, RSA, 1992.

[20] COPPEL,W.A. *Stability and Asymptotic Behavior of Differential Equations*. Boston: D.C. Heath, 1965.

[21] DESOER,C.A., VIDYSAGAR,M. *Feedback Systems: Input - Output Properties*, Academic Press, New York, 1975.

[22] NENADIĆ,Z.LJ., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., MILINKOVIĆ,S.A. *On Practical Stability of Time Delay Systems.* Proc. ACC97, Albuquerque, New Mexico (USA), 1997, June 4–6, p.3235–3236.

[23] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., NENADIĆ,Z.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *On Practical and Finite-Time Stability of Time-Delay Systems.* Proc. ECC97, Brussels (Belgium), 1997.a, July 1-4, p.307–311.

[24] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., NENADIĆ,Z.LJ., KORUGA,DJ., MILINKOVIĆ,S.A, JOVANOVIĆ,M.B. *On Practical Stability of Time-Delay Systems: New Results.* Proc. 2nd ASCC97, Seoul (Korea), 1997.b, July 22-25 p.III- 543–546.

[25] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., NENADIĆ,Z.LJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *On the Stability of Linear Systems with Delayed State Defined over Finite Time Interval.* Proc. CDC, San Diego, California (USA), 1997.c, December 12-14, p.2771–2772.

[26] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., LAZAREVIĆ,M.P., KORUGA,DJ., TOMAŠEVIĆ,S. *On Practical Stability of Time Delay System Under Perturbing Forces.* AMSE 97, Melbourne, Australia, 1997.d, October 29-31, p.447–450.

[27] DEBELJKOVIĆ,D.LJ., KORUGA,DJ., MILINKOVIĆ,S.A., JOVANOVIĆ,M.B. *Further Results on Non-Lyapunov Stability of Time Delay Systems.* Proc. MELECON, Tel-Aviv (Israel) 1998, May 18-20, p.509–512.

[28] LAZAREVIĆ,M.P., DEBELJKOVIĆ,D.LJ., NENADIĆ,Z.LJ., MILINKOVIĆ,S.A. Finite Time Stability of Time Delay Systems. *IMA J. of Math. Control and Information*, - 2000, vol.17, no.3, p.101-110.

Rad primljen: 7.3.2000.god.