

UDK: 514.763.5(047)=861
COSATI: 12-01

Jedna opasnost pri aproksimaciji tenzorskih polja

Dr Zoran Drašković, dipl.meh.¹⁾

Ukazuje se na sledeću nedoslednost pri aproksimiranju tenzorskih polja: umesto da se polje aproksimira kao invarijanta (kernel), po pravilu se aproksimira svaka njegova koordinata posebno (kao skalarna funkcija). Odustajanje od uobičajenog i opredeljivanje za invarijantan pristup (koji se može proširiti na bilo koju aproksimativnu teoriju) potkrepljuje se fizikalnim, geometrijskim i numeričkim razmatranjima.

Ključne reči: Tenzorska polja, aproksimacija tenzorskih polja, invarijantnost.

U v o d

¹⁾ Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

APROKSIMIRANJE (npr. u metodi konačnih elemenata) vektorskih i uopšte tenzorskih polja može se vršiti na dva načina. Prvi način je uobičajeni postupak koji se sastoji u *aproksimiranju koordinata* tog polja i u slučaju nekog vektorskog polja \mathbf{v} može se izraziti, na primer, interpolacionom formulom oblika* (up. sa (7.43) u [1])

$$v^i = \Psi^N v_N^i \quad (1)$$

gde su: Ψ^N tzv. interpolacione funkcije, a v^i su kontravarijantne koordinate polja \mathbf{v} u proizvoljnim krivolinijskim koordinatama x^i (u trodimenzionom euklidskom prostoru); v_N^i su tzv. čvorne vrednosti tog polja.

Drugi način se sastoji u *aproksimiranju same vektorske funkcije* \mathbf{v} na primer interpolacionom formulom oblika (up. sa (7.48) u [1])

$$\mathbf{v} = \Psi^N \mathbf{v}_N \quad (2)$$

koja, kako se lako može pokazati (v. npr. (2) u [2]), u koordinatnom obliku glasi**:

$$v^i = \Psi^N g_{(N)j}^i v_N^j \quad (3)$$

gde su: $g_{(N)j}^i$ operatori paralelnog pomeranja u euklidskom prostoru (Euclidean shifters):

$$g_{(N)j}^i = \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \Big|_{x^m} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \Big|_{x_N^m} \quad (4)$$

(v. str. 807 u [3]), a z^k su Dekartove pravouglo koordinatne.

Reprezentacija (3) se očigledno razlikuje od reprezentacije (1) – samo u slučaju Dekartovih koordinata, kada se operatori paralelnog pomeranja (4) svode na

* Koristi se Ajnštajnova (Einstein) konvencija o sabiranju po ponovljenim indeksima. Mali latinski indeksi uzimaju vrednosti iz skupa {1,2,3}; indeks N se odnosi na tačke u prostoru (čvorove) u kojima su zadate vrednosti vektorskog polja.

** Stavljanje indeksa N u zagradu znači da se konvencija o sabiranju ne primenjuje na član s takvim indeksom – pri sabiranju po indeksu N taj se član jednostavno pridružuje drugim članovima sa istim indeksom.

Kronekerove (Kronecker) δ -simbole, formula (3) se svodi na oblik (1). Suštinski se ta razlika ogleda u činjenici da reprezentacija (1), za razliku od reprezentacije (3), nema svojstvo *koordinatne invarijantnosti (kovarijantnosti)*. Zaista, dok se kompozicijom (3) sa $\partial \bar{x}^m / \partial x^i$, gde su \bar{x}^m neke nove krivolinijske koordinate, dobija da i u tom novom sistemu važi:

$$\begin{aligned} \bar{v}^m &= \Psi^N g_{(N)j}^i v_N^j \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \\ &= \Psi^N g_{(N)j}^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^j}{\partial \bar{x}^n} \Big|_{(N)} \bar{v}_N^n \\ &= \Psi^N \bar{g}_{(N)n}^m \bar{v}_N^n \end{aligned} \quad (5)$$

dotle se takvim postupkom ne može očuvati forma iz (1)

$$\begin{aligned} \bar{v}^m &= \Psi^N v_N^i \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \\ &= \Psi^N \frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \Big|_{(N)} \bar{v}_N^n \\ &\neq \Psi^N \bar{v}_N^m \end{aligned} \quad (6)$$

jer je u opštem slučaju:

$$\frac{\partial \bar{x}^m}{\partial x^i} \frac{\partial x^i}{\partial \bar{x}^n} \Big|_{(N)} \neq \delta_n^m \quad (7)$$

Po pravilu se aproksimira svaka koordinata polja posebno (kao skalarna funkcija) uz objašnjenje da je takav, skalarni postupak "*a better approximation*" (str. 48 u [1]), dok se invarijantni pristup odbacuje kao "*a less accurate*" (str. 191 u [1])!

Razmatranja u sledećim odeljcima trebalo bi, s jedne strane, da ukažu na nedoslednost uobičajenog, skalarnog postupka, i da, s druge strane, potkrepe autorovo uverenje u opravdanost insistiranja na invarijantnom (kovarijantnom) pristupu pri aproksimiranju tenzorskih polja.

Fizikalna razmatranja

Prva autorova razmišljanja o potrebi drukčijeg, tj. invarijantnog aproksimiranja vektorskih i tenzorskih polja (u euklidskom prostoru) u odnosu na uobičajeni, skalarni postupak javila su se vezano za aproksimacije tih polja u nelinearnim problemima mehanike kontinuuma [1]. Naime, znajući da su jednačine u mehanici neprekidnih sredina tenzorske prirode, odnosno invarijantne pri koordinatnim transformacijama, nametnulo se pitanje da li bi i njihov približni oblik trebalo da očuva to svojstvo?

Razume se, takva ideja bi mogla da se proširi i na aproksimacije zakona ma kakve fizikalne teorije. Naime, zakoni fizike su invarijantni* (kovarijantni) u odnosu na promenu koordinatnog sistema, pa ako se ti zakoni shvate kao veze između matematičkih objekata koji su invarijantni u smislu tenzorskog računa, onda će invarijantni matematički objekti biti tenzorska polja, a fizički zakoni biće opisani tenzorskim jednačinama.

Stoga je u [2] izraženo uverenje da bi koordinatnu invarijantnost trebalo zahtevati i za aproksimaciju ma kog fizičkog zakona (odnosno za aproksimacije polja koja u tom zakonu učestvuju). Takva ideja mogla bi da bude obrazložena na sledeći način: ono što se naziva "prirodnim zakonima" samo su *približni* oblici pravih zakona u prirodi**, ali se ipak zahteva njihova koordinatna invarijantnost ([5], str. 222 i [6], str. 15) i oni se opisuju tenzorskim jednačinama. Stoga nema razloga da se odustane od tog zahteva ni kad su u pitanju *matematičke aproksimacije* prirodnih zakona opisanih tenzorskim jednačinama, pa zato ni od koordinatne invarijantnosti aproksimacija (npr. konačnim elementima***) tenzorskih polja koja se u takvim jednačinama pojavljuju.

Istina, u [8] se izražava sumnja u to da egzaktni prirodni zakoni moraju biti obavezno izraženi u tenzorskom obliku ("*... it is not even clear that exact laws of nature must necessarily be expressible in tensor form ...*", str. 130 u [8]), pa bi utoliko manje trebalo insistirati na tenzorskoj reprezentaciji aproksimativnih teorija, ali se ipak ne odustaje od primene tenzorskog računa i u takvim teorijama (što se npr. u teoriji ljsaka pravda najviše elegancijom tenzorske notacije)!

Geometrijska razmatranja

Geometrijski smisao, pa i prirodnost, invarijantne aproksimacije (2), tj. (3) vektorskog polja \mathbf{v} u principu je osiguran okolnošću da se sve čvorne vrednosti (paralelno) prenose u istu tačku pre nego što se izvrši proces sumiranja (što je u skladu sa Eriksenovim konceptom sabiranja i integraljenja tenzorskih polja u krivolinijskim koordinatama [3], str. 808), dok se za rezultate sabiranja u (1) ne bi moglo

*Inače, pravi razlog za tolikim insistiranjem na invarijantnosti jeste činjenica da je osnovni kriterijum prirodnosti nekog fizičkog zakona njegova invarijantnost (kovarijantnost). No, da bi se takav princip (koji se ne dokazuje nego usvaja i obično se naziva *principom simetrije*) matematički formulisao u savremenoj fizici, tenzorski račun (kao račun invarijantata) je još uvek u njoj nezamenljiv.

**U prilog tom stavu govore i sledeće reči vezane za približni karakter teorija ljusaka: " ... *this approximate character of any shell theory sometimes has been used to apologize for the large variety of different shell equations But aren't all other mechanical theories approximations too? Models, which portray only certain aspects of the physical reality.*" ([4], str. 353).

***Insistiranje na invarijantnom pristupu u KE aproksimacijama može se smatrati prilogom sledećem stavu: "*Since most of all physical entities are invariant under coordinate transformations and those in discrete mechanics are not any exception to this, their treatment as tensors ... may very well be the future trend of the finite element formulation of physical problems.*" ([7], str. 38-39).

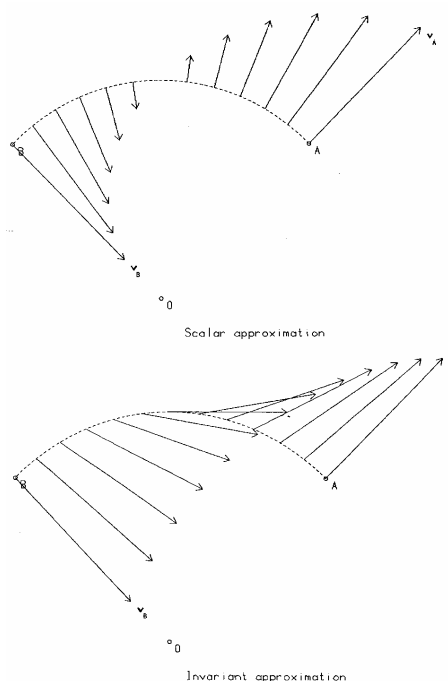
reći da predstavljaju koordinate nekog apsolutnog vektora (tu je vršeno tzv. *prevlačenje* čvornih vrednosti posmatranog polja)!

Međutim, činjenica da se invarijantnost neke veličine, po pravilu, ispituje u *koordinatnom* obliku, dok, s druge strane, neki posmatrač (ma koliko bio neobjektivan) opaža tu veličinu (vektor) kao *celinu* (a ne njegove koordinate!), bila je razlog da se u [9] – imajući u vidu da je postupak vizuelizacije svakako najuverljiviji – izloži i jedan heuristički pokušaj u nameri da se potvrdi prirodnost predloženog invarijantnog pristupa u (KE) aproksimiranju.

Vizuelizacija kao kriterijum prirodnosti invarijantnog aproksimiranja vektorskih polja. Posmatra se vektorsko polje \mathbf{v} definisano duž kružnog luka. Neka su zadate vrednosti tog polja u tačkama A i B , sl.1. Koristeći u pristupima (1) i (3) polarne koordinate i , na primer, sledeće interpolacione funkcije:

$$\Psi^A = 1 - \xi, \quad \Psi^B = \xi \quad (\xi \in [0,1]) \quad (8)$$

(koje odgovaraju tačkama, čvorovima, A i B), dobijaju se skalarna i invarijantna distribucija polja \mathbf{v} , respektivno (sl.1). Ad hoc zaključak o većoj prirodnosti jednog ili drugog pristupa bio bi očigledno ishitren.



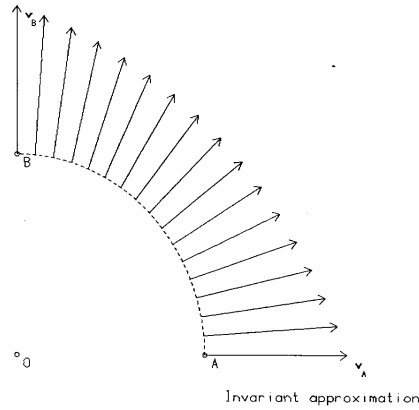
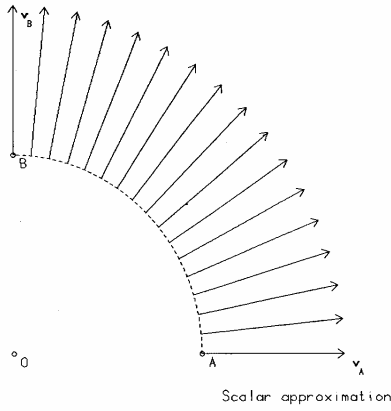
Sl.1

Međutim, u situaciji prikazanoj na sl.2 čini se da je skalarna ("radijalna") distribucija uniformnija i stoga prirodnija nego što je invarijantna ?

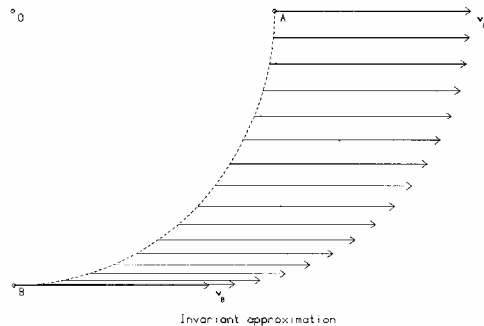
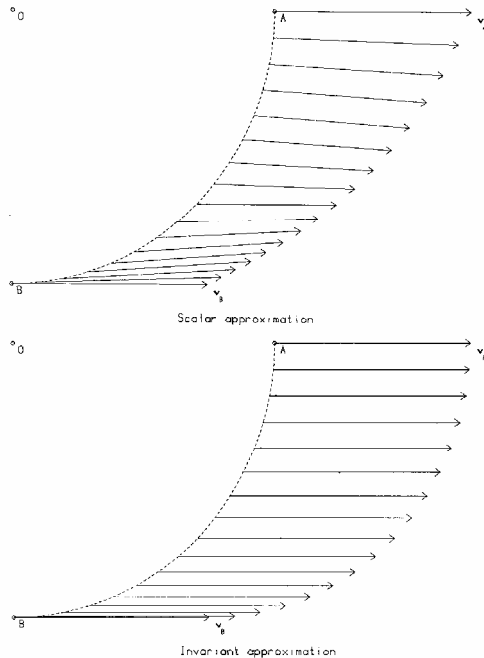
No, ma kakav kriterijum prirodnosti neke (KE) aproksimacije da se usvoji, on bi trebalo da zadovolji izvestan *jednostavan* test. Takav test je, na primer, prikazan na sl.3, gde se posmatra polje \mathbf{v} sa *istim* vrednostima u A i B . U nedostatku bilo kakvih drugih podataka, najprirodnije je pretpostaviti *konstantnost* celog polja \mathbf{v} , nezavisno od toga o kom se koordinatnom sistemu radi****. U ovom

**** Značaj takve homogene distribucije nekog polja može da se sagleda kroz činjenicu da je sposobnost KE modela da reprodukuje homogeno stanje napona nepohodan uslov konvergencije KE analize [10].

primeru upravo invarijantni pristup (3) generiše baš takvu distribuciju, ali ne i skalarni pristup (1) (kad je polarni sistem u pitanju!).



Sl.2



Sl.3

Samo jedan ovakav primer "otkaza" uobičajenog, skalarnog pristupa (1) sasvim je dovoljan da diskredituje njegovu opštu valjanost. S druge strane, jasno je i da ovakav primer, ma koliko geometrijski bio korektan, nije dovoljan da bi se tvrdilo da je univerzalno ispravan i jedino

dopušten samo invarijantni pristup (2). Ali, sve dotle dok se prihvata na opisani način formulisani kriterijum prirodnosti nekog zakona fizike, čini se da nema razloga da se odustane od predložene pristupa (2).

Treba napomenuti da iako su prethodna razmatranja u vezi sa prirodnošću KE aproksimacija nekog vektorskog polja usvojena zahvaljujući njegovoj *vidljivosti* (čemu je doprinela "čekinjasta" reprezentacija na slikama od 1 do 3), to se može proširiti i na neko tenzorsko polje, makar da takva generalizacija ostaje *nevidljiva* za tenzore reda dva, tri,Uostalom, to ne bi bilo prvi put da se govori o nečem što se ne vidi, ali "ostavlja tragove" (u ovom slučaju su to koordinate).

Numerička razmatranja

Na tipičnom primeru ravnog naprezanja strukture idealizovane četvoročvorovnih izoparametarskih konačnih elemenata membrane, biće dato numeričko potkrepljenje – bar kada su u pitanju jednačine kretanja, odnosno ravnoteže konačnih elemenata u krivolinijskim koordinatama – pristupu koji se odlikuje aproksimiranjem vektorskog (i uopšte tenzorskog) polja kao invarijante (kernela) umesto, što je uobičajeno, aproksimiranjem svake njegove koordinate posebno (kao skalarne funkcije). Da bi se to i učinilo, neophodno je da se prvo za oba pristupa navedu:

Jednačine ravnoteže konačnih elemenata u krivolinijskim koordinatama. Uobičajene jednačine kretanja konačnog elementa neprekidne sredine u krivolinijskim koordinatama, kada se u njihovom izvođenju polazi od diskretnog modela

$$w^i = w^{Ni} \Psi_N \quad (9)$$

Polja pomeranja $u = w^i g_i$ (g_i su kovarijantni bazni vektori uočenih krivolinijskih koordinata), glase* ([1], str. 190):

$$\begin{aligned} & m_{NM} \ddot{w}^{Mi} + \\ & + \int_{v_o} t^{qj} (\delta_j^i \Psi_{N,q} - \Psi_N \Gamma_{jq}^i) dv_o + \\ & + \int_{v_o} t^{qj} (\Psi_{M,j} \Psi_{N,q} \delta_m^i + \Psi_M \Psi_{N,q} \Gamma_{mj}^i - \\ & - \Psi_{M,j} \Psi_N \Gamma_{mq}^i - \Psi_M \Psi_N \Gamma_{mj}^r \Gamma_{rq}^i) dv_o w^{Mm} = p_N^i \end{aligned} \quad (10)$$

gde je m_{NM} konzistentna matrica masa ((13.37) u [1])

$$m_{NM} = \int_{v_o} \rho_o \Psi_N \Psi_M dv_o \quad (11)$$

a p_N^i ukupna generalisana sila u čvoru N ((13.54) u [1])

$$p_N^i = \int_{v_o} \hat{F}^i \Psi_N dv_o + \int_{A_o} \hat{S}^i \Psi_N dA_o \quad (12)$$

gde su: \hat{F} i \hat{S} zapreminske i površinske sile, respektivno; Ψ_N su interpolacione funkcije, a zapeta u $\Psi_{N,m}$ označava parcijalno diferenciranje po odnosnoj krivolinijskoj koordinati; Γ_{jk}^i su Kristofelovi (Christoffel) simboli druge

* Veliki latinski indeksi odnose se na čvorove, a uzimaju vrednosti od 1 do ukupnog broja čvorova u elementu.

vrste. Kretanje se posmatra u odnosu na referentnu konfiguraciju elementa; stoga je t^{mj} tenzor napona meren po

jedinici površine nedeformisanog elementa, čija su gustina mase, zapremina i površina ρ_o , v_o i A_o , respektivno.

S druge strane, kada se umesto skalarnih aproksimacija komponenti (9), dosledno uvede vektorska aproksimacija polja pomeranja:

$$\mathbf{u} = \Psi_N \mathbf{u}^N = \Psi_N w_i^{Ni} \mathbf{g}_{(Ni)} = \Psi_N w_i^N \mathbf{g}^{(Ni)} \quad (13)$$

gde je \mathbf{u}^N vrednost vektorskog polja \mathbf{u} u čvoru N , w_i^{Ni} i w_i^N su kontravarijantne i kovarijantne koordinate pomeranja u čvoru N , a $\mathbf{g}_{(Ni)}$ i $\mathbf{g}^{(Ni)}$ su bazni vektori u čvoru N , dobija se da jednačine kretanja konačnog elementa neprekidne sredine (u proizvoljnim krivolinijskim koordinatama) u invarijantnom pristupu glase [11]:

$$m_{NM} \ddot{w}^{Ml} \mathbf{g}_{(Ml)}^{(Nk)} + \int_{v_o} t^{ij} \Psi_{N,j} \mathbf{g}_i^{(Nk)} (\delta_i^l + \Psi_{M,i} \mathbf{g}_{(M)m}^l w^{Mm}) dv_o = \tilde{p}_N^k \quad (14)$$

gde su $\mathbf{g}_{(Ni)}^{(Nk)} = \mathbf{g}^{(Nk)} \cdot \mathbf{g}_i$ i $\mathbf{g}_{(Ml)}^{(Nk)} = \mathbf{g}^{(Nk)} \cdot \mathbf{g}_{(Ml)}$ operatori paralelnog pomeranja, a

$$\tilde{p}_N^k = \int_{v_o} \hat{F}^i \Psi_N \mathbf{g}_i^{(Nk)} dv_o + \int_{A_o} \hat{S}^i \Psi_N \mathbf{g}_i^{(Nk)} dA_o \quad (15)$$

je koordinatni oblik (u krivolinijskim koordinatama) ukupne generalisane sile u čvoru N .

U slučaju statičkog ponašanja tela (o kakvom će dalje biti reči), inercioni članovi u jednačinama (10) i (14) mogu da se izostave i one postaju jednačine ravnoteže uočenog konačnog elementa. Ako se, dalje, u podintegralnim izrazima jednačina (10) i (14) uvedu lokalne konvektivne koordinate* ξ^α (koje se po pravilu, razlikuju od globalnih koordinatnih linija x^i - "are not parallel"; [1], str. 191) i u njima izraze koordinate tenzora napona:

$$t^{ij} = \frac{\partial x^i}{\partial \xi^\alpha} \frac{\partial x^j}{\partial \xi^\beta} \sigma^{\alpha\beta} \quad (16)$$

zatim se pretpostavi da je u pitanju elastičan materijal prvog reda, tj. Hukov materijal, što znači da mu je ponašanje opisano linearnim konstitutivnim jednačinama oblika (up. sa (301.1) u [5])

$$\sigma^{\alpha\beta} = E^{\alpha\beta\gamma\delta} e_{\gamma\delta} \quad (17)$$

(u kojima su $E^{\alpha\beta\gamma\delta}$ tzv. koeficijenti elastičnosti prvog reda i, kao što je poznato, karakterišu materijalne simetrije posmatranog materijala), i najzad se smatra da se radi o malim deformacijama, tj. da je:

$$e_{\gamma\delta} = \frac{1}{2}(u_{\gamma,\delta} + u_{\delta,\gamma}) \quad (18)$$

može se pokazati da se jednačine (10) svode na oblik:

$$k_{MN}^{ij} w_j^M = p_N^i \quad (19)$$

gde je:

$$k_{MN}^{ij} \equiv \int_{v_o} (x_\alpha^i \Psi_{N,\beta} - \Psi_N \Gamma_{mn}^i x_\alpha^m x_\beta^n) E^{\alpha\beta\gamma\delta} \times (x_\gamma^j \Psi_{M,\delta} - \Psi_M \Gamma_{pq}^j x_\gamma^p x_\delta^q) dv_o \quad (20)$$

*Mali grčki indeksi uzimaju vrednosti iz skupa {1,2,3}.

a jednačine (14) na oblik:

$$\tilde{k}_{MN}^{ij} w_j^M = \tilde{p}_N^i \quad (21)$$

gde je:

$$\tilde{k}_{MN}^{ij} \equiv \int_{v_o} \mathbf{g}_\alpha^{(N)i} \Psi_{N,\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} \mathbf{g}_\gamma^{(M)j} \Psi_{M,\delta} dv_o \quad (22)$$

Izrazi (20 i 22) su tzv. matrice krutosti za linearne elastične materijale u skalarnom i invarijantnom pristupu, respektivno. Očigledno je da se u slučaju Dekartovih koordinata (kada se anuliraju Kristofelovi simboli) oba izraza svode na:

$$k_{MN}^{ij} \equiv \int_{v_o} z_\alpha^i \Psi_{N,\beta} E^{\alpha\beta\gamma\delta} z_\gamma^j \Psi_{M,\delta} dv_o \quad (23)$$

dakle na uobičajeni izraz za matricu krutosti koji se javlja u klasičnoj metodi konačnih elemenata (tj. u metodi konačnih elemenata po pomeranjima) pri izvođenju u globalnim Dekartovim koordinatama (up. npr. sa (16.13) u [1]).

Da bi se izvršilo numeričko poređenje jednačina (19) i (21), iskorišćen je "kućni" softver *Vojnotehničkog instituta* za strukturalnu analizu STATA (STATička Analiza) opisan u [12-15], tačnije modifikacije tog softvera u onom njegovom delu gde treba da se, prema (20) odnosno (22), odrede vrednosti članova matrice krutosti posmatrane strukture.

Pre nego što bude razmotren numerički primer, biće reči i

O izoparametarskom konceptu konačnih elemenata.

U ovom konceptu, koji će biti korišćen u nagoveštenom numeričkom primeru, osnovno je da se iste interpolacione funkcije koriste i za aproksimiranje globalnih koordinata ma koje tačke unutar elementa i za aproksimiranje polja pomeranja [1], str.138. Ako su u pitanju Dekartove globalne koordinate z^k , to znači da će koordinate ma koje tačke elementa i pomeranja \mathbf{u} u toj tački biti interpolirani na sledeći način

$$\begin{aligned} z^k &= \Psi^N z_N^k \\ U^k &= \Psi^N U_N^k \end{aligned} \quad (24)$$

Međutim, kako same koordinate nemaju tenzorski karakter, da bi se izrazima (24) dala invarijantna forma, prvo ih treba prepisati u obliku:

$$\begin{aligned} R^k &= \Psi^N R_N^k \\ U^k &= \Psi^N U_N^k \end{aligned} \quad (25)$$

gde su R^k Dekartove koordinate vektora položaja \mathbf{r} uočene tačke u elementu, a potom uvedi proizvoljne krivolinijske koordinate x^i :

$$x^i = x^i(z^k) \quad (26)$$

tako da (25) postaje:

$$\begin{aligned} r^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \Big|_{x^m} &= \Psi^N r_N^j \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \Big|_{x_N^m} \\ u^i \frac{\partial z^k}{\partial x^i} \Big|_{x^m} &= \Psi^N u_N^j \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \Big|_{x_N^m} \end{aligned} \quad (27)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} r^i &= \Psi^N \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \Big|_{x^m} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \Big|_{x_N^m} r_N^j \\ u^i &= \Psi^N \frac{\partial x^i}{\partial z^k} \Big|_{x^m} \frac{\partial z^k}{\partial x^j} \Big|_{x_N^m} u_N^j \end{aligned} \quad (28)$$

ili, s obzirom na (4),

$$\begin{aligned} r^i &= \Psi^N g_{(N)i}^j r_N^j \\ u^i &= \Psi^N g_{(N)i}^j u_N^j \end{aligned} \quad (29)$$

pa bi to predstavljalo *invarijantan pristup* u izoparametarskoj formulaciji konačnih elemenata.

S druge strane, ako bi se izoparametarski koncept primenjivao na same skalarnе funkcije koje se pojavljuju u (24), odnosno u (25), onda bi se u krivolinijskim koordinatama imale sledeće interpolacione formule:

$$\begin{aligned} x^i &= \Psi^N x_N^i \\ u^i &= \Psi^N u_N^i \end{aligned} \quad (30)$$

odnosno,

$$\begin{aligned} r^i &= \Psi^N r_N^i \\ u^i &= \Psi^N u_N^i \end{aligned} \quad (31)$$

što bi odlikovalo *skalarni pristup* u tom konceptu.

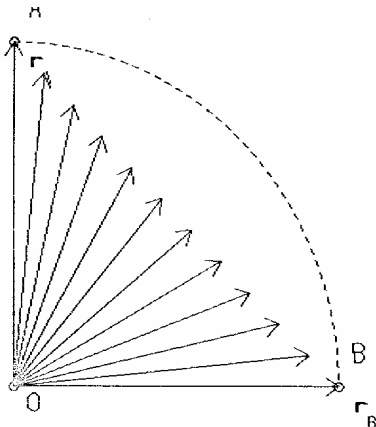
Ova dva pristupa se u geometrijskom pogledu razlikuju oblikom granica konačnih elemenata koji treba da aproksimiraju stvarnu konturu. Naime, dok se, ako je reč o četvoročvornom elementu, u invarijantnom pristupu uvek radi o pravolinijskoj konturi elementa (bez obzira na upotrebljeni koordinatni sistem), dotle se u skalarnom pristupu kontura elementa menja zavisno od vrste upotrebljenih globalnih koordinata. Zaista, dok bi se u globalnim Dekartovim koordinatama u oba pristupa (zbog svođenja operatora paralelnog pomeranja na Kronekerove δ -simbole) interpolacijom vektora položaja \mathbf{r} između tačaka A i B ($|\mathbf{r}_A| = |\mathbf{r}_B|$) dobio deo prave između tih tačaka:

$$R^k = z^k = \Psi^A z_A^k + \Psi^B z_B^k \quad (32)$$

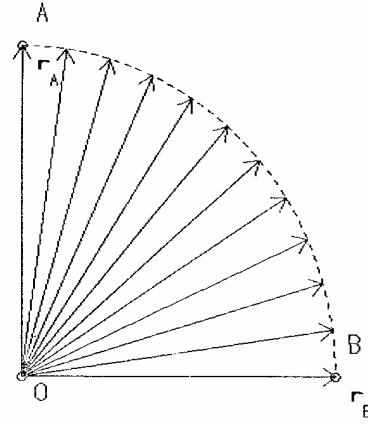
dotle bi se u polarnim koordinatama u invarijantnom pristupu opet dobila duž (sl.4), ali bi skalarni pristup sada dao odgovarajući deo kružnog luka (sl.5), jer je tada:

$$r^1 = \Psi^A r_A^1 + \Psi^B r_B^1 = (\Psi^A + \Psi^B) r_A^1 = r_A^1 \quad (33)$$

(zbog osobine interpolacionih funkcija da im je suma jednaka jedinici) i



SL.4



SL.5

$$r^2 = \Psi^A r_A^2 + \Psi^B r_B^2 = 0 \quad (34)$$

(zbog $r_A^2 = r_B^2 = 0$), što se i znalo budući da vektor položaja tačke stalno "pada" u pravac polarnog potega.

Treba napomenuti da su interpolacione funkcije Ψ^N za dvodimenzionalni četvoročvorni izoparametarski konačni element membrane bilinearne funkcije njegovih lokalnih konvektivnih (materijalnih) koordinata ξ^α ($\alpha=1,2$) oblika:

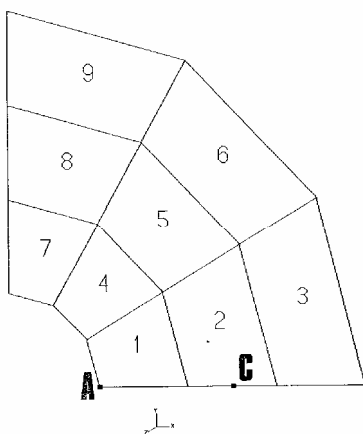
$$\begin{aligned} \Psi_1 &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 - \xi^2) \\ \Psi_2 &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 - \xi^2) \\ \Psi_3 &= \frac{1}{4}(1 + \xi^1)(1 + \xi^2) \\ \Psi_4 &= \frac{1}{4}(1 - \xi^1)(1 + \xi^2) \end{aligned} \quad (35)$$

Savijanje kružnog luka. Najuputnije je bilo da se rezultati analize jednom i drugom modifikacijom paketa STATA uporede na nekom jednostavnijem primeru za koji je poznato i analitičko rešenje. Izabrano je savijanje kružnog luka, a rešenje tog primera u zatvorenom obliku, može se naći u [16]. Reč je o štapu pravougaonog poprečnog preseka sa kružnom osom, koji je na jednom kraju uklješten. Unutrašnji i spoljašnji poluprečnik i debljina štapa su respektivno $r_u=5$, $r_s=20$ i $t=1$, a materijalne konstante su $E=1000$ i $\nu=0.3$. Analizirana su dva slučaja opterećenja: savijanje silom na kraju i tzv. čisto savijanje; u prvom slučaju na slobodnom kraju deluju radijalne površinske sile čija je rezultanta intenziteta 10, a u drugom slučaju spreg intenziteta 150.

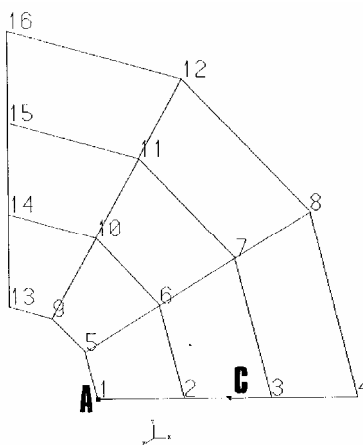
Skica strukture, u slučaju njene idealizacije mrežom od 3×3 četvoročvornih konačnih elemenata membrane, prikazana je na sl.6 (uz upisivanje brojeva konačnih elemenata), odnosno na sl.7 (uz upisivanje brojeva njihovih čvorova). Pri tom se radi o invarijantnom pristupu u polarnim koordinatama, pa otuda i pravolinijska kontura elemenata. No, kad je u pitanju skalarni pristup u polarnim koordinatama, kontura konačnih elemenata ima oblik prikazan na sl.8!

Međutim, bez obzira i na adekvatnije opisivanje geometrije strukture upotrebom krivolinijskih koordinata u skalarnom izoparametarskom pristupu, ipak se (v. rezultate proračuna u tabelama 1 i 2) nisu dobili bolji rezultati nego invarijantnim pristupom. Naprotiv, rezultati invarijantnog pristupa (koji se, kao što se vidi iz pomenutih tabela, podudaraju sa onima dobijenim uobičajenim

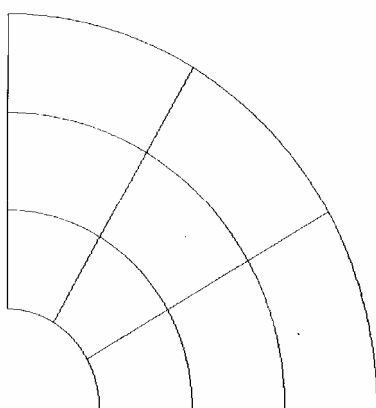
izoparametarskim pristupom u Dekartovim koordinatama, a što samo potvrđuje da je implementacija invarijantnog pristupa u paketu STATA za slučaj polarnih koordinata korektno izvršena) brže konvergiraju ka teorijskom rešenju. Prema tome, ovaj primer opovrgava valjanost opšteg tvrđenja o boljem aproksimiranju tenzorskih polja skalarnim pristupom nego doslednim invarijantnim postupkom. Osim toga, uzdrmana je i apriorna uverenost da bi već samo bolje "praćenje" stvarne konture strukture pri njenoj idealizaciji konačnim elementima trebalo da bude garancija i boljih rezultata.



SI.6



SI.7



SI.8

Tabela 1. Savijanje kružnog luka silom na kraju

mreža	Dekartove koordinate	polarne koordinate	
		(inv. aproks.)	(skal. aproks.)
1 × 1	-0.02039	-0.02039	-0.01730
2 × 2	-0.04200	-0.04200	-0.03370
3 × 3	-0.04908	-0.04908	-0.04312
4 × 4	-0.05233	-0.05233	-0.04848
5 × 5	-0.05425	-0.05425	-0.05170
6 × 6	-0.05550	-0.05550	-0.05376
7 × 7	-0.05636	-0.05636	-0.05513
8 × 8	-0.05699	-0.05699	-0.05609
9 × 9	-0.05745	-0.05745	-0.05679
10 × 10	-0.05780	-0.05780	-0.05730
teorijsko rešenje: $u_x^A = u_r^A = -0.06234$			

Tabela 2. Čisto savijanje kružnog luka

mreža	Dekartove koordinate	polarne koordinate	
		(inv. aproks.)	(skal. aproks.)
2 × 2	0.05399	0.05399	0.03940
4 × 4	0.05627	0.05627	0.04953
6 × 6	0.05697	0.05697	0.05366
8 × 8	0.05720	0.05720	0.05529
10 × 10	0.05737	0.05737	0.05614
teorijsko rešenje: $u_y^C = u_{\varphi}^C = 0.06354$			

Završna napomena

Prethodnim izlaganjem je ukazano na opasnost koja vrebava pri aproksimiranju tenzorskih polja – "guja u travi" novodobijenih, približnih polja krije se ispod "kamenja temeljca" aproksimativnih teorija, tj. skalarnog aproksimiranja koordinata polja. Naime, ako se odustane od principa invarijantnosti i usvoji skalarni pristup, lako se dođe u situaciju da se dobijene netenzorske veličine posmatraju i dalje kao tenzorski objekti, što nije prihvatljivo principski, a ne mora biti ni numerički povoljnije, kao što se vidi iz navedenog primera. Ako se još navedu Fligeove (Flügge) reči: "The general, noncartesian tensor is a much sharper thinking tool and, like other sharp tools, can be very beneficial and very dangerous, depending on how it is used. Much nonsense can be hidden behind a cloud of tensor symbols and much light can be shed upon a difficult subject." ([17], str. iv), onda se ovim prilogom samo potvrđuje mišljenje s koliko opreznosti treba koristiti tenzorski račun, pa makar se radilo i o nekim njegovim približenjima.

Literatura

- [1] ODEN, J.T. *Finite Elements of Nonlinear Continua*. New York, McGraw-Hill, 1972.
- [2] DRAŠKOVIĆ, Z. On invariance of finite element approximations. *Mechanika teoretyczna i stosowana*, 1988, vol.26, no.4, p.597-601.
- [3] ERICKSEN, J.L. *Tensor Fields*. Handbuch der Physik, Bd. III/1, Berlin - Göttingen - Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.
- [4] KRÄTZIG, W.B. *On the structure of consistent linear shell theories*. Amsterdam - New York - Oxford, Proc. 3rd IUTAM Symp. on Shell Theory, North-Holland, 1980.
- [5] TRUESDELL, C., TOUPIN, R.A. *The Classical Field Theories*. Handbuch der Physik, Bd. III/1, Berlin - Göttingen - Heidelberg, Springer-Verlag, 1960.
- [6] MORRIS, A.J. *A summary of appropriate governing equations and*

- functionals in the finite element analysis of thin shells, Finite Elements for Thin Shells & Curved Members.* London, John Wiley & Sons, 1976.
- [7] KARDESTUNCER,H. *Finite Elements Methods via Tensors.* Udine, Springer-Verlag & CISM, 1972.
- [8] BUDIANSKY,B.,SANDERS,J.L. *On the "best" first-order linear shell theory.* New York, Progress in Applied Mechanics, The Prager Anniv. Vol., Macmillan, 1963.
- [9] DRAŠKOVIĆ,Z. Visualization as a criterion of invariant finite element approximation naturalness. *Facta Universitatis, Series "Physics, Chemistry and Technology"* 1996, vol.1, no.3, p.237-239.
- [10] ZIENKIEWICZ,O.C.,TAYLOR,R.L. *The Finite Element Method.* London, McGraw-Hill, 1989.
- [11] DRAŠKOVIĆ,Z. Contribution to the invariant derivation of finite element equations of motion in curvilinear coordinates. *Facta Universitatis, Series "Mechanics, Automatic Control and Robotics"* 1995, vol.2, no.6, p.25-32.
- [12] BERKOVIĆ,M. *Thin shell isoparametric elements.* Bournemouth, Proc. II World Congress on Finite Element Methods, 1978.
- [13] BERKOVIĆ,M. *Thin shell analysis.* Portorož, Advanced Topics and New Developments in Finite Element Analysis, MARC Analysis Research Corporation, 1979.
- [14] BERKOVIĆ,M. Problemi analize tankih ljuski metodom konačnih elemenata. *Naučnotehnički pregled*, 1980, vol.XXX, no.1, p.3-18.
- [15] BERKOVIĆ,M.,DRAŠKOVIĆ,Z. *Structural analysis software for microcomputers.* Venice, Proc. Conference of Engineering Software for Microcomputers, 1984.
- [16] TIMOSHENKO,S.,GOODIER,J.N. *Theory of Elasticity.* New York - Toronto - London, McGraw-Hill, 1951.
- [17] FLÜGGE,W. *Tensor Analysis and Continuum Mechanics.* Berlin - Heidelberg - New York, Springer-Verlag, 1972.

Rad primljen: 1.12.1999.god.