UDK: 519.17:681.5(047)=861
COSATI: 12-01, 14-02

Algoritam za rešavanje grafova protoka Gausovom redukcijom

Dr Nenad Dodić, dipl.inž. [1)]

Grafovi protoka su korisno sredstvo za modeliranje i analizu linearnih sistema, naročito kada se njihovo rešavanje automatizuje primenom računara. Predstavljen je jednostavan, efikasan i potpuno formalan algoritam za rešavanje grafova protoka, zasnovan na Gausovoj redukciji, takav da se može neposredno realizovati na računaru. Algoritam, pored numeričkog, omogućuje i simboličko rešavanje grafova, što proširuje njegovu primenu i na dinamičke linearne sisteme.

Ključne reči: **Graf protoka, Gausova redukcija, algoritam, linearni sistem, simboličko rešavanje.**

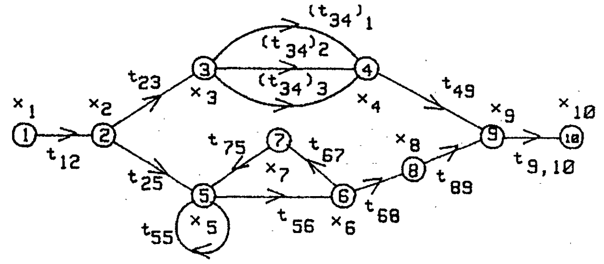
Uvod

TEORIJA grafova našla je široku primenu u nauci i tehnici, s obzirom da se grafovima može pregledno prikazati široka skala sistema i da je razrađen niz postupaka za rešavanje grafova, odnosno nalaženje veza i odnosa relevantnih veličina u sistemima predstavljenim grafovima. Automatizacija obrade podataka primenom računara danas je apsolutni imperativ, pa je stoga razvijen niz računarskih algoritama i programa za rešavanje grafova. Grafovi protoka su posebna klasa grafova, izuzetno pogodna za opis tehničkih sistema, kako u ustaljenom tako i u dinamičkom režimu rada. U radu će biti predstavljen efikasan računarski algoritam za rešavanje grafova protoka u opštem slučaju, zasnovan na Gausovoj (Gaus-Žordanovoj) metodi redukcije. Da bi se predloženi algoritam u potpunosti razumeo, u nastavku se daju osnovne definicije i osobine grafova protoka i njihovih elemenata.

Graf je dijagram sastavljen od skupa elemenata koji se nazivaju čvorovi i skupa njihovih veza, koje se nazivaju grane grafa. Čvorovi se označavaju kružićima s brojevima, a grane linijama. One se imenuju parovima brojeva (i,j), gde je i broj početnog, a j broj završnog čvora grane. Dva čvora mogu biti povezana većim brojem paralelnih grana $(i,j)_1$, $(i,j)_2$,... Petlja (i,i) je grana čiji se početni i završni čvor poklapaju. Kada su sve grane grafa uređene, tj. određeni su smerovi toka (označeni strelicama), taj graf je orijentisan.

Graf protoka je povezan orijentisan graf čijim su čvorovima pridružene promenljive x_i, i=1,2,... i čijim su granama (i,j), i,j=1,2,..., pridružene veličine t_{ij} koje se nazivaju prenosi grana - sl.1. Najvažnije osobine grafova protoka su [1]:

- promenljive x_i koje odgovaraju izvornim čvorovima (čvorovima u koje ne ulazi ni jedna grana) mogu uzimati proizvoljne vrednosti - to su nezavisne promenljive;
- signal kroz ma koju granu (i,j) jednak je proizvodu vrednosti polaznog čvora x_i i prenosa grane t_{ij}, tj. jednak je $t_{ij}x_i$;
- vrednost promenljive x_j, pri čemu j nije izvorni čvor, jednaka je zbiru ulaza u taj čvor.



Slika. 1. Primer grafa protoka

Iz ovih osobina sledi značajna relacija:

$$x_j = \sum_{i=1}^{n} t_{ij} x_i \tag{1}$$

gde je n broj čvorova u grafu i t_{ij}=0, ako ne postoji grana (i,j).

Prenosi grana grafova koji reprezentuju sistem u ustaljenom režimu rada, sa jednosmernim tokom signala, energije ili fluida, predstavljaju realne brojeve. Primer takvog sistema je električno kolo jednosmerne struje. U slučaju električnih kola naizmenične struje, sa kapacitivnim i induktivnim opterećenjima, prenosi grana mogu biti i kompleksni brojevi, pogodni za prikazivanje faznog pomaka električnih veličina. Ukoliko graf protoka opisuje dinamiku sistema, odnosno njegovo ponašanje u prelaznim režimima, prenosi grana su u opštem slučaju prenosne funkcije, odnosno racionalne funkcije kompleksne promenljive. Fizički posmatrano, grana grafa protoka predstavlja tok određene veličine, koja se na svom putu na određeni način transformiše, odnosno menja vrednost i (ili) karakter.

U nastavku će se rešavati problem određivanja prenosa T_{ik} puteva od bilo kog izvornog čvora i do proizvoljnog čvora k grafa protoka:

$$T_{ik} = \frac{x_k}{x_i}$$

[1)] Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

Gausova redukcija

Poznato je da Gausova redukcija sistema linearnih jednačina predstavlja transformaciju sistema. Sekvencijalnom eliminacijom međusobnih zavisnosti promenljivih, sistem se svodi na trougaoni oblik [2]. U slučaju grafova protoka, Gausova redukcija se obično svodi na eliminisanje svih petlji i zatvorenih kola u grafu (puteva koji počinju i završavaju se u istoj tački), nakon čega je lako odrediti sve željene prenose u grafu. Ovaj postupak opisan je u [3]. Ovde se Gausova redukcija primenjuje na poseban način, u cilju rešavanja postavljenog zadatka. Prvo se eliminišu paralelne grane, a zatim sve petlje. Potom se eliminišu sve grane, osim onih koje polaze iz izvornih čvorova. Nakon ovoga, svi čvorovi grafa povezani su jedino sa izvornim čvorovima, čime su određeni i prenosi od izvornih čvorova do svih ostalih čvorova grafa, jer je tada $T_{ij}=t_{ij}$, gde je i broj bilo kog izvornog čvora, a j broj bilo kog čvora koji nije izvorni.

Eliminisanje paralelnih grana

Eliminisanje paralelnih grana je jednostavno: paralelne grane $(i,j)_k$, sa prenosima $(t_{ij})_k$, k=1,2,..., se zamenjuju jednog granom (i,j), čiji je prenos:

$$t_{ij} = (t_{ij})_1 + (t_{ij})_2 + \dots \tag{2}$$

Eliminisanje petlji

Eliminisanju petlji se pristupa nakon eliminisanja paralelnih grana. Neka čvor j ima petlju (j,j) koja nije jedinična: $t_{jj}\neq 1$ (za slučaj jedinične petlje rešenje nije definisano). Eliminisanje petlji se svodi na primenu relacije (1) na čvor sa petljom:

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} t_{ij}x_i + t_{jj}x_j$$

odnosno,

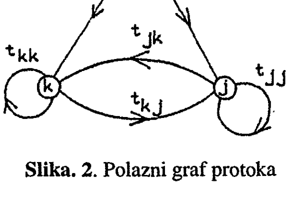
$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i \frac{t_{ij}}{1-t_{jj}}$$

S obzirom da se na desnoj strani prethodne relacije ne pojavljuje x_j, proizilazi da se smenjivanjem prenosa t_{ij}, i=1,2,...,n, grana koje ulaze u čvor sa petljom j, vrednostima:

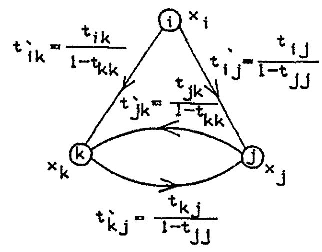
$$t_{ij}' = \frac{t_{ij}}{1-t_{jj}},\ i = 1,2,\dots,n,\ i \neq j \tag{3}$$

$$t_{jj}' = 0 \tag{4}$$

eliminiše petlja (j,j). Sl.2 prikazuje graf sa dve petlje, a sl.3 isti graf nakon eliminacije petlji.



Slika. 2. Polazni graf protoka



Slika. 3. Graf nakon eliminacije petlji

Eliminisanje grana koje ne polaze iz izvornog čvora

Neka je (j,k) grana koju treba eliminisati, pri čemu j nije izvorni čvor. U tom slučaju relacija (1), primenjena na čvor k, glasi:

$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} t_{ik}'x_i + t_{jk}'x_j \tag{5}$$

S obzirom da je:

$$x_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} t_{ij}'x_i$$

ekvivalentan oblik relacije (5) je:

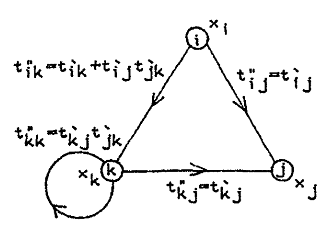
$$x_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i\neq j}}^{n} x_i(t_{ik}' + t_{ij}'t_{jk}')$$

Pošto se na desnoj strani prethodne relacije ne pojavljuje x_j, proizilazi da se smenjivanjem prenosa t_{ik}, i=1,2,...,n grana koje ulaze u čvor k, vrednostima

$$t_{ik}'' = t_{ik}' + t_{ij}'t_{jk}',\ i = 1,2,\dots,n,\ i \neq j \tag{6}$$

$$t_{jk} = 0 \tag{7}$$

eliminiše grana (j,k). Primera radi, primenom smena (6), (7), eliminisana je grana (j,k) sa sl. 3. Slika 4 prikazuje graf nakon eliminacije grane (j,k). Može se primetiti da je eliminacijom ove grane stvorena dodatna petlja, koju treba eliminisati na prethodno opisan način, pre nego što se nastavi sa daljom redukcijom grafa. Višestrukim ponavljanjem postupka eliminacije grana koje ne vode iz izvornog čvora i novonastalih petlji dobija se graf koji sadrži samo grane koje vode od izvornih čvorova do ostalih čvorova grafa.



Slika. 4. Graf nakon eliminacije povratne grane

Računarski algoritam

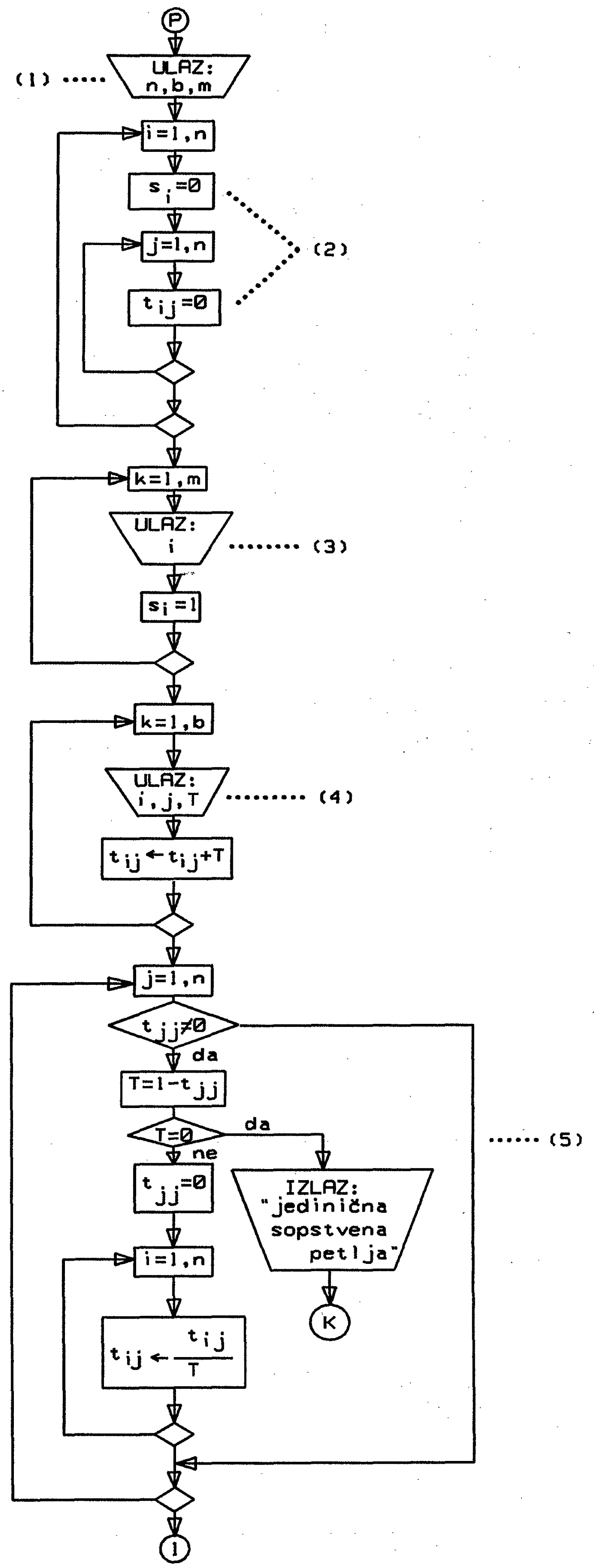
Na osnovu opisanog Gausovog postupka redukcije grafa, sintetizovan je formalan računarski algoritam za određivanje prenosa između bilo koje dve tačke grafa protoka, koji može imati proizvoljan broj čvorova i proizvoljan broj grana. Broj izvornih čvorova takođe je proizvoljan. Dozvoljeno je potpuno proizvoljno označavanje čvorova brojevima, što znači da ni jedan izvorni čvor ne mora da ima broj 1. Svi izvorni čvorovi moraju se specificirati.

Algoritam za rešavanje grafa protoka glasi:

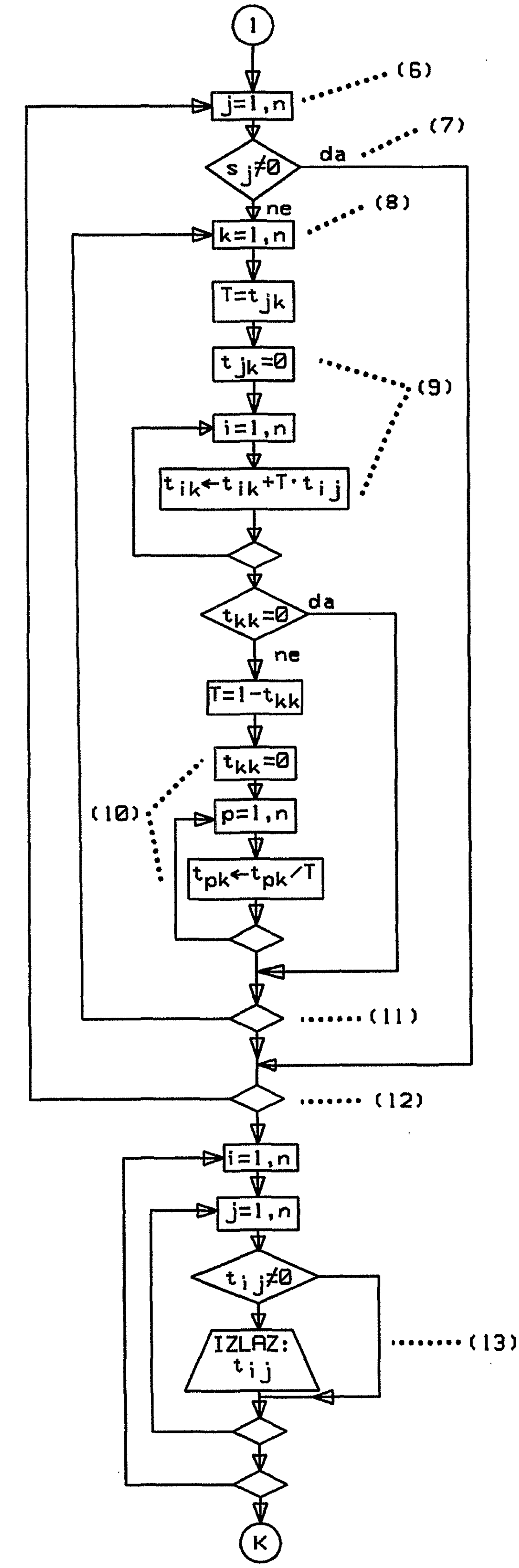
1. Zadaju se: n - broj čvorova grafa, b - broj grana i m - broj izvornih čvorova.
2. Anuliraju se varijable t_{ij}, i,j=1,2,...,n za pamćenje prenosa grana i varijable s_k, k=1,2,...,m za pamćenje statusa čvora.
3. Unose se statusi čvorova: s_j=1 - ako je čvor j izvorni čvor ili s_j=0 - ako čvor j nije izvorni, za j=1,2,...,n.
4. Za svaku postojeću granu grafa unosi se broj početnog čvora (i), završnog čvora (j) i prenos (t_{ij}). Tokom unošenja, paralelne grane se eliminišu, tako što se njihovi prenosi sabiraju (2), čime se, umesto više paralelnih grana, dobija jedna - ekvivalentna grana.
5. Eliminišu se sve petlje iz grafa, korišćenjem smena (3), (4). Ukoliko postoji jedinična petlja, za koju postupak rešavanja grafa nije definisan, algoritam se prekida, uz odgovarajuću poruku korisniku.
6. Usvaja se broj čvora j=1.
7. Ako je j izvorni čvor (s_j≠0), broj čvora j se povećava za jedan. Postupak povećavanja broja j se nastavlja sve dok se ne dođe do čvora koji nije izvorni (s_j=0). Ako je j>n ide se na tačku 13. U protivnom, pristupa se eliminisanju grana koje vode od čvora (j), tj. ide se na narednu tačku - tačku 8.
8. Usvaja se k=1.
9. Primenom smena (6), (7) eliminiše se grana (j,k), kao grana koja povezuje dva čvora grafa, s tim što polazni čvor j nije izvorni čvor. Ostale grane, kojima je čvor k završni čvor, dobijaju nove vrednosti, u skladu sa (6).
10. Proverava se da li je primenom (6) u tački 9 nastala petlja (k,k), odnosno da li je t_{kk}≠0. Ako jeste, ona se eliminiše - primenom smena (3), (4) za tačku k.
11. Vrednost k se uvećava za jedan. Ako je k≤n ide se na tačku 9. U protivnom, ide se na narednu tačku - tačku 12.
12. Vrednost j se uvećava za jedan. Ako je j>n postupak redukcije je završen - ide se na tačku 13. U suprotnom, ide se na tačku 7.
13. Štampaju se oni prenosi T_{ij}=t_{ij} koji nisu jednaki nuli, za i,j=1,2,...,n.

Transformacijom grafa datim algoritmom dobija se graf u kome su svi čvorovi povezani jedino sa izvornim čvorovima, dok su grane koje međusobno povezuju čvorove koji nisu izvorni eliminisane. Ovakav graf je ekvivalentan polaznom u smislu da promenljive x_i, i=1,2,...,n, pridružene čvorovima imaju identične vrednosti u oba grafa. Ovo znači da prenosi t_{ij} grana, koje nisu eliminisane navedenim postupkom, u stvari predstavljaju prenose puteva od izvornih čvorova do ostalih čvorova polaznog grafa, čime je prethodno postavljeni zadatak rešen.

Dijagram toka predloženog algoritma, na osnovu koga se može neposredno formirati računarski kod, prikazan je na slikama 5 i 6. Radi lakšeg praćenja toka, brojevima u zagradama označene su odgovarajuće tačke (koraci) opisanog algoritma.



Slika 5. Dijagram toka algoritma - 1. deo



Slika 6. Dijagram toka algoritma - 2. deo

Simboličko rešavanje grafova protoka

Opisani algoritam namenjen je grafovima, kod kojih prenosi svih grana imaju konkretne brojčane vrednosti (realni ili kompleksni brojevi). U slučaju dinamičkog linearnog sistema, kada prenosi u opštem slučaju predstavljaju prenosne funkcije, rezultat redukcije treba da budu prenosne funkcije koje odgovaraju putevima između ulaznih i izlaznih (specificiranih) čvorova sistema. One se mogu dobiti ukoliko se opisani algoritam primeni simbolički.

Simboličko rešavanje grafa podrazumeva da se prenosi grana ne unose kao konkretne brojčane vrednosti, već kao literali (stringovi, nizovi znakova), koji sadrže određene znakove. Ti literali mogu biti imena prenosnih funkcija ili čak njihovi kompletni zapisi (što treba izbegavati, jer smanjuje preglednost rezultata). Umesto operacija nad brojevima, vrše se operacije nad literalima - nadovezuju jedan na drugi po odgovarajućem redosledu, a između njih se umeću simboli za aritmetičke operacije (sabiranje, množenje, deljenje).

U prilogu je dat listing programa pisanog računarskim jezikom BASIC, koji simbolički rešava graf protoka proizvoljnog linearnog dinamičkog sistema. Simbol "&" označava sabiranje stringova. Karakteri (znakovi) iza znaka uzvika (!) predstavljaju komentar. Sledeći primer ilustruje rad ovog programa.

Primer: Prenosi grana grafa prikazanog na sl. 1 unose se u obliku sledećih literala: "t12", "t23","t25", "(t34)1", "(t34)2", " (t34)3", "t49", "t56", "t67", "t68", "t75", "t89", "t9,10". Prenos od izvornog čvora 1 do izlaznog čvora 10 program prikazuje u obliku:

T(1,10)=((t12)*(t23)*((t34)1+(t34)2+(t34)3)*(t49)+((t12)*(t25)/(1-(t55))*(t56)*(t68)+(t12)*(t25)/ (1-(t55))*(t56)* (t67)/(1-(t75)/(1-(t55))*(t56)*(t67))*(t75)/(1-(t55))*(t56)* (t68))*(t89))*(t9,10)

Rešenje prepisano u preglednijem obliku glasi:

$$T_{1,10} = \{t_{12}t_{23}\left[(t_{34})_1 + (t_{34})_2 + (t_{34})_3\right]t_{49} + \Big(\frac{t_{12}t_{25}t_{56}t_{68}}{1-t_{55}} + \frac{t_{12}t_{25}t_{56}t_{67}}{1-t_{55}} \cdot \frac{t_{75}}{1-\frac{t_{75}t_{56}t_{67}}{1-t_{55}}} \cdot \frac{t_{56}t_{68}}{1-t_{55}}\Big) t_{89}\} \, t_{9,10}$$

Zaključak

Predstavljeni algoritam omogućuje efikasno i jednostavno rešavanje grafova protoka, koji nemaju jediničnih petlji. Značajna prednost ovog algoritma je što se može realizovati simbolički, tako da daje prenose grafova u opštem obliku, što je naročito bitno za grafove dinamičkih sistema. Ukoliko graf ima jediničnih petlji, za određivanje prenosa može se upotrebiti na primer Masonova formula [4], koja je računski znatno obimnija i nepogodna za simboličko rešavanje grafova.

Literatura

[1] LORENS,C. *Flow Graph for the Modeling and Analysis of Linear Systems*. McGraw-Hill, New York 1964.

[2] LEDERMANN,W. *Handbook of Applicable Mathematics*. vol.3 - Numerical Methods, John Wiley and Sons, Chichester 1981.

[3] WHITEHOUSE,G. *System Analysis and Design Using Network Techniques*. Prentice-Hall, Englewood Cliffs, New Jersey 1973.

[4] MASON,S. Feedback Theory - Some Properties of Signal Flow Graphs. *Proc. IRE*, 1953, vol.41, no.9.

PRILOG:Listing BASIC programa za simboličko rešavanje grafova protoka

```
10 DIM t$(20,20)[800],T_$(800),s(20)
20 PRINT "UNETI BROJ CVOROVA, BROJ
   IZVORNIH CVOROVA I BROJ GRANA"
30 INPUT n,m,b
35 ! Anuliranje varijabli za unos podataka
40 FOR i=1 TO n
50 s(i)=0
60 FOR j=1 TO n
70 t$(i,j)=""
80 NEXT j
90 NEXT i
100 PRINT "UNETI BROJEVE IZVORNIH
    CVOROVA"
105 ! Unose se brojevi izvornih čvorova i statusima
    izovrnih čvorova dodeljuje vrednost 1
110 FOR k=1 TO m
120 INPUT i
130 s(i)=1
140 NEXT k
150 PRINT "ZA SVAKU GRANU UNETI POCETNI,
    ZAVRSNI CVOR I PRENOS GRANE (KAO
    LITERAL)"
160 FOR k=1 TO b
165 ! Zadaje se početni, završni čvor i prenos svake
    grane
170 INPUT i,j,T_$
175 ! U toku samog unošenja podataka sabiraju se
    prenosi paralelenih grana
180 IF t$(i,j)<>"" THEN
    t$(i,j)=t$(i,j)&"+"&T_$
190 IF t$(i,j)="" THEN t$(i,j)=T_$
200 NEXT k
210 FOR i=1 TO n
220 FOR j=1 TO n
235 ! Korektan simbolički zapis prenosa grafa zahteva
    da se prenosi grana pišu u zagradama
230 IF t$(i,j)<>"" THEN
    t$(i,j)="("&t$(i,j)&")"
240 NEXT j
250 NEXT i
255 ! Eliminišu se sve petlje (linije 260-330)
260 FOR j=1 TO n
270 IF t$(j,j)="" THE NEXT j
280 T_$="(1-"&t$(j,j)&")"
290 t$(j,j)=""
300 FOR i=1 TO n
310 IF t$(i,j)<>"" THEN
    t$(i,j)=t$(i,j)&"/"&T_$
320 NEXT i
330 NEXT j
340 FOR j=1 TO n
345 ! Traži se čvor koji nije izvorni
350 IF s(j)<>0 THEN NEXT j
355 ! Eliminišu se grane koje polaze od čvora koji nije
    izvorni
360 FOR k=1 TO n
370 T_$=t$(j,k)
380 t$(j,k)=""
390 FOR i=1 TO n
400 IF t$(i,k)="" AND T_$<>"" AND t$(i,j)<>"" THEN
    t$(i,k)=t$(i,j)&"*"&T_$
410 IF t$(i,k)<>"" AND T_$<>"" AND t$(i,j)<>"" THEN
    t$(i,k)="("&t$(i,k)&"+"&t$(i,j) &"*"&T_$&")"
420 NEXT i
425 ! Proverava se da li je eliminacijom grana nastala
    petlja. Ako jeste, ona se eliminiše
430 IF t$(k,k)="" THEN NEXT k
440 T_$="(1-"&t$(k,k)&")"
450 t$(k,k)=""
455 FOR p=1 TO n
460 IF t$(p,k)<>"" THEN t$(p,k)=t$(p,k)&"/"&T_$
470 NEXT p
480 NEXT k
490 NEXT j
505 ! Ispisuju se prenosi od izvornih do ponornih čvo-
    rova
500 PRINT "REZULTATI:"
510 FOR i=1 TO n
520 FOR j=1 TO n
530 IF t$(i,j)="" THE NEXT j
540 PRINT "T(";i;",";j;")=";t$(i,j)
550 NEXT j
560 NEXT i
570 END
```

Rad primljen: 27.10.1999.god.