

UDK: 621.833.61(047)=861  
COSATI: 13-09

## Analiza stabilnosti planetarnog prenosnika

Dr Katica (Stevanović) Hedrih, dipl.inž.<sup>1)</sup>  
Mr Rade Knežević, dipl.inž.<sup>2)</sup>

U radu su prikazani rezultati izučavanja stabilnosti planetarnog prenosnika. Analizirana je stabilnost ravnotežnog stanja kao i stabilnost pomoću diferencijalnih jednačina prve aproksimacije za amplitude i faze, dobijene asimptomatskom metodom, sa kojima je izvršen numerički eksperiment. Za izabrani prenosnik sastavljene su integralne krive u trodimenzionalnom faznom prostoru, fazne trajektorije u projektovanoj faznoj ravni, dijagrami amplituda-vreme, faza-vreme, elongacija-vreme i brzina-vreme za različite frekvencije oscilovanja i različite amplitude pri određenoj frekvenciji. Izvedeni su zaključci o stabilnosti prenosnika i dat je kompjuterski program urađen u MATLAB-u.

*Ključne reči:* Stabilnost, planetarni prenosnik, faza, fazna ravan, fazne trajektorije, amplituda, elongacija.

### Uvod

AKO se stvarno kretanje podudara sa određenim zakonom kretanja, onda se takvo kretanje naziva *neporemećeno kretanje*, za razliku od svih drugih kretanja koja će se u daljem tekstu nazivati *poremećeno kretanje* [1]. Odstupanja poremećenog kretanja od neporemećenog kretanja nazivaju se *poremećaj*. Pod poremećajem može se podrazumevati i otklon sistema od ravnotežnog položaja, a oscilatorno kretanje poremećenim stanjem ravnoteže sistema. Zadatak proučavanja odstupanja poremećenih kretanja od neporemećenih stvarnih i zadatih, pripada oblasti koja se naziva *stabilnost kretanja*.

Kriterijume stabilnosti ravnoteže tela koja se nalaze u polju Zemljine teže, u opštem obliku formulisao je davne 1644. godine E.Torricelli, a 1788.godine J.L.Lagrange je postavio teoremu. Po toj teoremi konzervativni sistem ima stabilan položaj ravnoteže ako u tom ravnotežnom položaju potencijalna energija sistema ima izolovan minimum. Dokaz ove teoreme dao je G.Lejeune-Dirichlet. Dalji doprinos dao je E.I.Routh razvijajući ne samo teoriju stabilnosti ravnotežnog stanja već i kretanja. W.T.Thomson, P.Tait, N.E.Žukovski i dr. su dali značajne doprinose teoriji stabilnosti kretanja.

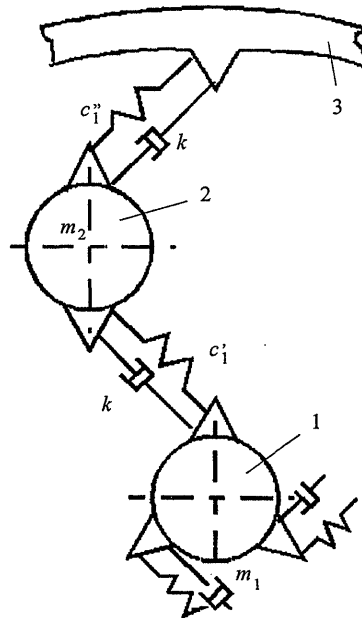
Nesumnjivo najveći doprinos teoriji stabilnosti kretanja dao je ruski matematičar A.M.Ljapunov, koji je formulisao originalne definicije više vrsta stabilnosti i priložio opšte metode ispitivanja stabilnosti. Najznačajniji doprinos je dao svojom magistarskom tezom. Ljapunovljevu metodu su prihvatili i razvijali mnogi naučnici i ona danas predstavlja aktuelnu istraživačku temu.

U radu je ispitivana dinamička stabilnost planetarnog prenosnika, koji je predstavljen dinamičkim modelom od više masa i elemenata. Za takav model određena je potencijalna i kinetička energija, funkcija rasipanja, zatim su sastavljene diferencijalne jednačine kretanja. Asimptomatskom metodom diferencijalne jednačine kretanja su prevedene na sistem diferencijalnih jednačina prve aproksimacije. Analizirana je stabilnost ravnotežnog i stacionarnog stanja. Nu-

meričkom integracijom dobijeni su dijagrami amplituda-vreme, faza-vreme, integralne krive u trodimenzionalnom faznom prostoru i fazne trajektorije projektovane na faznu ravan.

### Opis dinamičkog modela i jednačine kretanja

Analiza je urađena na planetarnom reduktoru ugrađenom na pogonskom mostu ULT-160. Ovaj planetarni reduktor predstavljen je dinamičkim modelom (sl.1.), gde je: 1-sunčev zupčanik, 2-sateliti i 3-venačni zupčanik (epicikl).



Slika 1. Ekvivalentni model planetarnog reduktora

Kod ovog dinamičkog modela uzeta je u proračun krutost mehaničkog kontakta zuba (predstavljena je oprugom i usmerena je duž linije zahvata), prigušenje pri tom zahvatu

<sup>1)</sup> Mašinski fakultet, 18000 Niš, Beogradska bb

<sup>2)</sup> Viša tehnička tehnološka škola, 17500 Vranje, F.Filipovića 20

i poremećajni faktori koji su predstavljeni dodatim ekscentričnim masama. Na sistem djeluju poremećaji, ulazni i izlazni momenti.

U [4] je detaljno objašnjen model, postupno su izvedeni izrazi za potencijalnu i kinetičku energiju, funkciju rasipanja i izvedene su diferencijalne jednačine kretanja sistema. U radu će biti prikazani samo konačni izrazi.

Potencijalna energija sistema je:

$$E_p = mg[(r_1 + r_2)(1 + \cos \varphi_h) + r_1(1 - \cos \varphi_1)] + \frac{c_1'}{2}(2r_1\varphi_1 - 2r_h\varphi_h)^2 + \frac{c_1''}{2}(r_1\varphi_1)^2 + \frac{c_2}{4}[(2r_1\varphi_1 - 2r_h\varphi_h)^4 + (r_1\varphi_1)^2] \quad (1)$$

Funkcija rasipanja je:

$$\phi = k\left[2(r_1\varphi_1 - r_h\varphi_h)^2 + \frac{1}{2}(r_1\varphi_1)^2\right] \quad (2)$$

Kinetička energija sistema je:

$$E_k = \frac{1}{2}\left\{\left(I_1 + m_1r_1^2 + 3I_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\right)\dot{\varphi}_1^2 + \left[I_h + (3M_2 + m_2)r_h^2 + 3I_2\frac{r_h^2}{r_2^2}\right]\dot{\varphi}_h^2 - 6I_2\frac{r_hr_1}{r_2^2}\dot{\varphi}_h\dot{\varphi}_1\right\} \quad (3)$$

gde je:  $M_2$  - masa satelita,  $m = m_1 = m_2$  - dodate ekscentrične mase (poremećajni faktori);  $I_1, I_2$  i  $I_h$  - aksijalni momenti inercije masa sunčevog zupčanika, satelita i nosača satelita;  $r_1, r_2$  i  $r_h$  - osnovni poluprečnici sunčevog zupčanika, satelita i nosača satelita; generalisane koordinate su  $\varphi_1$  i  $\varphi_h$  - ugao zakretanja sunčevog zupčanika i nosača satelita;  $c_1'$  - sumarni koeficijent krutosti zahvata sunčevog zupčanika i satelita;  $c_1''$  - sumarni koeficijent krutosti zahvata satelita i epickla;  $c_2$  - koeficijent "nelinearnosti" krutosti zahvata i  $k$  - sumarni koeficijent prigušenja.

Diferencijalne jednačine kretanja sistema planetarnog prenosnika su:

$$A\ddot{\varphi}_1 + D\ddot{\varphi}_h + (mgr_1 + 4c_1'r_1^2 + c_1''r_1^2)\varphi_1 - 4c_1'r_hr_1\varphi_h = mgr_1\frac{\varphi_1^3}{6} - c_2[16r_1(r_1\varphi_1 - r_h\varphi_h)^3 + r_1^4\varphi_1^3] - k[4r_1(r_1\dot{\varphi}_1 - r_h\dot{\varphi}_h) + r_1^2\dot{\varphi}_1] + M_1 \cos \Theta \quad (4)$$

$$D\ddot{\varphi}_1 + B\ddot{\varphi}_h + (4c_1'r_h^2 - mgr_h)\varphi_h - 4c_1'r_1r_h\varphi_1 = -mgr_h\frac{\varphi_h^3}{6} - 16c_2r_h(r_h\varphi_h - r_1\varphi_1)^3 - 4kr_h(r_h\varphi_h - r_3\varphi_1)^3 + M_h \cos \Theta$$

gde su uvedene oznake:

$$A = \frac{1}{2}\left[I_1 + m_1r_1^2 + 3I_2\frac{r_1^2}{r_2^2}\right] \\ B = \left[I_h + (3M_2 + m_2)r_h^2 + 3I_2\frac{r_h^2}{r_2^2}\right] \\ D = -3I_2\frac{r_hr_1}{r_2^2}$$

$M_1$  i  $M_h$  - amplitude prinudnih momenata na ulaznom i izlaznom vratilu,  $d\Theta/dt$  - frekvencija prinudnih momenata.

### Stabilnost ravnotežnog položaja sistema

Cilj istraživanja je da se, ne sastavljajući diferencijalne jednačine poremećenog kretanja, nađu opšti kriterijumi stabilnosti i nestabilnosti nekih posebnih kretanja sistema.

Položaj sistema  $\varphi_0$ , u kome može ostati neograničeno dugo, zove se ravnotežni položaj. Kada veze ne zavise od vremena, položaj sistema određen tačkom  $\varphi_0$  konfiguracione mnogostrukosti je ravnotežni, ako:

$$\varphi(t_0) = \varphi_0 \text{ i } \dot{\varphi}(t_0) = 0 \Rightarrow \varphi(t) = \varphi_0, \dot{\varphi}(t) \equiv 0, t \geq t_0$$

Ako se uzme da generalisane sile (nepotencijalne) ne zavise eksplicitno od vremena, onda se za početni trenutak može uzeti  $t_0 = 0$ .

Iz definicije ravnotežnog položaja, i pri opisu kretanja sistema Lagrangeovim jednačinama II vrste, lako je pokazati da je:

$$-\frac{\partial \Pi(\varphi_0)}{\partial \varphi} + Q(\varphi_0, 0) = 0$$

potreban i dovoljan uslov da položaj  $\varphi_0$  bude ravnotežni.

Za ilustrovani primer potencijalna energija je data jednačinom (1). Prvi izvodi potencijalne energije po generalisanim koordinatama su:

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_h} = -mg(r_1 + r_2)\sin \varphi_h + 4c_1'r_h(r_h\varphi_h - r_1\varphi_1) + 16c_2r_h(r_h\varphi_h - r_1\varphi_1)^3 = 0 \quad (5)$$

i jednak je nuli za  $\varphi_1 = \varphi_h = 0$  i  $\varphi_h = n\pi$ ;  $\varphi_1 = n\pi r_h / r_1$ .

$$\frac{\partial E_p}{\partial \varphi_1} = mgr_1 \sin \varphi_1 + 4c_1'r_1(r_1\varphi_1 - r_h\varphi_h) + c_1''r_1^2\varphi_1 + 16c_2r_1(r_1\varphi_1 - r_h\varphi_h)^3 + c_2r_1^4\varphi_1^3 = 0 \quad (6)$$

i jednak je nuli za  $\varphi_1 = \varphi_h = 0$ .

Drugi izvodi potencijalne energije su:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_h^2} = -mg(r_1 + r_2)\cos \varphi_h + 4c_1'r_h^2 + 16c_2r_h(3r_h^3\varphi_h^2 - 6r_h^2\varphi_hr_1\varphi_1 + 3r_hr_1^2\varphi_1^2) \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_1^2} = mgr_1 \cos \varphi_1 + 4c_1'r_1^2 + c_2''r_1^2 + 16c_2r_1(3r_1^3\varphi_1^2 - 6r_1^2\varphi_1r_h\varphi_h + 3r_h^2r_1\varphi_h^2) \quad (7)$$

Za  $\varphi_1 = \varphi_h = 0$  drugi izvodi potencijalne energije su:

$$\frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_h^2} = -mg(r_1 + r_2) + 4c_1'r_h^2 \\ \frac{\partial^2 E_p}{\partial \varphi_1^2} = mgr_1 + 4c_1'r_1^2 + c_1''r_1^2 \quad (8)$$

Pošto su izrazi (8) veći od nule, znači da potencijalna energija u položaju ravnoteže ima minimum, što je uslov stabilnosti tih položaja ravnoteže.

### Analiza stabilnosti oscilovanja pomoću jednačina prve asimptotske aproksimacije

Za izučavanje stacionarnog režima oscilovanja nelinearnog sistema iskoristiće se diferencijalne jednačine prve ap-

roksimacije za amplitudu i fazu, koje su dobijene asimptotskom metodom. Za osnovne parametre ovog planetarnog reduktora:  $r_1 = 4.0375$  cm,  $r_2 = 4.675$  cm,  $r_h = 8.7125$  cm, masa satelita,  $M_2 = 4.246$  kg, aksijalni momenti inercije masa  $I_1 = 0.2728$  kgcm<sup>2</sup>,  $I_2 = 0.46398$  kgcm<sup>2</sup>,  $I_h = 17.9$  kgcm<sup>2</sup>, momenti spregova na ulazu (1) i izlazu (h) reduktora  $M_1 = 505000$  Ncm,  $M_h = 9485000$  Ncm, koeficijenti krutosti zupčanika u zahvatu  $c_1' = 2,91 \times 10^6$  N/cm,  $c_1'' = 1.81 \times 10^6$  N/cm, koeficijenti prigušenja  $k = 13$  Ns/cm,  $c_2 < 5\%$  c,  $m = 0.3$ kg, osnovna kružna frekvencija neporemećenog linearnog sistema  $\omega_1 = 3385.448$  s<sup>-1</sup>, odnosi amplituda oscilovanja neporemećenog sistema  $S_1^{(1)} = 1.815$ Sh<sup>(1)</sup>,  $S_1^{(2)} = 12.16$ Sh<sup>(2)</sup>, koji odgovaraju realnom objektu, sastavljen je sistem diferencijalnih jednačina za amplitudu i fazu u prvoj asimptotskoj aproksimaciji (vidi [4 i 5]):

$$\begin{aligned} \frac{da}{dt} &= -0.15a - \frac{220}{0.211(3385.44 + \nu)} \sin \psi \\ \frac{d\psi}{dt} &= 3385.44 - \nu + 11,3a^2 - \\ &\quad - \frac{220}{0.211a(3385.44 + \nu)} \cos \psi \end{aligned} \quad (9)$$

Radi ispitivanja stabilnosti stacionarnog stanja variraće se promenljive,  $a$  i  $\psi$ , amplituda i faza izučavanog harmonika u okolini njihovih stacionarnih vrednosti:

$$\begin{aligned} a &= a_0 + \delta a \\ \psi &= \psi_0 + \delta \psi \end{aligned} \quad (10)$$

gde su  $a_0$  i  $\psi_0$  stacionarne vrednosti amplitude i faze koje zadovoljavaju jednačine:

$$\begin{aligned} -a_0 - \frac{220}{0.211(3385.44 + \nu)} \sin \psi_0 &= 0 \\ 3385.44 - \nu + 11,3a_0^2 - \\ - \frac{220}{0.211(3385.44 + \nu)} \cos \psi_0 &= 0 \end{aligned} \quad (11)$$

Zamenom izraza (10) u (9) i korišćenjem (11), dobiju se jednačine po varijacijama:

$$\begin{aligned} \frac{d\delta a}{dt} &= -0.15\delta a - (A \cos \psi_0) \delta \psi \\ \frac{d\delta \psi}{dt} &= \left( 22,6a_0 - \frac{B \cos \psi_0}{a_0^2} \right) \delta a - \frac{B \sin \psi_0}{a_0} \delta \psi \end{aligned} \quad (12)$$

u kojima su uvedene oznake:

$$\begin{aligned} A &= \frac{220}{0,211(3385,44 + \nu)} \\ B &= \frac{220}{0,211a_0(3385,44 + \nu)} \end{aligned}$$

Karakteristična jednačina za sistem (12) ima oblik:

$$\begin{vmatrix} -0,15 - \lambda & -A \cos \psi_0 \\ \left( 22,6a_0 - \frac{B \cos \psi_0}{a_0^2} \right) & -\frac{B \sin \psi_0}{a_0} - \lambda \end{vmatrix} = 0 \quad (13)$$

Razvijajući determinantu (13) uz korišćenje jednačina (11) dobija se karakteristična jednačina:

$$\lambda^2 + L\lambda + M = 0 \quad (14)$$

gde su:

$$L = \frac{B \sin \psi_0}{a_0} + 0,15$$

$$M = 0,15 \frac{B \sin \psi_0}{a_0} + A \cos \psi_0 \left( 22,6a_0 - \frac{B \cos \psi_0}{a_0^2} \right)$$

Prema Ljapunovljevoj teoriji stabilnosti, dovoljan uslov za stabilnost posmatranog položaja sistema je negativnost realnih delova svih korena karakteristične jednačine (14). Ako bar jedan koren karakteristične jednačine ima pozitivni realni dio, posmatrano stacionarno stanje je nestabilno.

Ispitajmo karakter svih rešenja karakteristične jednačine (14).

1. Ako je  $L^2 - 4M > 0$ , rešenja;

$$\lambda_{1,2} = \frac{-L \pm \sqrt{L^2 - 4M}}{2}$$

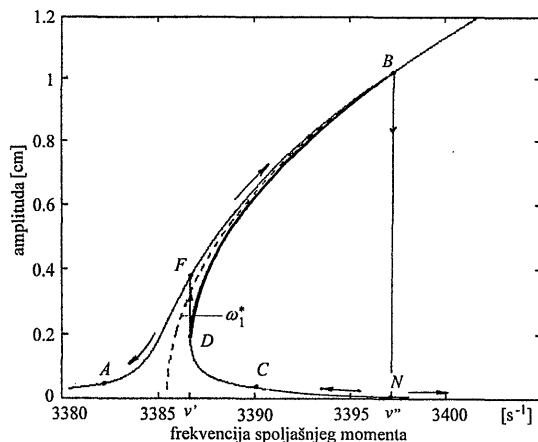
su realna, različita i negativna. Stacionarno stanje sistema je asimptotski stabilno.

2. Ako je  $L^2 - 4M = 0$ , postoji samo jedno rešenje  $\lambda = \frac{-L}{2}$ . Sistem je stabilan.

3. Ako je  $L^2 - 4M < 0$ , oba rešenja su konjugovano kompleksna sa negativnim realnim delom. Stacionarno stanje je asimptotski stabilno.

### Diskusija dijagrama numeričkog eksperimenta

Na sl.2 je prikazan amplitudno-frekventni dijagram stacionarnog stanja u okolini - rezonantnom opsegu kružne frekvencije  $\omega_1 = 3385.44$  s<sup>-1</sup>. Kriva crta-tačka predstavlja amplitudno-frekventnu skeletnu krivu. Tačka preseka skeletne krive sa krivom prinudnih oscilacija označena je sa B i može se nazvati *nelinearni rezonans*. Prema sl.2 očigledno je da svakoj vrednosti amplitude odgovaraju dve vrednosti frekvencije  $\nu_1$  i  $\nu_2$ , od kojih je  $\nu_1 > \omega_1^*$  a  $\nu_2 < \omega_1^*$  gde je sa  $\omega_1^*$  označena odgovarajuća vrednost na skeletnoj krivoj. Osim toga, svakoj vrednosti frekvencije  $\nu$  u intervalu ( $\nu', \nu''$ ) odgovaraju tri vrednosti amplitude. Punom tankom linijom izvučene su stabilne amplitude, a debelom nestabilne. U tački B, u slučaju daljeg povećavanja frekvencije, doći će do skokovitog pada amplitude u tačku N, a u slučaju smanjenja frekvencije prinudnih momenata amplituda će se menjati po krivoj NCD, dok će u tački D doći do skokovitog porasta i preći će u tačku F posle čega se menja po krivoj FA. To su fenomeni rezonantnih skokova.

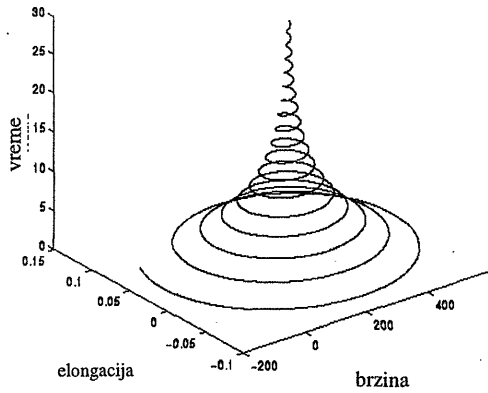


Slika 2. Amplitudno-frekventne krive stacionarnog rezonantnog režima nelinearnih oscilacija sa odgovarajućom skeletnom krivom i rezonantnim skokovima

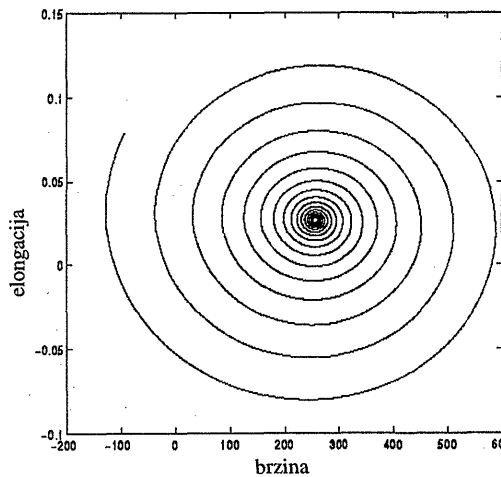
Za isti frekvencijski opseg oko rezonantne oblasti kružne frekvencije  $\omega_1 = 3385.44$  s<sup>-1</sup>, a za početne vrednosti

$a_0=0.046$  cm,  $\psi_0 = 1.5276$  rad,  $v_0 = 3382$  s<sup>-1</sup>, tj. za frekvenciju koja je manja od  $\omega_1$  (sl.2). Numeričkom integracijom sistema diferencijanih jednačina prve aproksimacije (9) dobijeni su numerički podaci pomoću kojih su sastavljeni dijagrami sa slika 3-8.

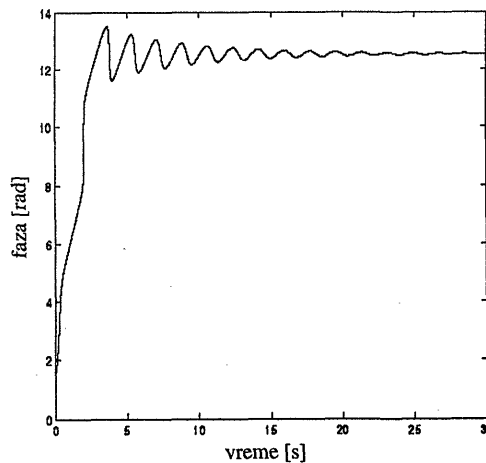
Na sl.3 je prikazana integralna kriva u trodimenzionalnom faznom prostoru, a na sl.4 fazne trajektorije u projektovanoj faznoj ravni.



Slika 3. Fazna trajektorija u faznom prostoru elongacija, brzina, vreme za slučaj stabilnog režima oscilovanja



Slika 4. Fazna trajektorija u faznoj ravni, elongacija, brzina, za slučaj sa sl.3

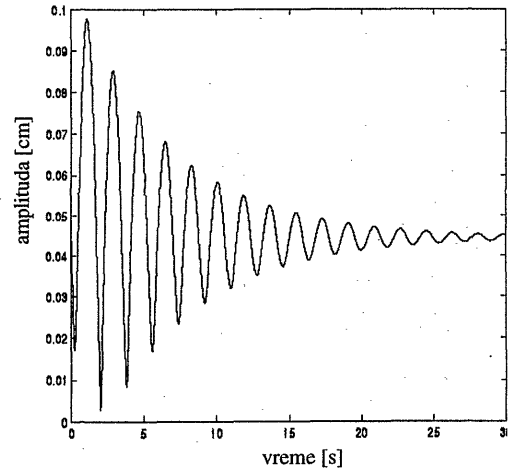


Slika 5. Kriva zavisnosti faze oscilovanja od vremena za nestacionarni režim

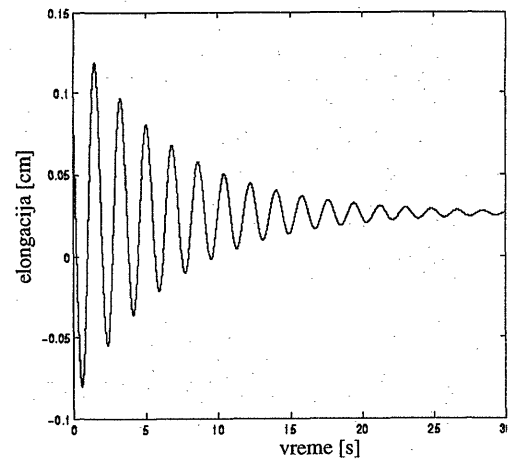
Posle kraćeg vremena efekat prigušenja uslovljava asimptotsku konvergenciju režima ka stacionarnom periodičnom procesu. To se zaključuje na osnovu karaktera

fazne trajektorije, iste singularne tačke, koja je stabilni centar. Reprezentativna tačka se u toku vremena kreće po faznoj trajektoriji kružeći oko singularne tačke tipa stabilnog centra. Fazna trajektorija pokazuje da se nakon konačnog vremena uspostavlja stacionarni režim.

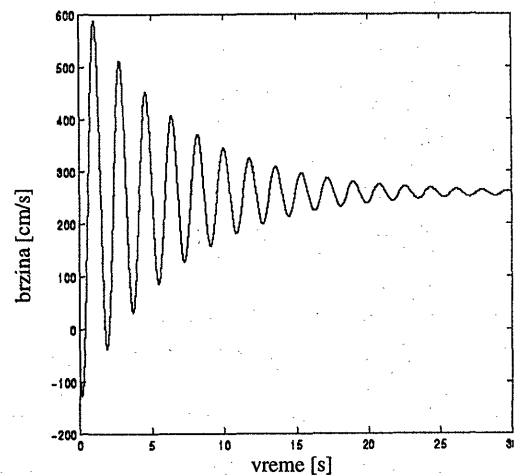
Prelazni režim oscilatornog procesa prikazan je i dijagramima faza-vreme (sl.5), amplituda-vreme (sl.6), elongacija-vreme (sl.7) i brzina-vreme (sl.8), sa kojih se vidi da se dinamički sistem prigušuje za određeno dovoljno dugačko konačno vreme.



Slika 6. Kriva zavisnosti amplituda oscilovanja od vremena za nestacionarni režim



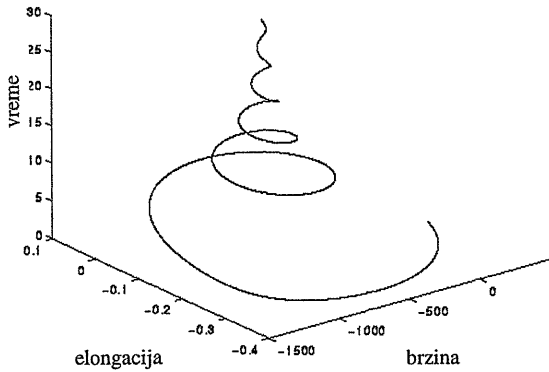
Slika 7. Kriva zavisnosti elongacije oscilovanja od vremena za nestacionarni režim



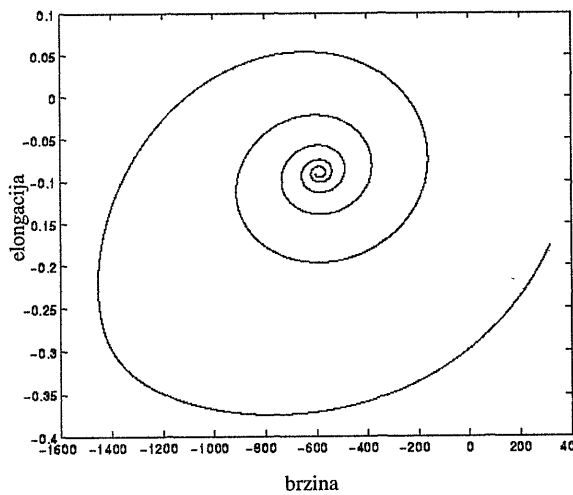
Slika 8. Kriva zavisnosti brzine oscilovanja od vremena za nestacionarni režim

Na slikama od 9 do 12 prikazani su odgovarajući prethodno analizirani dijagrami, ali za početne vrednosti  $a_0 = 0.11$  cm,  $\psi_0 = -1,4652$  rad i  $v_0 = 3387$  s<sup>-1</sup>, tj. za frekvenciju  $v' < v_0 < v''$  i za najmanju amplitudu.

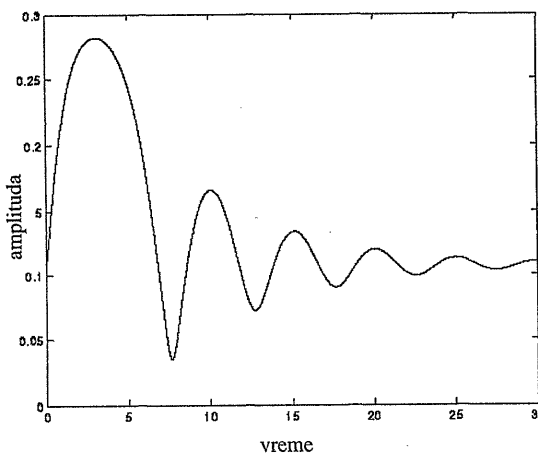
Dijagrami na sl. od 13 do 16 su odgovarajući, prethodno analizirani dijagrami - integralna trajektorija, fazne trajektorije, kao kinematički dijagrami kretanja za izmenjene početne uslove. Frekvencija je kao na sl. od 9 do 12, ali za početne vrednosti  $a_0 = 0.31$  cm i  $\psi_0 = -1.2594$  rad.



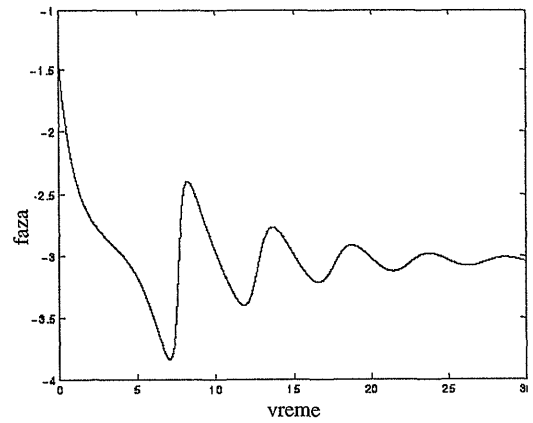
Slika 9. Fazna trajektorija u prostoru elongacija, brzina, vreme



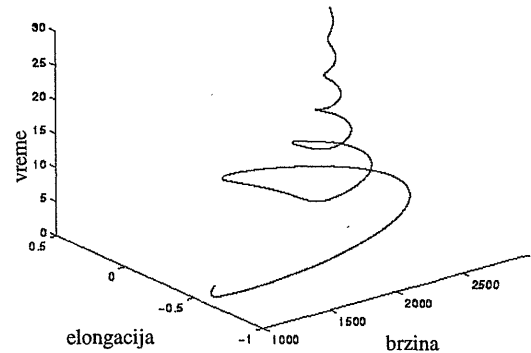
Slika 10. Fazna trajektorija u faznoj ravni elongacija-brzina, koja odgovara slučaju sa sl.9



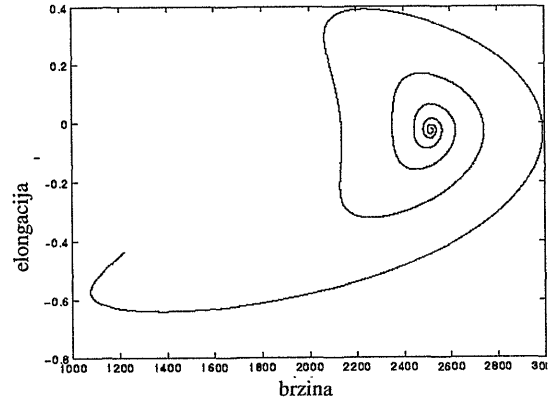
Slika 11. Grafički prikaz zavisnosti amplitude od vremena za nestacionarni režim oscilovanja za početne uslove za slučaj sa sl.9 i 10



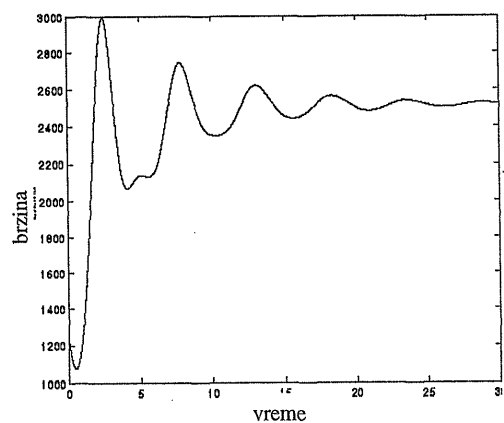
Slika 12. Grafički prikaz zavisnosti faze do vremena za nestacionarni režim oscilovanja za početne uslove za slučaj sa sl.9, 10 i 11



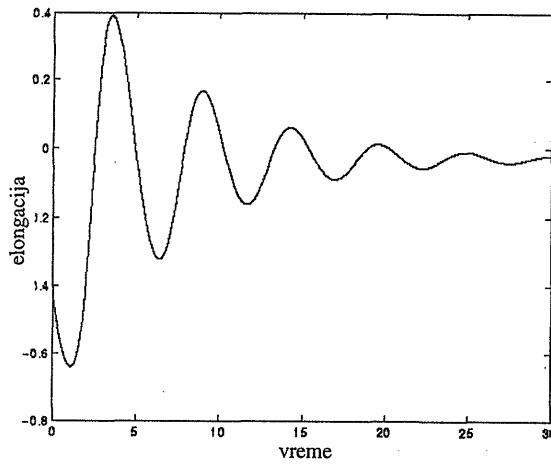
Slika 13. Fazna trajektorija u prostoru elongacija-brzina-vreme za promenjene početne uslove u odnosu na slučaj sa sl.9



Slika 14. Fazna trajektorija u faznoj ravni elongacija-brzina za promenjene početne uslove u odnosu na slučaj sa sl. 10, a koja odgovara slučaju sa sl.13

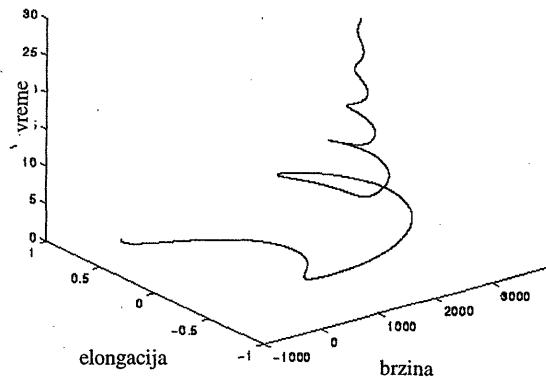


Slika 15. Grafički prikaz zavisnosti brzine od vremena za početne uslove iste kao na sl.13 i 14

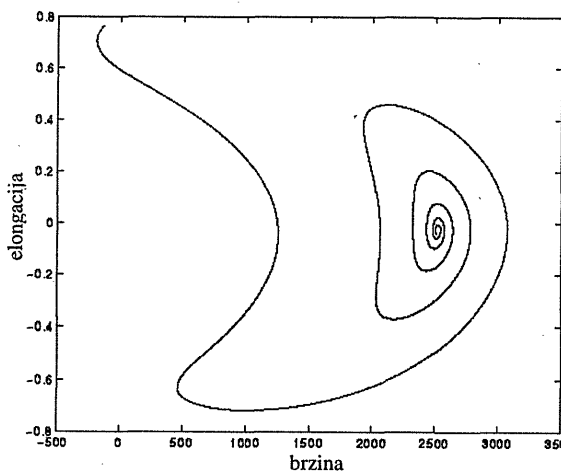


Slika 16. Grafički prikaz zavisnosti elongacije od vremena za slučajeve sa sl.13, 14 i 15

Na sl. od 17 do 20 su odgovarajući dijagrami za istu frekvenciju, ali za  $a_0 = 0.42$  cm i  $\psi_0 = 1.2432$  rad.

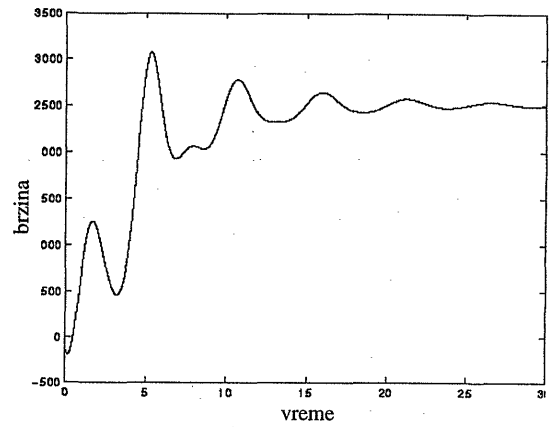


Slika 17. Fazna trajektorija u prostoru elongacija-brzina-vreme za promeњene početne uslove u odnosu na prethodno razmotrene

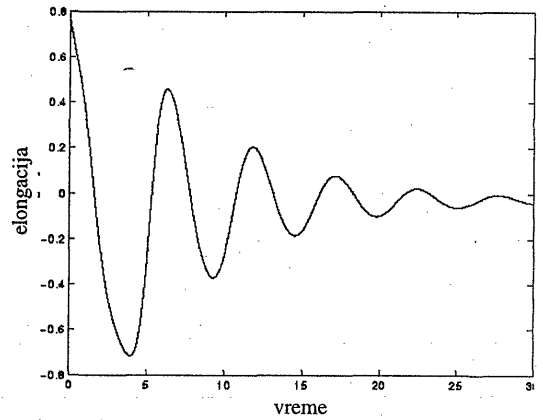


Slika 18. Fazna trajektorija u faznoj ravni elongacija-brzina, koja odgovara slučaju režima oscilovanja sa sl.17

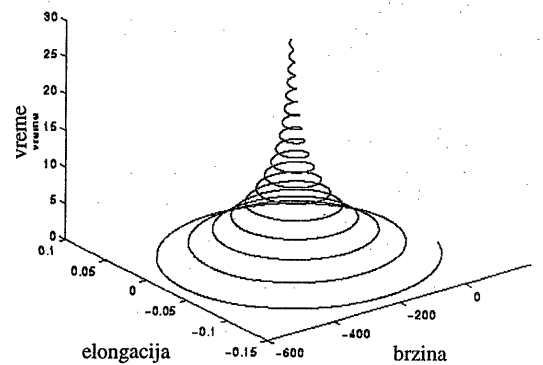
Dijagrami na sl. od 21 do 24 pokazuju integralnu krivu, faznu trajektoriju i kinematičke dijagrame u funkciji vremena za početne vrednosti frekvencije  $v_0 > v_3$ , tj. za  $v_0 = 3389$  s<sup>-1</sup>,  $a_0 = 0.044$  cm i  $\psi_0 = -1,5588$  rad, što odgovara radu prenosnika za područje van rezonantne oblasti.



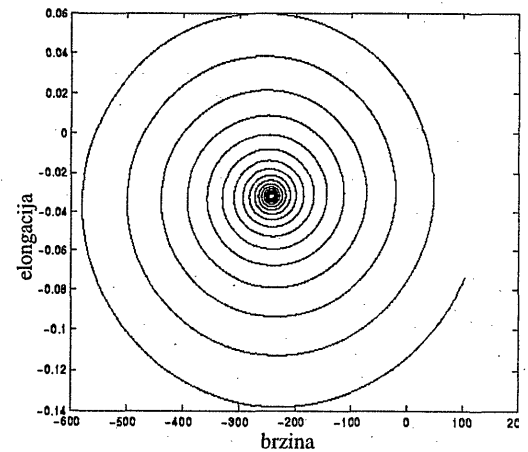
Slika 19. Grafički prikaz zavisnosti brzine od vremena na slučaj nelinearnih oscilacija sa sl.17 i 18



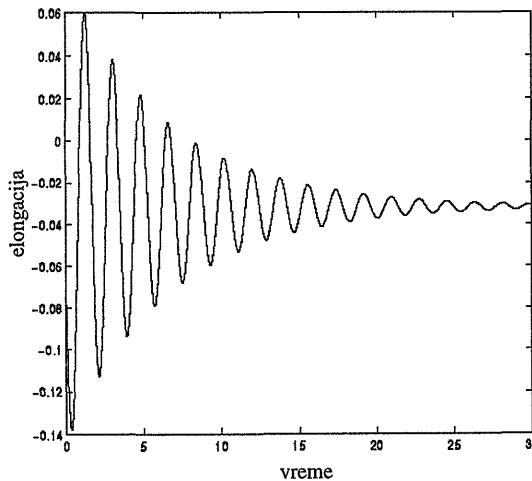
Slika 20. Grafički prikaz zavisnosti elongacije od vremena za slučaj nelinearnih oscilacija koji odgovara faznoj trajektoriji sa sl. 17, odnosno sl.18



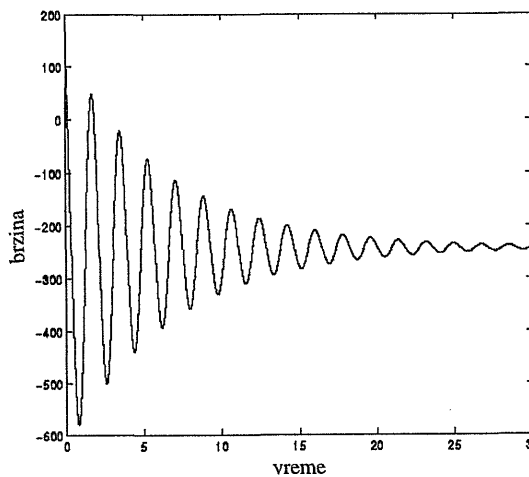
Slika 21. Fazna trajektorija u prostoru elongacija-brzina-vreme za nove početne uslove u odnosu na prethodno razmotrene



Slika 22. Fazna trajektorija u faznoj ravni elongacija-brzina koja odgovara slučaju sa slike br.21



Slika 23. Grafički prikaz zavisnosti elongacije od vremena koji odgovara slučajevima sa sl.21 i 22



Slika 24. Grafički prikaz zavisnosti brzine od vremena, koji odgovara početnim uslovima istim kao i u slučajevima sa sl.21 i 22

### Zaključak

Analizom izvedenog numeričkog eksperimenta nad sistemom diferencijalnih jednačina prve asimptotske aproksimacije radi analize stabilnosti i dobijanja odgovarajućih grafičkih prikaza stanja nelinearne dinamike, kao i pozicija ravnoteže planetarnog prenosnika, a u širem rezonantnom opsegu sopstvene kružne frekvencije oscilovanja, izvedeni su sledeći zaključci:

- Sistem ima jedan položaj stabilne ravnoteže.
- Prema Ljapunovljevoj teoriji stabilnosti zaključuje se da ovaj sistem poseduje i dovoljan uslov stabilnosti. Sistem je asimptotski stabilan ili za neke početne uslove asimptotski dolazi u stabilni režim oscilovanja
- Sa dijagrama koji su dobijeni za frekvencije van rezonantne oblasti vidi se da posle kraćeg vremena efekat prigušenja uslovljava konvergenciju režima dinamike ka stacionarnom periodičkom procesu. Vidi se da se reprezentativna tačka kreće po spiralnoj trajektoriji približavajući se singularnoj tački tipa spiralne stabilne žiže ili stabilnog centra što zavisi od tipa prigušenja.
- Pri frekvenciji koja pripada rezonantnom području-rezonantnom frekventnom opsegu ( $3387 \text{ s}^{-1}$ ) kretanje u početnom delu nije periodično. Na sl. od 13 do 20 vidi se da dolazi do subharmonika u određenom trenutku.

- Na većim frekvencijama v prinudnog sprega od osnovne sopstvene frekvencije  $\omega_1$  neporemećenog oscilovanja se javljaju tri stacionarne vrednosti amplitude na istoj frekvenciji  $\nu_0$ , dve stabilne i jedna nestabilna. U tom opsegu planetarni prenosnik može da pokaže rezonantni skok amplitude sa nestabilne na stabilnu nižu ili višu amplitudu, pri istoj frekvenciji.

Pojava rezonantnog skoka je rezultat nelinearnog efekta u rezonantnom opsegu frekvencije prinudnih spregova. Kod reduktora to se izražava u preskoku u dinamici rada.

### Prilog

Dat je prikaz programa MATLAB pomoću koga je izvršen numerički eksperiment.

```
function ydot=d7(t,y)
global ni
ydot=[-0.15.*y(1)-(220./(0.211.*(3385.448+ni))).*...
sin(y(2));...
3385.448-ni+11.3.*y(1).^2 -...
(220./(0.211.*(3385.448+ni)).*y(1))).* cos(y(2))];
```

```
function[t,V,Q]=k8(ni)
global ni
t0=0;
tf=30;
x0=[0.046 1.5276];
[t,Y]=ode45('d7',t0,tf,x0,1.e-16);
```

```
%%%%%%%%%
```

```
Q=1.815.*Y(:,1).*cos(3385.44+Y(:,2));
V=1.815.*(-0.15.*Y(:,1)-220./(0.211.*(3385.448+ni)).*
cos(Y(:,2))).*...
cos(3385.417+Y(:,2))-(1.815).*(3385.448-
ni+11.3.*Y(:,1).^2-...
220./(0.211.*(3385.448+ni)).*Y(:,1)).*sin(Y(:,2))).*Y(:,1).*
...
sin(3385.448+Y(:,2))-
(1.815).*Y(:,1).*3385.448.*sin(3385.448+Y(:,2));
```

```
figure;
plot(t,Y(:,1),'w');
xlabel('vreme')
ylabel('amplituda')
```

```
figure;
plot(t,Y(:,2),'w');
xlabel('vreme')
ylabel('faza')
```

```
figure
plot(t,Q,'w');
xlabel('vreme')
ylabel('elongacija')
```

```
figure
plot(t,V,'w');
xlabel('vreme')
ylabel('brzina')
```

## Literatura

```
figure
plot3(V,Q,t,'w');
xlabel('brzina')
ylabel('elongacija')
ylabel('vreme')

figure
plot(V,Q,'w');
xlabel('brzina')
ylabel('elongacija')

figure
plot(Y(:,1),Y(:,2),'w');
xlabel('amplituda')
ylabel('faza')
```

- [1] HEDRIH (STEVANOVIĆ) K. *Izabrana poglavlja iz teorije nelinearnih oscilacija*. Univerzitet u Nišu, Niš 1975.
- [2] MERKIN,D.R. *Vvedenie v teoriju ustoičivosti dviženija*. Nauka, Moskva, 1987.
- [3] BAKŠA,A., VESKOVIĆ,M. *Stabilnost kretanja*. Beograd, 1996.
- [4] HEDRIH (STEVANOVIĆ) K., KNEŽEVIĆ,R. Prilog izučavanju dinamike planetarnih prenosnika. *Naučnotehnički pregled*, 1998., vol.48, no.6, p.26-32.
- [5] MITROPOL'SKIY,A.JU., MOSEENKOV,IB. *Asimptotičeskie rešenija uravnenij v častnih proizvodnih*. Viššaja škola, Kiev, 1997.

Rad primljen: 2.2.1999.god.