

Analiza grešaka u postupku praćenja cilja

Dr Nenad Dodić, dipl.inž.¹⁾

Praćenje cilja, kao postupak određivanja njegovog kretanja, zasniva se na korišćenju podataka koji po pravilu sadrže greške. Greške korišćenih podataka i njihov uticaj na praćenje cilja analizirani su teorijski, na osnovu matematičkih opisa procesa koji se odvijaju u toku praćenja cilja, a to su: kretanje cilja, merenje njegovog položaja i ocenjivanje veličina koje određuju njegovo kretanje. Pored teorijske kvalitativne analize, greške u postupku praćenja analizirane su kvantitativno, korišćenjem računarske simulacije radarskog praćenja cilja u vazduhu.

Ključne reči: Praćenje cilja, greške praćenja, merenje položaja, model kretanja, model merenja, Kalmanov filter, računarska simulacija.

Uvod

Praćenje pokretnih objekata predstavlja jednu od najvažnijih aktivnosti u borbenim sistemima za osmatranje i vatreno dejstvo. Razvoj senzorske tehnike i digitalne elektronike doprineo je ubrzanom razvoju sistema za automatsko praćenje. Ovi sistemi znatno podižu efikasnost i tačnost prikupljanja informacija o pokretnom objektu, time što čoveka, kao glavnog izvora grešaka i nepouzdanosti, isključuju iz neposrednog toka praćenja.

Objekat koji se prati naziva se *cilj*. *Praćenje cilja* predstavlja prikupljanje podataka o cilju i određivanje njegovog kretanja, odnosno ocenjivanje veličina koje određuju kretanje cilja. Podaci o cilju prikupljaju se merenjem, korišćenjem određenih senzora. Po pravilu se prati centar cilja. Za veličine koje određuju kretanje centra obično se usvajaju koordinate centra i njihovi izvodi (obično prvi i drugi, odnosno komponente brzine i ubrzanja cilja). Razmatraće se samo *automatsko praćenje cilja*, kao proces ocenjivanja veličina koje određuju kretanje cilja, obradom podataka o položaju cilja koje daju senzori, bez neposrednog učešća čoveka.

Da bi se ostvarilo praćenje cilja potrebni su sledeći podaci:

- sekvenca merenja položaja cilja,
- statistički podaci o greškama merenja,
- matematički opisi (modeli) kretanja cilja i merenja njegovog položaja i
- parametri modela.

Navedeni podaci sadrže određene greške koje, više ili manje, utiču na tačnost praćenja. Da bi se sagledalo poreklo grešaka i njihov uticaj na praćenje, prvo će se razmotriti postupak merenja, zatim matematičko modeliranje kretanja cilja i merenja njegovog položaja, a potom postupak praćenja. Posle toga, pristupiće se analizi uticaja grešaka korišćenih podataka na tačnost praćenja i doneti određeni zaključci.

Merenje i greške merenja

Savremeni sistemi praćenja koriste sledeće senzore za merenje položaja cilja: radar (obično nišanski, kao najtačniji radarski senzor), kameru - termovizijsku ili televizijsku, laserski daljinomer i senzore za merenje uglova. Senzori mere:

- uglove cilja u odnosu na osu senzora (osa radarske antene ili optička osa kamere) - po azimutu (pravcu) $\Delta\beta$ i elevaciji (visini) $\Delta\alpha$,
- uglove ose senzora - po azimutu β_s i elevaciji α_s i
- daljinu cilja d .

Izmerene veličine označavaju se sa $y_{\Delta\beta}$, $y_{\Delta\alpha}$, y_{β_s} , y_{α_s} , y_d respektivno.

Merene relativni uglovi senzora $y_{\Delta\beta}$, $y_{\Delta\alpha}$ dobijaju se obradom signala sa radara ili kamere. Merena daljina cilja y_d dobija se obradom signala sa radara ili laserskog daljinomera. Mereni uglovi ose senzora y_{β_s} , y_{α_s} dobijaju se obradom signala sa senzora položaja radarske ili optičke ose. Ti senzori su optički apsolutni enkoderi, razlagači (rezolveri) i žiroskopi. *Merene uglovi cilja* dobijaju se zbrajanjem merenih relativnih uglova cilja i merenih uglova ose senzora:

$$y_{\beta} = y_{\beta_s} + y_{\Delta\beta}, \quad y_{\alpha} = y_{\alpha_s} + y_{\Delta\alpha}$$

Merene pravougle koordinate cilja dobijaju se transformacijom izmerenih veličina y_{β_s} , y_{α_s} , y_d iz sfernog u pravougli koordinatni sistem:

$$y_x = y_d \cos y_{\alpha_s} \cos y_{\beta_s} \quad (1)$$

$$y_y = y_d \cos y_{\alpha_s} \sin y_{\beta_s} \quad (2)$$

$$y_z = y_d \sin y_{\alpha_s} \quad (3)$$

Greške koje se pri merenju javljaju mogu se podeliti na:

- *sistematske greške* - konstantne (bias, offset) ili sporopromenljive (drift), koje su prisutne u celom toku merenja,

¹⁾ Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

- *grube greške* - greške velikih amplituda, koje su po pravilu kratkotrajne i sporadično se javljaju i
- *slučajne male greške* - visokofrekventne greške malih amplituda i nultih matematičkih očekivanja (srednjih vrednosti).

Sistematske greške mogu se eliminisati redovnim i pažljivim održavanjem senzora i prateće elektronike (podešavanje, baždarenje, zamena delova). Merenja sa grubim greškama se odbacuju kroz postupak poređenja merenih veličina sa ocenama istih veličina, dobijenih u postupku praćenja. Slučajne male greške ne mogu se eliminisati. One u izvesnoj meri ostaju čak i nakon propisnog filtriranja signala. Filtriranje se, po pravilu, obavlja pre uvođenja signala u digitalni računar, ne samo da bi se smanjio šum merenja već i da bi se smanjio tzv. efekat "dvojnikanja" (engl. aliasing), koji može da stvori privid niskofrekventnih oscilacija [1]. Zato se slučajne greške moraju uzeti u obzir pri praćenju cilja. Sistematske i grube greške neće se razmatrati, smatraće se da su one eliminisane. Razmatraće se samo fine slučajne greške, koje će se nazivati jednostavno *greške merenja*.

Koji su uzroci slučajnih grešaka merenja? To mogu biti: termički šum koji se zbog slučajnog (Braunovog) kretanja molekula i elektrona javlja u prijemnom ili predajnom delu senzora, "svetlucanje" siluete cilja uzrokovano slučajnim kretanjem čestica atmosfere ili druge mikroskopske pojave. Prema [2], slučajna greška (šum) u nekom fizičkom sistemu može se smatrati zbirom velikog broja mikroskopskih šumova. S obzirom da su ove mikroskopske pojave veoma brze u odnosu na kretanje cilja, isto će važiti i za makroskopske slučajne greške - greške merenja. Zato se može smatrati da su one *vremenski nekorelisane* (trenutne vrednosti grešaka nisu korelisane sa prethodnim vrednostima). Obrada signala senzora prethodnim filtriranjem, ukoliko su vremenske konstante ulaznih filtara previše velike, može uneti značajnu vremensku korelativnost (autokorelativnost) merenih veličina. Ona je nepoželjna u postupku praćenja, pa se o njoj mora voditi računa pri projektovanju ulaznih filtara.

Neka su $v_\beta = y_\beta - \beta$, $v_\alpha = y_\alpha - \alpha$, $v_d = y_d - d$ greške merenja sfernih koordinata cilja β , α , d . Iz prethodnog razmatranja sledi da ove greške imaju nulta matematička očekivanja i da su vremenski nekorelisane:

$$E[v_\beta(t)v_\beta(\tau)] = \sigma_\beta^2 \delta(t, \tau), \quad E[v_\alpha(t)v_\alpha(\tau)] = \sigma_\alpha^2 \delta(t, \tau)$$

$$E[v_d(t)v_d(\tau)] = \sigma_d^2 \delta(t, \tau), \quad \delta(t, \tau) = \begin{cases} 1, & t = \tau \\ 0, & t \neq \tau \end{cases}$$

gde "E" označava matematičko očekivanje, a t i τ su trenuci vremena. Veličine $\sigma_\beta^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_d^2$ predstavljaju varijanse grešaka merenja sfernih koordinata v_β, v_α, v_d . Ove greške predstavljaju *bele šumove* [3] i imaju neograničen frekventni spektar. Poznavajući procese u mernim sensorima i procese obrade njihovih signala, može se pretpostaviti da su greške v_β, v_α, v_d međusobno nekorelisane:

$$E[v_\beta(t)v_\alpha(\tau)] \equiv 0, \quad E[v_\beta(t)v_d(\tau)] \equiv 0$$

$$E[v_\alpha(t)v_d(\tau)] \equiv 0$$

gde su t i τ proizvoljni trenuci vremena. Prethodne pretpostavke o greškama merenja uobičajene su u teoriji praćenja cilja.

Neka su $v_x = y_x - x$, $v_y = y_y - y$, $v_z = y_z - z$ greške merenja pravouglanih koordinata x, y, z . Očigledno je da vremenska

nekorelativnost grešaka merenja sfernih koordinata povlači vremensku nekorelativnost grešaka merenja pravouglanih koordinata, ali i da su ove poslednje (v_x, v_y, v_z) međusobno korelisane, što je posledica transformacije (1-3).

Ako se usvoji pretpostavka da su greške merenja zbirivo velikog broja mikroskopskih šumova, onda, bez obzira na statističku raspodelu mikroskopskih šumova, greške merenja v_β, v_α, v_d imaju *normalnu (Gausovu) raspodelu*, shodno centralnoj graničnoj teoremi [4]. Pretpostavka o normalnoj raspodeli ovih grešaka, takođe, je uobičajena.

Funkcije (1-3) se mogu predstaviti u sledećem vektorskom obliku:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{y}_{sfer})$$

gde su:

$$\mathbf{y} = (y_x \ y_y \ y_z)^T, \quad \mathbf{y}_{sfer} = (y_\beta \ y_\alpha \ y_d)^T \quad (4)$$

vektori merenja pravouglanih i sfernih koordinata. "T" označava transpoziciju vektora ili matrice. Neka su \mathbf{r} i \mathbf{r}_{sfer} vektori položaja cilja izraženi u pravouglanim i sfernim koordinatama:

$$\mathbf{r} = (x \ y \ z)^T, \quad \mathbf{r}_{sfer} = (\beta \ \alpha \ d)^T \quad (5)$$

Neka su \mathbf{v} i \mathbf{v}_{sfer} vektori grešaka merenja pravouglanih i sfernih koordinata:

$$\mathbf{v} = (v_x \ v_y \ v_z)^T, \quad \mathbf{v}_{sfer} = (v_\beta \ v_\alpha \ v_d)^T \quad (6)$$

Funkcija $\mathbf{h}(\mathbf{y}_{sfer})$ može se razviti u Tejlorov red [5] u okolini proizvoljne tačke $\mathbf{r}_{sfer} = (\beta \ \alpha \ d)^T$:

$$\mathbf{y} = \mathbf{h}(\mathbf{y}_{sfer}) = \mathbf{r} + \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{r}_{sfer})}{\partial \mathbf{y}_{sfer}} \mathbf{v}_{sfer} + \sum_{2 \leq p+s+q} \frac{\partial^{p+s+q} \mathbf{h}(\mathbf{r}_{sfer})}{\partial^p y_\beta \partial^s y_\alpha \partial^q y_d} \frac{v_\beta^p v_\alpha^s v_d^q}{p!s!q!}$$

$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}_{sfer}}$ je Jakobijan vektorske funkcije \mathbf{h} . Može se pretpostaviti da su greške merenja v_β, v_α, v_d dovoljno male veličine, da se članovi Tejlorovog razvoja koji sadrže njihove kvadrate, više stepene i međusobne proizvode mogu zanemariti. U tom slučaju je:

$$\mathbf{v} = \frac{\partial \mathbf{h}(\mathbf{r}_{sfer})}{\partial \mathbf{y}_{sfer}} \mathbf{v}_{sfer} \quad (7)$$

Ovo znači da se veze grešaka v_x, v_y, v_z sa greškama v_β, v_α, v_d mogu smatrati linearnim, odakle sledi da, ako v_β, v_α, v_d imaju normalnu raspodelu, onda i v_x, v_y, v_z imaju normalnu raspodelu. Ovo proističe iz osobine normalno raspodeljenih slučajnih promenljivih, da njihove linearne transformacije, takođe, predstavljaju *normalne (Gausove) promenljive* [3].

Varijanse $\sigma_\beta^2, \sigma_\alpha^2, \sigma_d^2$ predstavljaju statističke podatke o greškama merenja koji u praksi ne moraju biti sasvim tačni ili se raspolaže samo njihovim ocenama. Stoga se, pri projektovanju postupka praćenja cilja, mora voditi računa i o greškama ovih statističkih podataka.

Matematički opis kretanja i merenja položaja cilja

Prevažodna svrha praćenja cilja je da omogući predviđanje budućeg položaja cilja. Skup veličina, odnosno parametara, koji obezbeđuju precizno predviđanje položaja cilja

zavisu od načina kretanja cilja. Ako se cilj kreće ustaljeno: (leti konstantnim vektorom brzine, konstantnim vektorom ubrzanja ili vrši koordinisani zaokret), ocene koordinata cilja i njihovih prvih i drugih izvoda (komponente brzine i ubrzanja cilja) u posmatranom trenutku, dovoljne su za predviđanje položaja cilja [6]. Ove ocene dobijaju se obradom sekvence izmerenih položaja cilja. Ako se cilj kreće neustaljeno, precizno predviđanje položaja cilja, zasnovano samo na merenju položaja cilja, nije moguće, jer modeli kretanja koji bi to obezbedili još nisu razvijeni. Sledi da je za vektor stanja cilja najpraktičnije usvojiti:

$$\mathbf{x} = (x \dot{x} \ddot{x} y \dot{y} \ddot{y} z \dot{z} \ddot{z})^T \quad (8)$$

gde „T” označava transpoziciju vektora ili matrice. Veličine stanja u ovom slučaju su koordinate i komponente brzine i ubrzanja cilja. Kretanje cilja se u opštem slučaju može opisati nelinearnom vektorskom diferencijalnom jednačinom:

$$\dot{\mathbf{x}} = \mathbf{F}(t, \mathbf{x}, \mathbf{u}, \mathbf{w}) \quad (9)$$

gde su: t - vreme, \mathbf{u} - poznati deterministički vektor ulaza, a \mathbf{w} - slučajna vektorska promenljiva (ulazni šum), tipa belog šuma nultog matematičkog očekivanja. Diferencijalna jednačina nije pogodan opis kretanja cilja, s obzirom da se za praćenje koriste digitalni računari, pa se (9) obično diskretizuje s konstantnim periodom odabiranja Δt . Tako se dobija:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{f}(k, \mathbf{x}(k-1), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{w}(k-1)) \quad (10)$$

gde je k - diskretan trenutak vremena. Još je pogodnije ako je jednačina kretanja cilja linearna:

$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k-1) + \mathbf{G}(k)\mathbf{w}(k-1) \quad (11)$$

Jednačine (9-11) predstavljaju modele kretanja cilja i zvaće se kratko - modeli cilja. Linearni model cilja, opšteg oblika (11), najčešće se koristi u postupku praćenja. Kretanje cilja je u opštem slučaju složen i nepredvidljiv proces, pa ni jedan praktično upotrebljiv model cilja ne opisuje potpuno tačno proizvoljno kretanje cilja. Šum \mathbf{w} modelira neizvesnost, odnosno slučajan karakter kretanja cilja. Statistički pokazatelj ove vektorske veličine je njena kovarijansna matrica:

$$\mathbf{Q}(k) = E\{\mathbf{w}(k)\mathbf{w}^T(k)\}$$

Izbor matematičkog modela cilja i kovarijanse $\mathbf{Q}(k)$ bitno utiče na tačnost praćenja cilja. Za realizaciju praćenja cilja koje, s matematičkog stanovišta, predstavlja ocenjivanje stanja cilja \mathbf{x} , neophodno je uspostaviti vezu između merenih koordinata i stanja cilja - odnosno definisati tzv. jednačinu merenja. Ako se usvoje vektor merenja \mathbf{y}_{sfer} (4) i vektor greške (šuma) merenja \mathbf{v}_{sfer} (6), onda je jednačina merenja nelinearna:

$$\mathbf{y}_{sfer} = \mathbf{q}(\mathbf{x}) + \mathbf{v}_{sfer} \quad (12)$$

Ako se usvoje \mathbf{y} , \mathbf{v} , onda je jednačina merenja linearna:

$$\mathbf{y} = \mathbf{C}\mathbf{x} + \mathbf{v} \quad (13)$$

Ako se \mathbf{x} (8) izabere za vektor stanja, onda je:

$$\mathbf{C} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{pmatrix} \quad (14)$$

Za realizaciju postupka praćenja, potrebno je poznavati kovarijansnu matricu grešaka merenja - \mathbf{R}_{sfer} ili \mathbf{R} :

$$\mathbf{R}_{sfer} = E[\mathbf{v}_{sfer}\mathbf{v}_{sfer}^T] = \begin{pmatrix} \sigma_\alpha^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sigma_\beta^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_d^2 \end{pmatrix} \quad (15)$$

$$\mathbf{R} = E[\mathbf{v}\mathbf{v}^T] = \begin{pmatrix} \sigma_x^2 & \sigma_{xy} & \sigma_{xz} \\ \sigma_{xy} & \sigma_y^2 & \sigma_{yz} \\ \sigma_{xz} & \sigma_{yz} & \sigma_z^2 \end{pmatrix} \quad (16)$$

U slučaju da su šumovi merenja mali, kovarijansa greška merenja pravouglanih koordinata \mathbf{R} može se, shodno (7) i (15), približno izračunati na sledeći način:

$$\mathbf{R} = \frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}_{sfer}} \mathbf{R}_{sfer} \left(\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial \mathbf{y}_{sfer}} \right)^T$$

Tačni izrazi za izračunavanje \mathbf{R} u funkciji \mathbf{R}_{sfer} i vektora položaja cilja dati su u [6].

Postupak praćenja cilja

Neka važe sledeće pretpostavke:

- cilj se kreće u skladu s modelom (11),
- ulazni šum \mathbf{w} modela (11) i šum merenja \mathbf{v} su beli, međusobno nezavisni šumovi nultih matematičkih očekivanja,
- kovarijanse šumova \mathbf{Q} i \mathbf{R} su poznate,
- merenje je opisano jednačinom (13) i
- šumovi \mathbf{w} i \mathbf{v} su nezavisni.

Zadatak praćenja je određivanje ocene $\hat{\mathbf{x}}(k)$ stanja cilja $\mathbf{x}(k)$ u realnom vremenu, na osnovu obavljenih merenja $\mathbf{y}(j)$, $j=1,2,\dots,k$, takve da je njena srednjekvadratna greška:

$$E\{\tilde{\mathbf{x}}^T \tilde{\mathbf{x}}\}, \quad \tilde{\mathbf{x}} = \hat{\mathbf{x}} - \mathbf{x} \quad (17)$$

minimalna.

Važi sledeća lema [7]: ako poznate veličine $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(q)$ zavise od slučajne promenljive \mathbf{x} , onda ocena $\hat{\mathbf{x}}$ veličine \mathbf{x} , koja minimizira srednjekvadratnu grešku (17) predstavlja matematičko očekivanje veličine \mathbf{x} , pod uslovom da je izmerena sekvenca $\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(q)$.

Iz ove leme i usvojenih pretpostavki sledi:

$$\begin{aligned} \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) &= E\{\mathbf{x}(k)|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k-1)\} = \\ &= E\{[\mathbf{A}(k)\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k-1) + \\ &+ \mathbf{G}(k)\mathbf{w}(k-1)]|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k-1)\} = \\ &= \mathbf{A}(k)E\{\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k-1)\} + \\ &+ \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k-1) \end{aligned}$$

odnosno, najbolje predviđanje (ocena) veličine \mathbf{x} u trenutku k , na osnovu ocene te veličine u trenutku $k-1$ je:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k-1) = \mathbf{A}(k)\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) + \mathbf{B}(k)\mathbf{u}(k-1) \quad (18)$$

gde je:

$$\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1) = E\{\mathbf{x}(k-1)|\mathbf{y}(1), \dots, \mathbf{y}(k-1)\}$$

Kada je poznato $\mathbf{y}(k)$ (obavljeno je novo merenje) ocena (18) može se korigovati na sledeći način:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}(k) - \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)] \quad (19)$$

Dakle, predviđanje na osnovu stare ocene se koriguje u skladu sa odstupanjem predviđanja vektora merenja $\hat{\mathbf{y}} = \mathbf{C}\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ od stvarnog merenja $\mathbf{y}(k)$. Kovarijansa ocene $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ je:

$$\mathbf{P}(k|k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)\} \quad (20)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k) - \mathbf{x}(k)$$

a kovarijansa ocene $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$:

$$\mathbf{P}(k|k-1) = E\{\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1)\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k-1)\} \quad (21)$$

$$\tilde{\mathbf{x}}(k|k-1) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) - \mathbf{x}(k)$$

Jednačina (19) predstavlja estimator stanja cilja. Da bi ocena $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ bila optimalna u srednjekvadratnom smislu, trag matrice $\mathbf{P}(k|k)$:

$$\text{tr}\mathbf{P}(k|k) = E\{\tilde{\mathbf{x}}^T(k|k)\tilde{\mathbf{x}}(k|k)\} \quad (22)$$

mora biti minimalan. Iz (11, 18, 20 i 21), s obzirom da $\hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1)$ ne zavisi od $\mathbf{w}(k-1)$, sledi:

$$\mathbf{P}(k|k-1) = \mathbf{A}(k)\mathbf{P}(k-1|k-1)\mathbf{A}^T(k) + \mathbf{G}(k)\mathbf{Q}(k-1)\mathbf{G}^T(k) \quad (23)$$

Iz (13, 18-21 i 23), s obzirom da $\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$ ne zavisi od $\mathbf{w}(k-1)$ niti od $\mathbf{v}(k)$, kao i da su šumovi \mathbf{w} i \mathbf{v} međusobno nezavisni, sledi:

$$\begin{aligned} \mathbf{P}(k|k) &= \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1) - \\ &\quad - \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)\mathbf{K}^T(k) + \\ &\quad + \mathbf{K}(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \\ &\quad + \mathbf{R}(k)]\mathbf{K}^T(k) \end{aligned} \quad (24)$$

Matrica $\mathbf{K}(k)$ za koju je $\mathbf{P}(k|k)$ minimalno, u smislu da je (22) minimalno, je [8]:

$$\mathbf{K}(k) = \mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k)[\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1)\mathbf{C}^T(k) + \mathbf{R}(k)]^{-1} \quad (25)$$

Kada se (25) zameni u (24), izraz za $\mathbf{P}(k|k-1)$ dobija jednostavniji oblik:

$$\mathbf{P}(k|k) = \mathbf{P}(k|k-1) - \mathbf{K}(k)\mathbf{C}(k)\mathbf{P}(k|k-1) \quad (26)$$

Jednačine (18, 19, 23, 25 i 26) predstavljaju *optimalni estimator stanja* cilja u srednjekvadratnom smislu, tj. u smislu minimalnosti (22). On se naziva *Kalmanov filter*, a matrica \mathbf{K} se zove *Kalmanovo pojačanje*. Rekurentna primena Kalmanovog filtra, počevši od inicijalne ocene stanja $\hat{\mathbf{x}}(k_2|k_2)$, na merenja $\mathbf{y}(k)$, $k=k_2, k_2+1, \dots$, predstavlja praćenje cilja u užem smislu. U širem smislu, praćenje obuhvata i aktivnosti na merenju položaja cilja, a to su: pozicioniranje senzora, prikupljanje i obrada signala sa senzora.

Određivanje početne ocene stanja cilja \mathbf{x} (8) obično se vrši na osnovu prva dva merenja položaja cilja: $\mathbf{y}(k_1)$, $\mathbf{y}(k_2)$, gde su k_1, k_2 diskretni trenuci merenja, na sledeći način:

$$\hat{x}_1(k_2|k_2) = y_x(k_2), \quad \hat{x}_2(k_2|k_2) = \frac{y_x(k_2) - y_x(k_1)}{(k_2 - k_1)\Delta t} \quad (27)$$

$$\hat{x}_3(k_2|k_2) = 0, \quad \hat{x}_4(k_2|k_2) = y_y(k_2) \quad (28)$$

$$\hat{x}_5(k_2|k_2) = \frac{y_y(k_2) - y_y(k_1)}{(k_2 - k_1)\Delta t}, \quad \hat{x}_6(k_2|k_2) = 0 \quad (29)$$

$$\hat{x}_7(k_2|k_2) = y_z(k_2), \quad \hat{x}_8(k_2|k_2) = \frac{y_z(k_2) - y_z(k_1)}{(k_2 - k_1)\Delta t} \quad (30)$$

$$\hat{x}_9(k_2|k_2) = 0 \quad (31)$$

Da bi se primenio Kalmanov filter, potrebno je izračunati i kovarijansnu matricu $\mathbf{P}(k_2|k_2)$ početne ocene, na način opisan u [6].

Ako se umesto linearne jednačine merenja (13) koristi nelinearna, odnosno kada se koriste merene sferne koordinate cilja umesto pravougljih, onda se osnovna jednačina estimatora stanja menja, tj. umesto (19) koristi se sledeća jednačina:

$$\hat{\mathbf{x}}(k|k) = \hat{\mathbf{x}}(k|k-1) + \mathbf{K}(k)[\mathbf{y}_{sfer}(k) - \mathbf{g}(\hat{\mathbf{x}}(k|k-1))] \quad (32)$$

a umesto \mathbf{C} (14) u jednačinama (25 i 26) koristi se Jakobijan:

$$\mathbf{C} = \frac{\partial \mathbf{g}(\mathbf{x})}{\partial \mathbf{x}} \quad (33)$$

Takođe se, u (25), umesto \mathbf{R} koristi \mathbf{R}_{sfer} . Izbor vektora merenja - pravouglo ili sferne koordinate (\mathbf{y} ili \mathbf{y}_{sfer}) ne utiče značajno na efikasnost i tačnost praćenja, što potvrđuju rezultati računarske simulacije. Ovaj izbor ne utiče bitno ni na broj korišćenih računskih operacija u postupku praćenja: kada se koriste pravouglo merene koordinate, onda je $\mathbf{C}=\text{cons}$, ali se \mathbf{R} menja, pa se izračunavanje ove matrice mora ponavljati. Ako se koriste sferne merene koordinate, onda je $\mathbf{R}_{sfer}=\text{cons}$, ali je \mathbf{C} promenljivo, pa se njeno računanje mora ponavljati.

Ako je model cilja nelinearan (10), onda se umesto (18) koristi:

$$\hat{\mathbf{x}}(k) = \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k-1), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{0}) \quad (34)$$

dok se kao matrice \mathbf{A} i \mathbf{G} u izrazu (23) koriste Jakobijani:

$$\mathbf{A}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{0})}{\partial \mathbf{x}} \quad (35)$$

$$\mathbf{G}(k) = \frac{\partial \mathbf{f}(k, \hat{\mathbf{x}}(k-1|k-1), \mathbf{u}(k-1), \mathbf{0})}{\partial \mathbf{w}} \quad (36)$$

Kalmanov filter izmenjen primenom relacija (32-36) naziva se *prošireni Kalmanov filter*. Upotreba (33, 35 i 36) predstavlja svojevrstnu linearizaciju nelinearnog problema estimacije.

Treba još napomenuti da, za optimalnost ocena stanja cilja u srednjekvadratnom smislu, nije neophodno da šumovi \mathbf{v} i \mathbf{w} imaju Gausovu raspodelu, ali da u slučaju Gausove raspodele Kalmanov filter daje kvalitetnije ocene veličina stanja [8]. Tada one minimiziraju srednju vrednost proizvoljne funkcije troška koja je parna, monotono rastuća funkcija greške ocene, jednaka nuli za nultu vrednost greške [2]. Kvadrat greške ocene je samo jedan od primera ovakve funkcije troška.

Kvalitativna analiza tačnosti praćenja

Jednačine (18, 19, 23, 25 i 26) jasno pokazuju da na tačnost praćenja utiču sledeći činioci:

- greške merenja $\mathbf{v}(k)$,
- greške korišćenih statističkih podataka o merenju (elementi kovarijansne matrice merenja \mathbf{R} , odnosno \mathbf{R}_{sfer}) u odnosu na stvarne statistike,
- adekvatnost modela cilja i
- greške parametara modela cilja.

Period odabiranja Δt i kovarijansa \mathbf{Q} šuma \mathbf{w} su ključni parametri modela cilja (11), odnosno (10). Razmotriće se redom uticaj svih navedenih činilaca.

Šta se događa kada greške merenja rastu, odnosno kada raste kovarijansa grešaka merenja \mathbf{R} ? Tada se Kalmanovo pojačanje \mathbf{K} (25) smanjuje, što s obzirom na (19), smanjuje osetljivost Kalmanovog filtra. To smanjuje preslikavanje šuma merenja (prisutnog u \mathbf{y}) na ocenu $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$, ali usporava odziv filtra na moguće promene ponašanja cilja.

Povećanje grešaka merenja produžava prelazni proces Kalmanovog filtra nakon njegove inicijalizacije i zato što početne ocene veličina stanja cilja (27-31) tada više odstupaju od stvarnih veličina stanja. Dakle, iako Kalmanov filter predstavlja efikasan postupak ocenjivanja stanja cilja na osnovu "zašumljenog" merenja, smanjenje grešaka merenja povoljno utiče na dinamiku filtra i tačnost ocena.

Kako netačne statistike merenja utiču na tačnost praćenja? Ukoliko je korišćena kovarijansa grešaka merenja veća od stvarne, Kalmanovo pojačanje će, shodno (25), biti manje od optimalnog, što će usporiti Kalmanov filter i povećati greške ocena $\hat{\mathbf{x}}(k|k)$ (19). Ukoliko je navedena kovarijansa manja od stvarne, pojačanje filtra će biti veće od optimalnog, što će ubrzati odziv filtra na nastale promene u kretanju cilja, ali će povećati greške ocena stanja cilja.

Najveći problem vezan za praćenje cilja je pronalazjenje modela kretanja cilja, takvog da su njegovi parametri poznati ili se mogu precizno oceniti. Kao što je rečeno, takvi modeli su poznati samo za ustaljene režime kretanja cilja. Kada model cilja nije adekvatan, a ulazni šum \mathbf{w} je nedovoljno velik (suviše mala kovarijansa \mathbf{Q}), prema (23 i 25) pojačanje \mathbf{K} će vremenom postati veoma malo i praćenje će početi da divergira, usled nedovoljne korekcije ocene (19). Ovo je veoma nepovoljno, jer dovodi do velikih grešaka praćenja, pa i do prekida praćenja. Ukoliko se zna da model cilja nije sasvim adekvatan, a ne raspolaže se adekvatnim modelom (npr. u slučaju neustaljenog kretanja cilja), kovarijansa ulaznog šuma modela \mathbf{Q} mora se značajno povećati. To će povećati $\mathbf{P}(k|k-1)$ (23), a time i šum ocena $\hat{\mathbf{x}}$, ali će \mathbf{K} biti dovoljno veliko da obezbedi stabilno praćenje, odnosno da eliminiše divergenciju ocene $\hat{\mathbf{x}}$ od stvarnog stanja cilja \mathbf{x} .

Treba napomenuti da ni jedan model ne može apsolutno tačno da opiše stvarno kretanje cilja, pa usvajanje $\mathbf{Q}(k) \equiv \mathbf{0}$ u praksi dovodi do veće ili manje divergencije praćenja. Zato šum \mathbf{w} u modelu cilja mora postojati i \mathbf{Q} mora imati bar male nenulte dijagonalne elemente. Kada se koristi više referentnih modela cilja i spregnuti Kalmanovi filteri [9], dovoljno je da bar jedan model sadrži ulazni šum \mathbf{w} .

Adekvatnost modela cilja može se ispitati korišćenjem vektora inovacije (rezidijuma) $\boldsymbol{\gamma}(k) = \mathbf{C}(k)\hat{\mathbf{x}}(k|k-1)$; u slučaju da se prosečna euklidska norma vektora $\boldsymbol{\gamma}(k)$ ili njegova prosečna kvadratna forma značajno poveća, model nije adekvatan, pa treba povećati $\mathbf{Q}(k)$. Takođe je potrebno projektovati mehanizam za smanjenje $\mathbf{Q}(k)$ kada model cilja, usled promene kretanja cilja, postane ponovo adekvatan (videti npr. [10]). Ovakva promena $\mathbf{Q}(k)$ predstavlja adaptaciju Kalmanovog filtra.

Prethodni kvalitativni zaključci dati su za slučaj linearnih modela kretanja cilja i merenja njegovog položaja. S obzirom da se rešenje praćenja u slučaju nelinearnih modela cilja i merenja svodi na određeni stepen linearizacije problema estimacije, primenom proširenog Kalmanovog filtra, to se ovi zaključci mogu uopštiti i na slučaj nelinearnih modela, pod uslovom da greške merenja i ocena stanja cilja nisu suviše velike, jer bi tada linearizacija (primena Jakobijana) bila neopravdana.

U sistemima praćenja, koji koriste digitalni računar, merene veličine se obavezno kvantuju po nivou. Kvantovanje

neke veličine predstavlja zaokruživanje te veličine na najbliži niži ili viši kvantni nivo, zavisno od tehnološkog rešenja kvantovanja. Najčešće se veličina svodi na niži kvantni nivo. U tom slučaju veličini nakon kvantovanja treba dodati pola kvanta, da bi se obezbedila nulta srednja vrednost merene veličine. Merenje sa kvantovanjem i popravka zbog kvantovanja se mogu matematički opisati sledećim relacijama:

$$y_{\Delta\beta} = \Delta_{\Delta\beta} \text{int}[(\beta - \beta_s + v_{\Delta\beta}) / \Delta_{\Delta\beta}] + \Delta_{\Delta\beta} / 2$$

$$y_{\Delta\alpha} = \Delta_{\Delta\alpha} \text{int}[(\alpha - \alpha_s + v_{\Delta\alpha}) / \Delta_{\Delta\alpha}] + \Delta_{\Delta\alpha} / 2$$

$$y_{\beta_s} = \Delta_{\beta_s} \text{int}[(\beta_s + v_{\beta_s}) / \Delta_{\beta_s}] + \Delta_{\beta_s} / 2$$

$$y_{\alpha_s} = \Delta_{\alpha_s} \text{int}[(\alpha_s + v_{\alpha_s}) / \Delta_{\alpha_s}] + \Delta_{\alpha_s} / 2$$

$$y_d = \Delta_d \text{int}[(d + v_d) / \Delta_d] + \Delta_d / 2$$

Veličine $\Delta_{\Delta\beta}$, $\Delta_{\Delta\alpha}$, Δ_{β_s} , Δ_{α_s} , Δ_d su kvantovi merenja veličina $\Delta\beta$, $\Delta\alpha$, β_s , α_s , d , respektivno. Funkcija "int" zaokružuje realan broj na prvi manji ceo broj.

Kako kvantovanje utiče na grešku merenja? Neka je η_a neka veličina pre kvantovanja. Neka se ona nalazi bilo gde unutar intervala $(j\Delta_\eta, (j+1)\Delta_\eta)$, gde je Δ_η kvant, a j ceo broj. Kada se kvantovanje vrši svođenjem na niži kvantni nivo, što je najčešći slučaj, onda će kvantovana vrednost veličine η_a biti $j\Delta_\eta$, odnosno posle popravke $\eta = j\Delta_\eta + \Delta_\eta/2$. Najveća moguća apsolutna vrednost greške uzrokovana kvantovanjem je u ovom slučaju $\Delta_\eta/2$. Ukoliko η_a ima Gausovu raspodelu, srednjekvadratna greška zbog kvantovanja neće preći $\Delta_\eta/6$. Jasno je da kvantovanje ne povećava značajno grešku merenja, ako vrednost kvanta ne nadmašuje višestruko srednjekvadratnu grešku (varijansu) veličine koja se kvantuje.

Kvantitativna analiza tačnosti praćenja

Kvalitativna analiza sagledava odnose zavisnosti grešaka praćenja (grešaka ocena stanja cilja) od grešaka korišćenih podataka i ukazuje na njihov značaj. Ona ne daje brojčane pokazatelje tih odnosa, za sagledavanje stepena uticaja pojedinih grešaka na tačnost praćenja. Brojčane pokazatelje daje kvantitativna analiza. Ona se, za razliku od kvalitativne analize, ne može vršiti za opšti slučaj praćenja, već se koriste računarski ili fizički simulacioni modeli, koji podrazumevaju konkretna rešenja senzorskog sistema, konkretne oblike kretanja cilja i konkretne referentne modele cilja. Retko se koriste fizički simulacioni modeli. Poznavanje fizikalnosti procesa praćenja i velika računarska snaga savremenih računara omogućuju projektovanje sveobuhvatne i verodostojne simulacije praćenja pomoću računara. Ona je fleksibilnija i pogodnija od simulacije korišćenjem fizičkih modela.

Simulacija praćenja

Sledeći primer korišćen je za kvantitativnu analizu tačnosti praćenja: nišanskim radarom prati se leteći cilj koji ponire pravolinijski, pod uglom od 20° , s konstantnim ubrzanjem od 7 m/s^2 i početnom brzinom 200 m/s – sl.1. Ugani položaj radarske ose meri se apsolutnim optički enkoderima. Shodno izboru senzora može se smatrati da se veličine $\Delta\beta$, $\Delta\alpha$, β_s , α_s , d mere s greškama nultih matematičkih očekivanja i vremenskim nepromenljivim varijansama.

Jednako ubrzano kretanje cilja simulirano je korišćenjem sledeće vektorske diferencne jednačine (jednačine cilja):

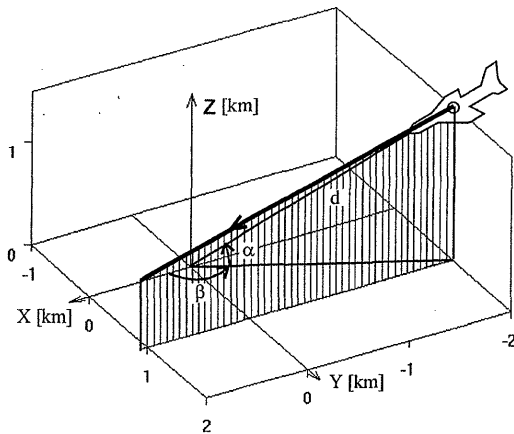
$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) \quad (37)$$

$$\mathbf{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{A}^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{A}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{A}^I \end{pmatrix}, \mathbf{A}^I = \begin{pmatrix} 1 & \Delta t & \Delta t^2 / 2 \\ 0 & 1 & \Delta t \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad (38)$$

gde je \mathbf{x} definisano jednačinom (8). Početno stanje je:

$$\mathbf{x}(0) = (-200 \ 193,2 \ 6,8 \ 1000 \ 0 \ 0 \ 1500 \ -51,8 \ -1,8)^T$$

a period odabiranja $\Delta t = 0,04$ s.



Slika 1. Putanja simuliranog cilja

Pored jednako ubrzanog kretanja simuliran je i koordinisani zaokret [10], s normalnim ubrzanjem 20 m/s^2 i brzinom 200 m/s , da bi se ilustrovao uticaj neadekvatnosti referentnog modela na tačnost praćenja.

Simulirano je električno pokretanje radarske antene, tako da brzinsko upravljanje motorima po azimutu i elevaciji ima iste karakteristike: sopstvenu neprigušenu učestalost 20 rad/s i faktor prigušenja $0,85$, a digitalno proporcionalno-integralno upravljanje ugaonim položajem antene vrši se na osnovu signala $y_{\Delta\beta}$, $y_{\Delta\alpha}$, koje daje nišanski radar.

Merenje položaja cilja simulirano je na način prikazan na sl.2. Greške merenja $v_{\Delta\beta}$, $v_{\Delta\alpha}$, $v_{\beta s}$, $v_{\alpha s}$, v_d su generisane kao beli Gausovi šumovi nultih matematičkih očekivanja i zadatih varijansi: $\sigma_{\Delta\beta}^2, \sigma_{\Delta\alpha}^2, \sigma_{\beta s}^2, \sigma_{\alpha s}^2, \sigma_d^2$, respektivno. Ovakva simulacija odslikava slučajan karakter procesa merenja, ali i njegovu diskretnu prirodu, koja je nužno uslovljena primenom digitalnog računara u procesu praćenja.

Za simulirano praćenje se koristi sledeći referentni model cilja:

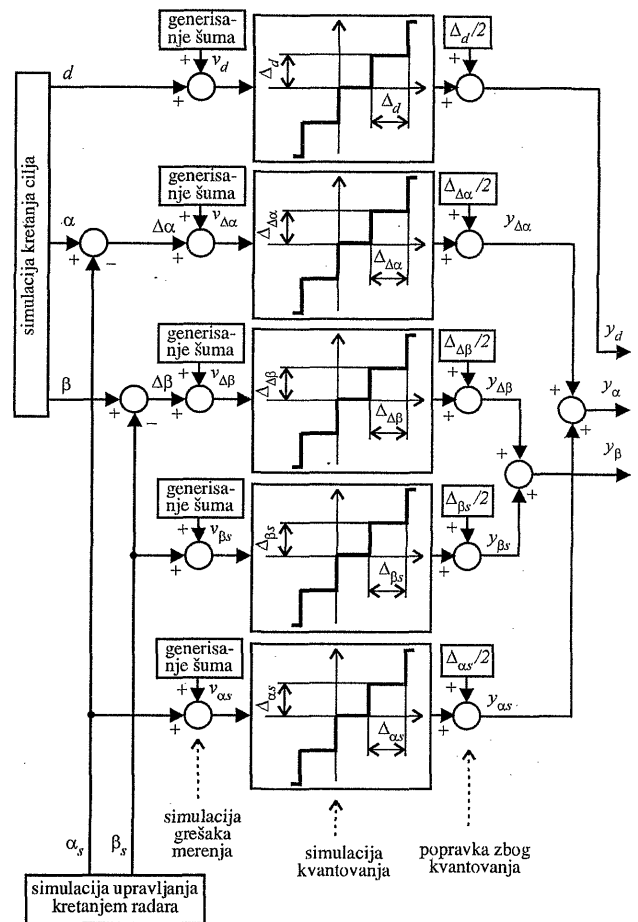
$$\mathbf{x}(k) = \mathbf{A}\mathbf{x}(k-1) + \mathbf{G}\mathbf{w}(k-1) \quad (39)$$

gde je \mathbf{A} dato sa (38), a \mathbf{G} je jedinična matrica. \mathbf{w} je beli Gausov šum nultog matematičkog očekivanja i kovarijanse:

$$\mathbf{Q} = E\{\mathbf{w}\mathbf{w}^T\} = \begin{pmatrix} \mathbf{Q}^I & \mathbf{0} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{Q}^I & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{0} & \mathbf{Q}^I \end{pmatrix}$$

$$\mathbf{Q}^I = 2\alpha_m \sigma_m^2 \begin{pmatrix} \Delta t^5 / 20 & \Delta t^4 / 8 & \Delta t^3 / 6 \\ \Delta t^4 / 8 & \Delta t^3 / 3 & \Delta t^2 / 2 \\ \Delta t^3 / 6 & \Delta t^2 / 2 & \Delta t \end{pmatrix}$$

Ovo je tzv. *model eksponencijalno korelisanog ubrzanja*, poznat i kao *Singerov model* [11], uopšten na slučaj prostornog kretanja cilja [6]. α_m je recipročna vremenska konstanta manevra, a σ_m^2 varijansa ubrzanja. Očigledno je da



Slika 2. Simulacija merenja položaja cilja

za $\mathbf{w}=\mathbf{0}$, model (39) postaje identičan modelu (37). Ovo znači da se, pogodnim izborom $\alpha_m \sigma_m^2$ i korišćenjem Kalmanovog filtra (18, 19, 23, 25 i 26) za $\mathbf{B}\mathbf{u}=\mathbf{0}$, može precizno pratiti cilj koji se kreće jednako ubrzano. Da bi se ubrzao prelazni proces nakon inicijalizacije Kalmanovog filtra i obezbedilo precizno praćenje nakon iščezavanja prelaznog procesa, σ_m se menja po eksponencijalnom zakonu:

$$\sigma_m(k) = \left[\lambda \frac{1}{\sigma_m(k-1)} + (1-\lambda) \frac{1}{\sigma_{m\infty}} \right]^{-1}, \quad 0 < \lambda < 1$$

počevši od velike početne vrednosti σ_{m0} i težeći ka maloj vrednosti $\sigma_{m\infty}$.

Inicijalna ocena stanja dobija se korišćenjem (27-31), a njena kovarijansa na način opisan u [6]. Vrednost σ_{m0} mora da bude velika, jer je (u slučaju jednako ubrzanog kretanja) velika greška početne ocene ubrzanja.

Parametri simulacije su dati u tabeli 1. Oni su reprezentativni za praćenje borbenog aviona nišanskim radarom i zvače se *nominalni parametri*. Varijanse merenja date u tabeli 1 ne uključuju greške zbog kvantovanja.

Tabela 1: Nominalni parametri simulacije

Varijanse merenja	Kvantovi merenja	Parametri modela
$\sigma_{\Delta\beta}^2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2$	$\Delta_{\Delta\beta} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$\alpha_m = 0,1 \text{ s}^{-1}$
$\sigma_{\Delta\alpha}^2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2$	$\Delta_{\Delta\alpha} = 1,3 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$\sigma_{m0} = 7,0 \text{ m/s}^2$
$\sigma_{\beta s}^2 = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2$	$\Delta_{\beta s} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$\sigma_{m\infty} = 1,0 \cdot 10^{-5} \text{ m/s}^2$
$\sigma_{\alpha s}^2 = 3,0 \cdot 10^{-7} \text{ rad}^2$	$\Delta_{\alpha s} = 5,2 \cdot 10^{-4} \text{ rad}$	$\lambda = 0,984$
$\sigma_d^2 = 25 \text{ m}^2$	$\Delta_d = 5 \text{ m}$	$\Delta t = 0,04 \text{ s}$

Analiza rezultata simulacije

Da bi se analizirao uticaj određenih faktora na tačnost praćenja cilja, mora se usvojiti neki kriterijum tačnosti - skalarna funkcija izlaznih veličina (rezultata) postupka praćenja. Izlaz praćenja je ocena $\hat{\mathbf{x}}$ vektora stanja cilja \mathbf{x} (8). S obzirom na referentni model (39) i datu lemu, optimalno predviđanje vektora položaja cilja t_p sekundi unapred je:

$$\hat{\mathbf{r}}(t+t_p) = \hat{\mathbf{r}}(t) + t_p \hat{\mathbf{r}}(t) + \frac{t_p^2}{2} \hat{\mathbf{r}}(t)$$

gde su:

$$\hat{\mathbf{r}} = (\hat{x} \ \hat{y} \ \hat{z})^T, \quad \hat{\mathbf{r}} = (\hat{\dot{x}} \ \hat{\dot{y}} \ \hat{\dot{z}})^T, \quad \hat{\mathbf{r}} = (\hat{\ddot{x}} \ \hat{\ddot{y}} \ \hat{\ddot{z}})^T$$

Srednjekvadratna greška predviđanja je:

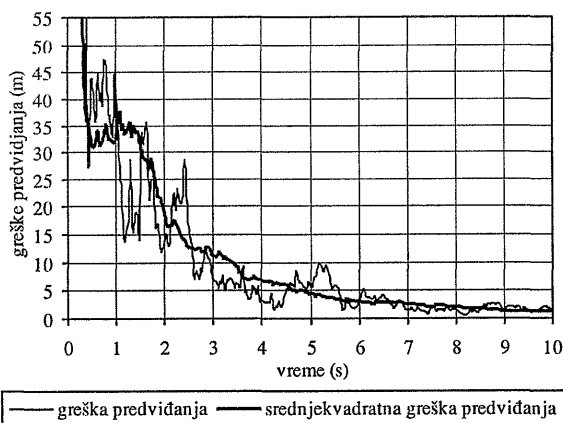
$$\sigma_{pred}(t; t_p) = \sqrt{\frac{1}{N-1} \sum_{i=1}^N [\mathbf{e}_{pred}^i(t; t_p)]^T \mathbf{e}_{pred}^i(t; t_p)} \quad (40)$$

$$\mathbf{e}_{pred}^i(t; t_p) = \mathbf{r}(t+t_p) - \hat{\mathbf{r}}^i(t+t_p)$$

gde gornji indeks "i" označava redni broj simulacije, a N je ukupan broj simulacija praćenja iste trajektorije cilja. Srednjekvadratna greška dobijena osrednjavanjem i po realizacijama simulacije i po vremenu, na zadanom intervalu (t_1, t_2) je:

$$\sigma_{pred}(t_p; t_1; t_2) = \sqrt{\frac{1}{t_2 - t_1} \int_{t_1}^{t_2} [\sigma_{pred}(t; t_p)]^2 dt} \quad (41)$$

Ona je funkcija grešaka ocena svih veličina stanja cilja (tj. koordinata i komponenta brzine i ubrzanja cilja) pa je kao takva valjan kriterijum tačnosti praćenja, koji ima i fizički smisao: ako je t_p prosečno vreme leta nevođenog projektila, onda je $\sigma_{pred}(t_p; t_1; t_2)$ predstavlja odgovarajuće srednjekvadratno odstupanje proračunske tačke susreta projektila i cilja od stvarnog položaja cilja. Usvaja se i koristi $t_p=2,5$ s - vreme leta projektila protivavionskog topa kalibra 40 mm koje odgovara polovini efikasnog dometa ovog oruđa.



Slika 3. Greške praćenja korišćenjem nominalnih parametara

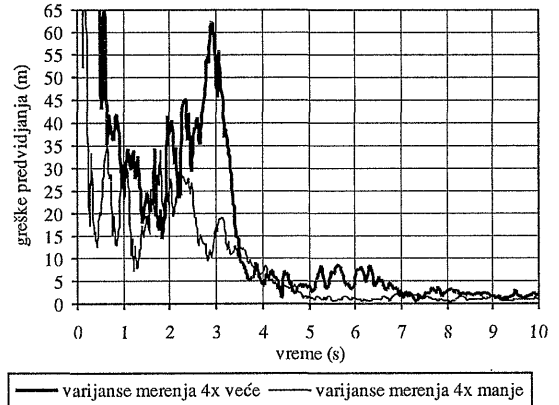
Sl.3 prikazuje grešku predviđanja položaja:

$$e_{pred}(t; t_p) = \sqrt{[\mathbf{e}_{pred}(t; t_p)]^T \mathbf{e}_{pred}(t; t_p)} \quad (42)$$

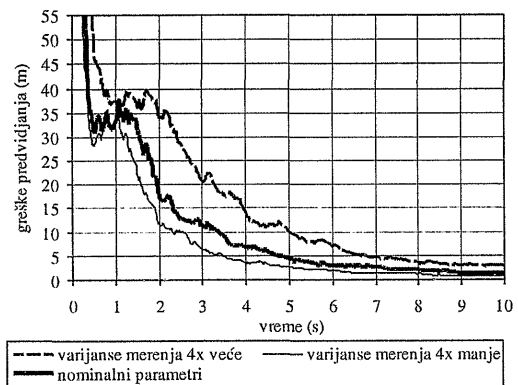
za jednu realizaciju simulacije i $t_p=2,5$ s, kao i srednjekvadratnu grešku predviđanja $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ (40) za pedeset ponovljenih simulacija praćenja cilja koji se kreće jednako ubrzano. Korišćeni su nominalni parametri simulacije. Ko-

varijansna matrica \mathbf{R} je računata na osnovu varijansi merenja datih u tabeli 1.

Slike 3, 4 i 5 prikazuju greške $e_{pred}(t; t_p)$ (42) i $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ (40) za tri različita slučaja: nominalne varijanse merenja (tabela 1), varijanse merenja četiri puta veće od nominalnih i varijanse merenja četiri puta manje od nominalnih. Korišćeni su nominalni kvantovi merenja i parametri modela, a matrica \mathbf{R} računata na osnovu "stvarnih" varijansi merenja (nema grešaka statistika merenja).

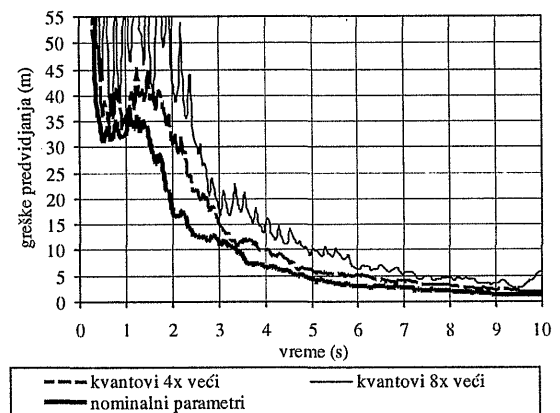


Slika 4. Greške predviđanja položaja cilja za različite greške merenja



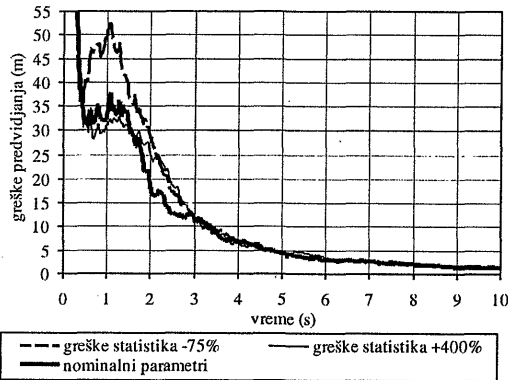
Slika 5. Srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja za različite greške merenja

Slika 6 prikazuje greške $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ (40) za sledeće slučaje: nominalni kvantovi merenja (tabela 1), kvantovi merenja četiri puta veći od nominalnih i kvantovi merenja osam puta veći od nominalnih. Korišćene su nominalne varijanse merenja i parametri modela, a matrica \mathbf{R} računata na osnovu "stvarnih" varijansi merenja, pri čemu greške kvantovanja nisu uzete u obzir.



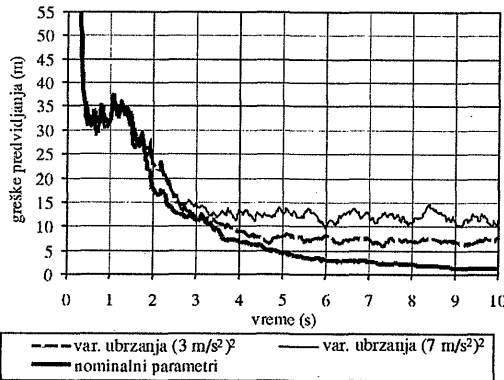
Slika 6. Srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja za različite kvantove merenja

Slika 7 prikazuje greške $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ za sledeće slučajeve: matrica **R** računata na osnovu "stvarnih" varijansi merenja, **R** je računato na osnovu ocena varijansi merenja koje su četiri puta manje od stvarnih i **R** je računato na osnovu ocena koje su četiri puta veće od stvarnih varijansi. Korišćeni su parametri simulacije iz tabele 1.



Slika 7. Srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja za različite greške statistika merenih veličina

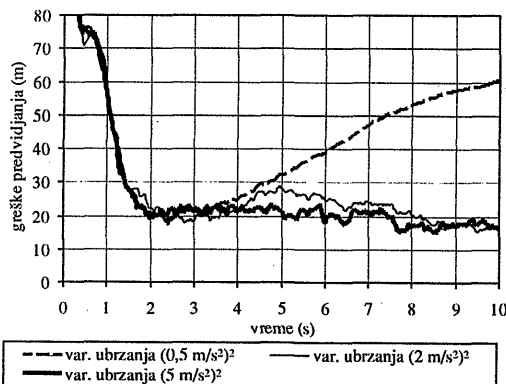
Slika 8 prikazuje greške $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ za različite vrednosti parametra $\sigma_{m\infty}$ modela cilja. Korišćene su nominalne varijanse i kvantovi merenja, a matrica **R** računata na osnovu "stvarnih" varijansi merenja.



Slika 8. Srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja za različite parametre modela cilja

U svim prethodnim slučajevima simulirano je praćenje cilja koji se kreće jednako ubrzano.

Slika 9 prikazuje greške $\sigma_{pred}(t; 2,5)$ pri praćenju opisanog koordinisanog zaokreta cilja, za različite vrednosti parametra $\sigma_{m\infty}$ modela cilja. Korišćene su nominalne varijanse i kvantovi merenja, a matrica **R** računata na osnovu "stvarnih" varijansi merenja.



Slika 9. Srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja pri praćenju neadekvatnim referentnim modelom

Tabela 2 daje srednjekvadratne greške predviđanja položaja cilja $\sigma_{pred}(2,5;1;10)$ (41) za sve simulirane slučajeve.

Tabela 2: Srednjekvadratne greške predviđanja položaja $\sigma_{pred}(2,5; t_1; t_2)$

Parametri	Let cilja	$\sigma_{pred}(2,5;1;10)$
nominalni parametri	kons. ubrzanje	12,10
varijanse merenja. 4× manje od nomin.	kons. ubrzanje	9,14
varijanse mer. 4× veće od nominalnih	kons. ubrzanje	18,05
kvantovi merenja 4× manji od nomin.	kons. ubrzanje	11,85
kvantovi merenja 4× veći od nominalnih	kons. ubrzanje	16,34
kvantovi merenja 8× veći od nomin.	kons. ubrzanje	23,27
greške statistika merenja -75%	kons. ubrzanje	15,72
greške statistika merenja +400%	kons. ubrzanje	12,74
$\sigma_{m\infty}=3,0 \text{ m/s}^2$	kons. ubrzanje	13,76
$\sigma_{m\infty}=7,0 \text{ m/s}^2$	kons. ubrzanje	16,16
$\sigma_{m\infty}=0,5 \text{ m/s}^2$	koord. zaokret	41,44
$\sigma_{m\infty}=2,0 \text{ m/s}^2$	koord. zaokret	24,06
$\sigma_{m\infty}=5,0 \text{ m/s}^2$	koord. zaokret	22,12

Napomena: parametri koji nisu navedeni u prvju koloni imaju nominalne vrednosti (tabela 1)

Prethodni primeri ilustruju uticaje sledećih parametara na tačnost praćenja: grešaka merenja (slike 3, 4 i 5), kvantova merenja (sl.6), grešaka statistika merenih veličina (sl.7), parametara modela cilja (slike 8 i 9) i neadekvatnosti modela cilja (sl.9). Može se zaključiti, da rezultati simulacije potvrđuju zaključke dobijene kvalitativnom analizom problema praćenja. Osim toga, simulacija praćenja pokazuje da *Kalmanov filter nije mnogo osetljiv na promenu parametara praćenja*. Tako četverostruko povećanje ili smanjenje vrednosti bilo kog parametra u odnosu na optimalnu vrednost povećava grešku predviđanja najviše 50%. Promene vrednosti parametara za oko 20% praktično ne utiču na tačnost praćenja. Simulacija, takođe, pokazuje da izbor referentnog modela cilja presudno utiče na tačnost praćenja, odnosno da je adekvatan model cilja neophodan za njegovo precizno praćenje.

Zaključak

Data analiza grešaka u postupku praćenja daje pregled vrsta, izvora i karaktera grešaka i daje smernice za uspešno projektovanje sistema za praćenje cilja. Može se zaključiti da sistematske i grube greške merenja položaja cilja moraju biti eliminisane i da u tom slučaju sledeće srednjekvadratne greške merenja obezbeđuju precizno praćenje cilja i efikasno vatreno dejstvo na cilj:

- srednjekvadratne greške merenja uglova 0,0005 rad i
- srednjekvadratne greške merenja daljine 5 m.

Ove vrednosti lako se ostvaruju primenom savremenih senzora. Da bi se postigla maksimalna preciznost vatre protivavionskih topova na većim daljinama, poželjno je da se daljina cilja meri još preciznije - npr. sa srednjekvadratnom greškom od 2,5 m. U tom slučaju je merenje daljine istog nivoa tačnosti kao i merenje uglova (greška ugla od 0,0005 radijana uzrokuje grešku vektora položaja cilja od 2,5 m, ako je on na daljini 5000 m).

Preporučljivo je analogne merene veličine prevoditi u digitalni oblik (tj. brojčane vrednosti) s kvantovima koji su približno jednaki srednjekvadratnim greškama merenja. Ovo je kod digitalnog senzora, kakav je na primer optički enkoder, obezbeđeno samom konstrukcijom senzora, dok se

u slučaju analognog senzora odgovarajuća veličina kvanta obezbeđuje izborom odgovarajućeg pojačanja signala senzora i odgovarajućeg analogno-digitalnog pretvarača.

Adekvatan model kretanja cilja je presudan za precizno praćenje. Ako se rezultati praćenja koriste za upravljanje vatrom protivavionskog topa, korišćeni modeli moraju precizno da opisuju ustaljene režime leta cilja [10] i da imaju mali ulazni šum (koji obezbeđuje konvergenciju praćenja). Pored toga neophodan je i mehanizam adaptacije varijanse ulaznog šuma na promenu načina kretanja, kako bi se obezbedilo kontinuirano praćenje cilja.

Literatura

- [1] ASTROM,K., WITTENMARK,B. *Computer Controlled Systems*, Prentice-Hall, Englewood Cliffs, 1984.
- [2] KALMAN,R. A New Approach to Linear Filtering and Prediction Problems. *Transaction on ASME - Journal of Basic Engineering*, Series 82D, March 1960, p.35-45.
- [3] DEBELJKOVIĆ,D. *Stohastički linearni sistemi automatskog upravljanja*. Naučna knjiga, Beograd 1985.
- [4] SIMONOVIĆ,V. *Uvod u teoriju verovatnoće i matematičku statistiku*. Građevinska knjiga, Beograd 1986.
- [5] LEDERMANN,W. (Ed.) *Handbook of Applicable Mathematics - Vol. 4: Analysis*, John Wiley & Sons, Chichester, 1982.
- [6] DODIĆ,N. *Istraživanje novih metoda praćenja manevrišućih ciljeva s primenom na sisteme upravljanja vatrom*. doktorska disertacija, Mašinski fakultet, Beograd 1998.
- [7] SORENSON,H. *Kalman Filtering: Theory and Application*, IEEE Press, New York 1985.
- [8] LEDERMANN,W. (Ed.) *Handbook of Applicable Mathematics - Vol. 6: Statistics - Part B*. John Wiley & Sons, Chichester, 1987.
- [9] DODIĆ,N. Novi postupak praćenja ciljeva u vazduhu primenom paralelnih Kalmanovih filtara. *Naučnotehnički pregled*, 1998, vol.48, no.4, p.80-85.
- [10] DODIĆ,N. Praćenje manevrišućeg cilja u vazduhu na osnovu hipoteze o koordinisanom zaokretu. *Naučnotehnički pregled*, 1997, vol.47, no.4, p.9-15.
- [11] SINGER,R. Estimate Optimal Tracking Filter Performance for Maned Maneuvering Targets. *IEEE Trans. on Aerospace and Electronic Systems*, July, 1970, vol.6, no.4, p.473-483.

Rad primljen: 28.6.1999.god.