

## Prilog istraživanju razvoja inercijalnog koordinatora raketnog projektila malog dometa

Mr Borivoj Blizanac, dipl.inž.<sup>1)</sup>

Opisan je jedan od mogućih oblika tela inercijalnog senzora i računarskih elemenata inercijalnog koordinatora. Sa ulaznim podacima, računarskim postupcima se daju na izlazu koordinate težišta, komponente ugaonih brzina i uglovi rotacije dinamičkog u odnosu na geodetski koordinatni sistem. Ističe se da postoji ograničenje u primeni predloženog rešenja inercijalnog koordinatora zbog usvojene pretpostavke da je pravac ubrzanja gravitacionog polja uvek paralelan vertikalnoj osi geodetskog koordinatnog sistema, kao i da je vrednost ovog ubrzanja konstantna.

*Ključne reči:* Raketni projektil, inercijalni koordinator, inercijalni senzor.

### Korišćene oznake i simboli

|                           |  |
|---------------------------|--|
| $S_{xyz}$                 | – geodetski koordinatni sistem vezan za mesto lansiranja,  |
| $C [1],[2],[3]$           | – dinamički koordinatni sistem raketnog projektila,  |
| $C_s (1),(2),(3)$         | – dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora,   |
| $\psi, \vartheta, \gamma$ | – uglovi rotacije dinamičkog koordinatnog sistema raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem,  |
| $r_c$                     | – vektor položaja težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem,  |
| $r_s$                     | – vektor položaja težišta inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem,   |
| $l_o$                     | – vektor položaja težišta raketnog projektila u odnosu na težište inercijalnog senzora,  |
| $T$                       | – matrica transformacije koordinata iz dinamičkog koordinatnog sistema u geodetski koordinatni sistem,   |
| $\omega$                  | – vektor ugaone brzine raketnog projektila sa komponentama u dinamičkom koordinatnom sistemu,  |
| $\Omega$                  | – vektor ugaone brzine rotacije dinamičkog koordinatnog sistema u odnosu na geodetski koordinatni sistem,  |
| $B$                       | – matrica transformacije, komponenta vektora ugaone brzine rotacije dinamičkog koordinatnog sistema u odnosu na geodetski koordinatni sistem, na dinamički koordinatni sistem, |
| $\dot{\omega}$            | – ugaono ubrzanje rotacije inercijalnog senzora u dinamičkom koordinatnom sistemu,   |
| $\dot{\Omega}$            | – ugaono ubrzanje rotacije dinamičkog koordinatnog sistema u odnosu na geodetski koordinatni sistem,   |

|                 |   |
|-----------------|---|
| $V$             | – vektor brzine težišta raketnog projektila,  |
| $a_s$           | – vektor ubrzanja inercijalnog senzora,   |
| $a$             | – vektor ubrzanja, $a = a_s - g$ ,  |
| $m$             | – masa inercijalnog senzora,  |
| $g$             | – ubrzanje Zemljine teže,   |
| $J$             | – glavni centralni moment inercije inercijalnog senzora (kao simetričnog tela),   |
| $R_1, R_2, R_3$ | – komponente glavnog vektora reakcija koje se mere u osloncima za dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora       |
| $M_1, M_2, M_3$ | – komponente glavnog momenta sila reakcija koje se mere u osloncima za dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora, |
| $2a$            | – dimenzije inercijalnog senzora (kao simetričnog tela),  |
| $S$             | – matrica sinusa uglova rotacije,   |
| $C$             | – matrica kosinusa uglova rotacije,   |

### Uvod

PODACI o položaju i orijentaciji raketnog projektila u prostoru se dobijaju različitim metodama koje su obično uslovljene namenom i konstrukcijom raketnog projektila s jedne, odnosno tehnološkim mogućnostima racionalne i ekonomske gradnje odgovarajućih inercijalnih navigacionih sistema, s druge strane. Određivanje koordinata težišta i orijentacije raketnog projektila u prostoru za vreme leta je moguće korišćenjem inercijalnih navigacionih sistema na bazi složenih konstrukcija inercijalnih platformi ili pak manje složenih besplatformnih inercijalnih navigacionih sistema (BINS) čije su konstrukcije jednostavnije, imaju veću tačnost i manju cenu.

Složenost i minimalne moguće dimenzije i težine inercijalnih platformi ograničavaju njihovu primenu. Jednostavnija konstrukcija i veća tačnost BINS-a potpuno su potisnuli inercijalni navigacioni sistem sa inercijalnim platfor-

<sup>1)</sup> Vojnotehnički institut VJ, 11000 Beograd, Katanićeva 15

mama. U opštem slučaju, sistem BINS se sastoji od bloka tri brzinska žiroskopa koji mere ugaone brzine raketnog projektila oko tri uzajamno upravna pravca, bloka od tri akcelerometra koji mere ubrzanje raketnog projektila u tri uzajamno upravna pravca i jednog ili više računara za transformaciju koordinata, rešavanje navigacione jednačine i određivanje ubrzanja Zemljine teže.

Bilo bi korisno utvrditi mogućnost tehnološkog razvoja inercijalnog koordinatora koji bi po svojim efektima bio blizak inercijalnoj platformi i BINS-u, a po svojoj jednostavnosti, dimenzijama i težini bio pogodan za ugradnju u raspoložive prostore malih raketnih projektila, što je u radu naglašeno.

### Inercijalni senzor

Položaj raketnog projektila u prostoru, kao što je poznato, određen je sa šest koordinata; trojkom brojeva ( $x_C, y_C, z_C$ ) koje određuju položaj težišta raketnog projektila u prostoru, ( $\psi, \vartheta, \gamma$ ) koji određuju orijentaciju (skretanje, penjanje, valjanje) glavnih centralnih osa inercije raketnog projektila u odnosu na usvojeni referentni sistem na zemlji - geodetski koordinatni sistem. Koordinatni sistem vezan za raketni projektil, čije se ose poklapaju sa glavnim centralnim osama inercije raketnog projektila, naziva se dinamički koordinatni sistem.

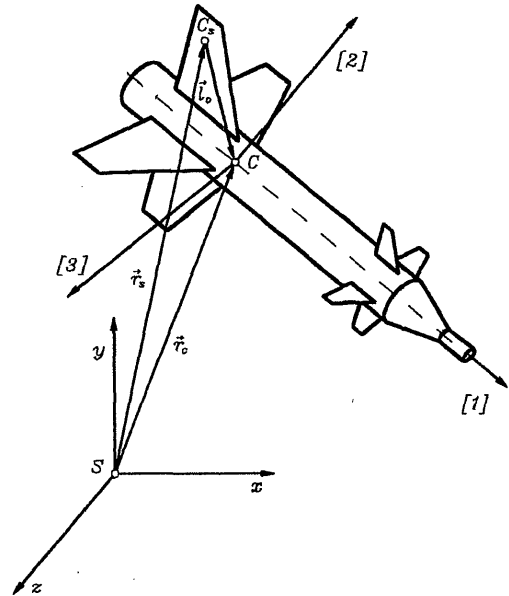
Kretanje - let raketnog projektila je poznat ako se zna kako se njegove koordinate menjaju u vremenu. Tada se u svakom trenutku tačno zna položaj, ali se posredno mogu znati i sva ostala obeležja kretanja kao što su brzine, ubrzanja, ugaone brzine itd. Opis kretanja treba da sadrži šest poznatih funkcija vremena koje se mogu menjati radi izdvajanja potrebnih oblika kretanja.

Let raketnog projektila se analizira kao kretanje apsolutno krutog tela. Pri tome je potrebno poznavati uzajamni uticaj sredine i raketnog projektila, koji se izražava aerodinamičkim, pogonskim i upravljačkim silama i momentima, kao i silu sopstvene težine. Za poznati sistem spoljnih sila i momenata se formiraju jednačine kretanja raketnog projektila.

Ako se u unutrašnjosti raketnog projektila posmatra neki njegov karakteristični deo, umesto kretanja kompletnog raketnog projektila dovoljno je poznavati kretanje ovako odabranog dela. Za analizu kretanja odabranog dela je potrebno znati sistem spoljnih sila i momenata koji deluju na njega. Ovaj sistem sila predstavlja uzajamni uticaj raketnog projektila i odabranog dela koji je okružen raketnim projektilom i kruto vezan sa njim sa dodatkom sile zbog sopstvene težine odabranog dela. Ako je moguće merenje reakcija, koje nastaju za vreme kretanja - leta između odabranog dela i raketnog projektila, odabrani deo sa poznatom težinom se može tretirati kao inercijalni senzor. Pogodnim izborom oblika homogenog tela inercijalnog senzora je moguće formirati jednačine kretanja u uprošćenom obliku, što pojednostavljuje njihovo rešavanje. Reakcije u osloncima inercijalnog senzora se mogu meriti na pogodan način tako da su stalno proporcionalne odgovarajućim naponima koji se tada tretiraju kao poznate funkcije vremena. Korišćenjem napona, kao ulaznih veličina računarskih elemenata koji obrađuju jednačine kretanja, se mogu dobiti izlazne veličine u obliku trenutnih koordinata težišta i uglova orijentacije raketnog projektila. Ovi podaci o položaju raketnog projektila u prostoru za vreme leta se mogu upotrebiti za formiranje signala grešaka upoređivanjem potrebnih i stvarnih koordinata u odgovarajućem sistemu vođenja raketnog projektila.

Sile u vezama inercijalnog senzora sa telom raketnog projektila, zajedno sa sopstvenom težinom inercijalnog senzora, predstavljaju sistem spoljnih sila pod čijim se dejstvom odvija njegovo kretanje. Kretanje glavnih centralnih osa inercije inercijalnog senzora se može usvojiti kao reprezent kretanja raketnog projektila, ako je između celine i inercijalnog senzora ostvarena apsolutno kruta veza.

Ako se inercijalni senzor ne nalazi u težištu raketnog projektila, moguće je koordinate težišta inercijalnog senzora transformisati u koordinate težišta raketnog projektila, jer se pretpostavlja kruta veza sa definisanom pozicijom inercijalnog senzora u odnosu na težište raketnog projektila, kako je to prikazano na sl.1 i 4.



Slika 1. Položaj raketnog projektila i inercijalnog senzora u prostoru i referentni koordinatni sistemi

Inercijalni senzor se može realizovati u obliku homogene teške kocke sa šest oslonaca, krutih veza, u kojima se kontinualno registruju sile reakcija u toku kretanja raketnog projektila. Bila bi pogodna i forma inercijalnog senzora kao homogene teške kugle, jer su joj svi momenti inercije za dinamičke ose jednaki.

Za ose dinamičkog sistema kocke svi momenti inercije su jednaki, što znatno pojednostavljuje diferencijalne jednačine rotacionog kretanja. Na sl.2 je prikazan inercijalni senzor u obliku homogene teške kocke sa reakcijama veza i prikazom komponenata glavnog vektora sile i momenta za dinamičke ose.

Sa sl.2 se vidi da je:

$$R_1 = A_{11} + A_{16}$$

$$R_2 = A_{12} + A_{13} + A_{14} \quad (1)$$

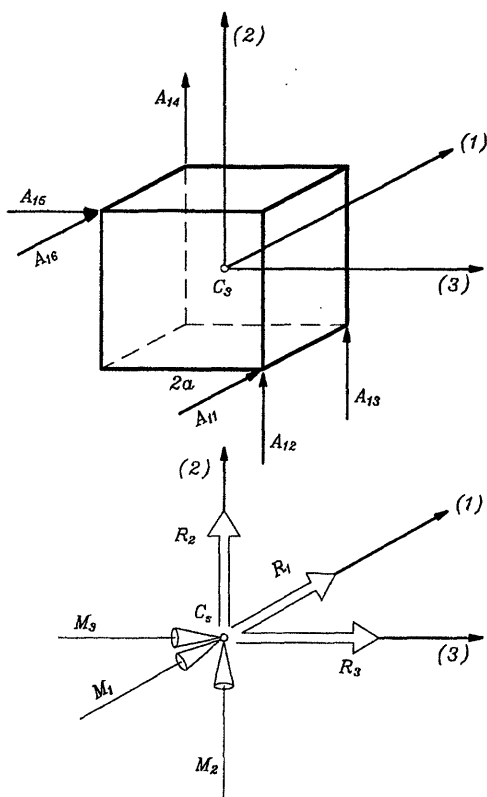
$$R_3 = A_{15}$$

a takođe da je:

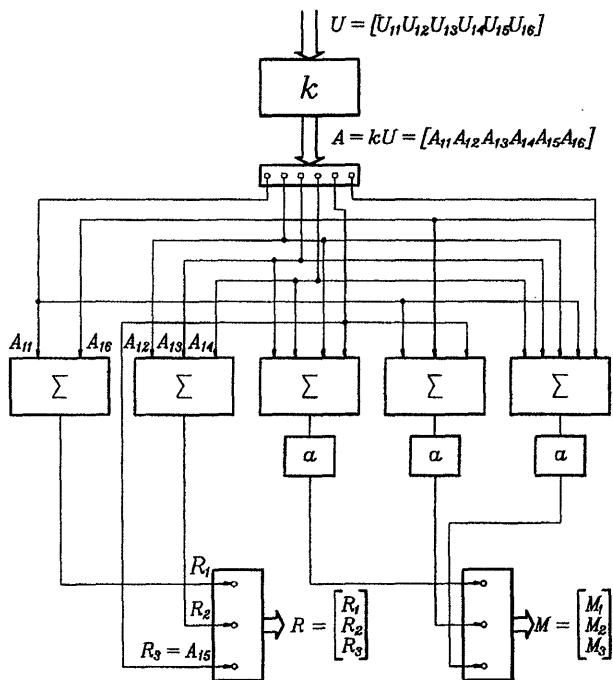
$$M_1 = a(A_{14} + A_{15} - A_{12} - A_{13})$$

$$M_2 = a(A_{11} + A_{15} - A_{16})$$

$$M_3 = a(A_{11} + A_{13} + A_{14} - A_{12} - A_{16}) \quad (2)$$



Slika 2. Inercijalni senzor u obliku homogene teške kocke sa reakcijama veza i prikazom glavnih komponenta glavnog vektora sile i momenata za dinamičke ose inercijalnog senzora



Slika 3. Blok-dijagram određivanja glavnog vektora sile i momenata reakcija veza inercijalnog senzora u matricnoj formi

Kao što se vidi, za poznate reakcije inercijalnog senzora lako se određuju komponente glavnih vektora sile i momenta za dinamičke ose. To je moguće jer je položaj reakcija u odnosu na telo inercijalnog senzora geometrijski definisan.

Reakcije inercijalnog senzora su funkcije vremena koje se u vezama mogu registrovati električnim veličinama. Ako

su to naponi, moguće je ostvariti takve veze u kojima su ovi naponi proporcionalni silama.

Određivanje komponenta glavnih vektora sile i momenta u matricnoj formi je prikazano strukturnim blok-dijagramom na sl.3.

### Koordinatni sistemi koji se koriste u analizi

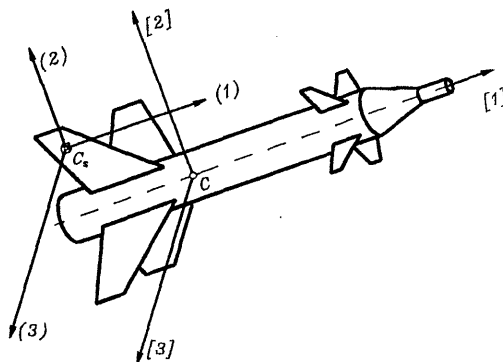
U analizi će se koristiti tri koordinatna sistema:

Geodetski koordinatni sistem, koji je inercijalni, sa početkom u težištu raketnog projektila kada se raketni projektil nalazi na lanseru, neposredno pre lansiranja. Pri tome je y-osa uvek vertikalna, x-osa je u pravcu lansiranja, a z-osa sa prve dve čini desni trijedrar,  $Sxyz$ .

Dinamički ili pokretni sistem glavnih centralnih osa inercije vezanih za telo raketnog projektila. Na lanseru, neposredno pre lansiranja, koordinatni početak ovog sistema se poklapa sa koordinatnim početkom geodetskog koordinatnog sistema. Dinamički koordinatni sistem raketnog projektila čini sistem  $C$  [1][2][3].

Dinamički ili pokretni sistem glavnih centralnih osa inercije vezanih za telo inercijalnog senzora, respektivno označen sa  $C_s$  (1)(2)(3), što znači i kruto vezan za telo raketnog projektila. U početnom položaju na lanseru osa (2) se nalazi u vertikalnoj ravni, osa (3) je paralelna z-osi, a osa (1) je otklonjena za ugao  $\vartheta_0$  od x-ose.

Na sl.1 i 4 su prikazana sva tri koordinatna sistema koji se koriste u analizi.



Slika 4. Prikaz dinamičkih koordinatnih sistema, raketnog projektila i inercijalnog senzora

Kako se u ovom radu razmatra primena opisanog inercijalnog senzora na raketnom projektilu malog dometa, uzima se da je vektor ubrzanja gravitacionog polja vertikalna i u smeru negativne y-ose. Položaj pokretnog ili dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem je određen koordinatama težišta inercijalnog senzora  $(x_s, y_s, z_s)$ , kao i uglovima rotacije dinamičkog u odnosu na geodetski koordinatni sistem  $\varphi, \vartheta, \gamma$ , što je dato u literaturi [3, 7 i 15].

### Diferencijalne jednačine kretanja inercijalnog senzora

Za poznati sistem sila i momenata, koji su u blok-dijagramu na sl.3 dati matricama  $R$  i  $M$ , diferencijalne jednačine kretanja inercijalnog senzora se mogu napisati tako da se jednačine kretanja težišta inercijalnog senzora izraze u odnosu na geodetski koordinatni sistem, a jednačine kretanja – rotacije oko težišta inercijalnog senzora – u odnosu na dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora. Za oda-

branu formu inercijalnog senzora momenti inercije za sve tri dinamičke ose su jednaki.

Komponente sile reakcije, tj glavnog vektora sile inercijalnog senzora, dobijene prema blok-dijagramu na sl.3, su date u odnosu na dinamičke ose inercijalnog senzora, pa je neophodno izvršiti transformaciju da se ove komponente izraze u geodetskom koordinatnom sistemu.

Sistem diferencijalnih jednačina kretanja inercijalnog senzora se može izraziti u matricnoj formi:

$$\begin{aligned} m \mathbf{a} &= \mathbf{T} \mathbf{R} \\ J \dot{\boldsymbol{\omega}} &= \mathbf{M} \end{aligned} \quad (3)$$

gde su:

$$\mathbf{a} = \begin{bmatrix} \ddot{x}_s \\ \ddot{y}_s + g \\ \ddot{z}_s \end{bmatrix} \quad \mathbf{T} = \begin{bmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} \end{bmatrix} \quad \dot{\boldsymbol{\omega}} = \begin{bmatrix} \dot{\omega}_1 \\ \dot{\omega}_2 \\ \dot{\omega}_3 \end{bmatrix}$$

$\mathbf{a}$ - matrica kolona vektora totalnog ubrzanja koje deluje na telo inercijalnog senzora;  $\mathbf{T}$ - matrica transformacije uglova rotacije dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem;  $\dot{\boldsymbol{\omega}}$ -vektor ugaonog ubrzanja u matricnoj formi sa komponentama u dinamičkom koordinatnom sistemu inercijalnog senzora.

Elementi matrice transformacije  $\mathbf{T}$  su opštepoznati iz referenci [1,3,15] i dati izrazima:

$$\begin{aligned} \alpha_{11} &= \cos \psi \cos \vartheta \\ \alpha_{12} &= \sin \psi \sin \gamma - \cos \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ \alpha_{13} &= \cos \psi \sin \vartheta \sin \gamma + \sin \psi \cos \gamma \\ \alpha_{21} &= \sin \vartheta \\ \alpha_{22} &= \cos \vartheta \cos \gamma \\ \alpha_{23} &= -\cos \vartheta \sin \gamma \\ \alpha_{31} &= -\sin \psi \cos \vartheta \\ \alpha_{32} &= \cos \psi \sin \gamma + \sin \psi \sin \vartheta \cos \gamma \\ \alpha_{33} &= \cos \psi \cos \gamma - \sin \psi \sin \vartheta \sin \gamma \end{aligned}$$

Sistemu diferencijalnih jednačina (3) treba pridružiti i veze između komponenata ugaonih brzina u dinamičkom koordinatnom sistemu inercijalnog senzora i izvoda uglova  $\psi, \vartheta, \gamma$ :

$$\boldsymbol{\omega} = \mathbf{B} \boldsymbol{\Omega} \quad (4)$$

gde su:

$$\boldsymbol{\omega} = \begin{bmatrix} \omega_1 \\ \omega_2 \\ \omega_3 \end{bmatrix} \quad \boldsymbol{\Omega} = \begin{bmatrix} \dot{\psi} \\ \dot{\vartheta} \\ \dot{\gamma} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{\omega}$ - vektor ugaone brzine u matricnoj formi inercijalnog senzora sa komponentama u dinamičkom koordinatnom sistemu inercijalnog senzora;  $\boldsymbol{\Omega}$ - vektor ugaone brzine u matricnoj formi sa komponentama prema definiciji rotacije dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem;  $\mathbf{B}$ - matrica transformacije data u formi:

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} \sin \vartheta & 0 & 1 \\ \cos \vartheta \cos \gamma & \sin \gamma & 0 \\ -\cos \vartheta \sin \gamma & \cos \gamma & 0 \end{bmatrix}$$

Matrična jednačina (4) predstavlja sistem nelinearnih diferencijalnih jednačina ako se ugaone brzine  $\boldsymbol{\omega}_i$  uzmu kao poznate funkcije vremena, a uglovi  $\psi, \vartheta, \gamma$  kao funkcije koje treba odrediti.

Iz izraza (3) se dobija:

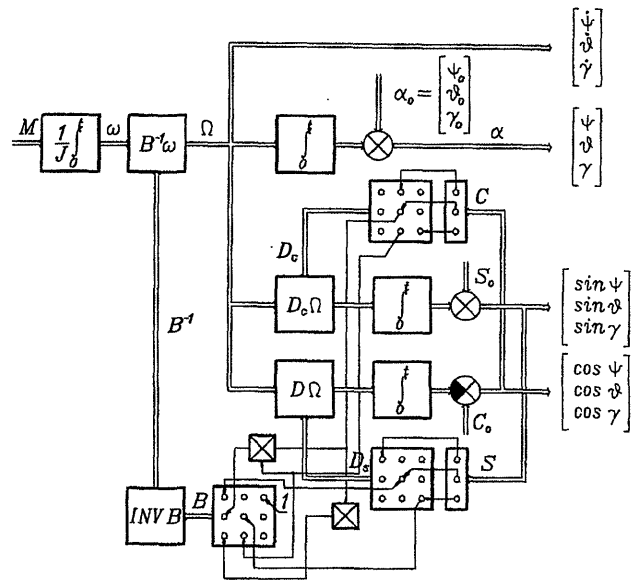
$$\boldsymbol{\omega} = \frac{1}{J} \int_0^t \mathbf{M} dt \quad (5)$$

i za  $t=0$  su  $\boldsymbol{\omega}_i = 0$ . Elementi matrice  $\mathbf{M}$  su poznate funkcije vremena određene prema blok-dijagramu na sl.3.

Iz (4), a zbog (5), dobija se:

$$\boldsymbol{\Omega} = \frac{1}{J} \mathbf{B}^{-1} \int_0^t \mathbf{M} dt \quad (6)$$

Polazeći od izraza (5) može se, prema blok-dijagramu na sl.5, rešiti sistem nelinearnih jednačina, tako da se sa ulaznim informacijama o elementima matrice  $\mathbf{M}$  određuju matrice sinusa i kosinusa traženih uglova  $\psi, \vartheta, \gamma$ , kao i sami uglovi  $\psi, \vartheta, \gamma$ .



Slika 5. Blok-dijagram određivanja matrica sinusa i kosinusa uglova rotacije  $\psi, \vartheta, \gamma$

U blok-dijagramu na sl.5 za određivanje matrica sinusa i kosinusa uglova rotacije su korišćene relacije:

$$\mathbf{S} = \begin{bmatrix} \sin \psi \\ \sin \vartheta \\ \sin \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \sin \psi_0 \\ \sin \vartheta_0 \\ \sin \gamma_0 \end{bmatrix} + \int_0^t \begin{bmatrix} \dot{\psi} \cos \psi \\ \dot{\vartheta} \cos \vartheta \\ \dot{\gamma} \cos \gamma \end{bmatrix} dt$$

$$\mathbf{C} = \begin{bmatrix} \cos \psi \\ \cos \vartheta \\ \cos \gamma \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \psi_0 \\ \cos \vartheta_0 \\ \cos \gamma_0 \end{bmatrix} - \int_0^t \begin{bmatrix} \dot{\psi} \sin \psi \\ \dot{\vartheta} \sin \vartheta \\ \dot{\gamma} \sin \gamma \end{bmatrix} dt$$

### Određivanje početnih uslova

Da bi se prema blok-dijagramu na sl.5 odredile matrice kosinusa, sinusa, ugaone brzine i uglova rotacije podređno je prethodno odrediti početne uslove. Početni uslovi se mogu odrediti iz sistema jednačina ravnoteže sile u izrazu (3) za uslove mirovanja:

$$m \begin{bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha_{11}^0 & \alpha_{12}^0 & \alpha_{13}^0 \\ \alpha_{21}^0 & \alpha_{22}^0 & \alpha_{23}^0 \\ \alpha_{31}^0 & \alpha_{32}^0 & \alpha_{33}^0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{bmatrix} \quad (7)$$

gde indeks "0" označava vrednosti pri mirovanju. Elementi matrice transformacije u (7) su složeni trigonometrijski izrazi i (7) čine tri složene trigonometrijske jednačine u kojima su nepoznate  $\psi_0, \vartheta_0, \gamma_0$ . U principu, ovaj sistem jednačina je težak za rešavanje.

U radu su već dati koordinatni sistemi koji se koriste u analizi. Iz načina njihovog uvođenja i orijentacije proizlazi da su  $\psi_0 = 0$  i  $\gamma_0 = 0$  pa ostaje samo da se odredi  $\vartheta_0$ .

Iz prethodnog razmatranja izraz (7) se svodi na oblik:

$$m \begin{Bmatrix} 0 \\ g \\ 0 \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \cos \vartheta_0 & -\sin \vartheta_0 & 0 \\ \sin \vartheta_0 & \cos \vartheta_0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{Bmatrix} \begin{Bmatrix} R_{10} \\ R_{20} \\ R_{30} \end{Bmatrix} \quad (8)$$

Iz (8) se dobija da je:

$$\begin{aligned} 0 &= R_{10} \cos \vartheta_0 - R_{20} \sin \vartheta_0 \\ mg &= R_{10} \sin \vartheta_0 + R_{20} \cos \vartheta_0 \\ 0 &= R_{30} \end{aligned}$$

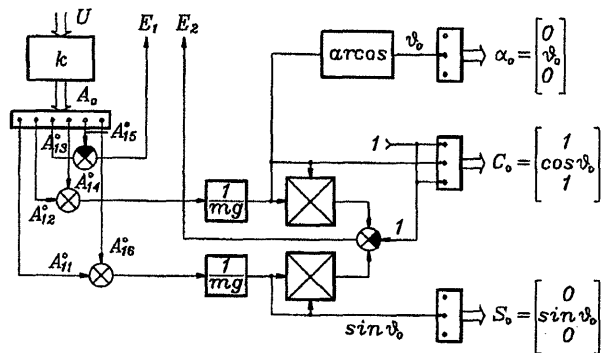
Za uslove mirovanja raketnog projektila-inercijalnog senzora na lanseru sve komponente glavnog momenta sila reakcija, koje se mere u osloncima za dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora, jednake su nuli, tj :

$$\begin{aligned} 0 &= A_{14}^0 + A_{15}^0 - A_{12}^0 - A_{13}^0 \\ 0 &= A_{11}^0 + A_{15}^0 - A_{16}^0 \\ 0 &= A_{11}^0 + A_{13}^0 + A_{14}^0 - A_{12}^0 - A_{16}^0 \end{aligned}$$

Iz prethodne dve grupe jednačina se dobija  $R_{10} = 2A_{11}^0$  i  $R_{20} = 2A_{12}^0$ , a takođe da je:

$$\begin{aligned} \sin \vartheta_0 &= \frac{1}{2} mg \frac{A_{11}^0}{(A_{11}^0)^2 + (A_{12}^0)^2} \\ \cos \vartheta_0 &= \frac{1}{2} mg \frac{A_{12}^0}{(A_{11}^0)^2 + (A_{12}^0)^2} \end{aligned}$$

Korišćenjem osnovne trigonometrijske jednakosti da je  $\sin^2 \vartheta_0 + \cos^2 \vartheta_0 = 1$ , iz prethodnih izraza se dobija da je  $\sin \vartheta_0 = \frac{2}{mg} A_{11}^0$  i  $\cos \vartheta_0 = \frac{2}{mg} A_{12}^0$ .



Slika 6. Blok-dijagram određivanja matrica sinusa i kosinusa uglova rotacije dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem, kao i samih uglova rotacije, za stanje mirovanja raketnog projektila na lanseru

Početne vrednosti ugla elevacije  $\vartheta_0$  se mogu odrediti pomoću ulaznih podataka koji se dobijaju od inercijalnog senzora prema algoritmu koji je dat blok-dijagramom na sl.6. Vrednosti  $E_1$  i  $E_2$  označavaju greške ortogonalnosti si-

nusa i kosinusa koje se mogu, stalnim merenjem, koristiti kao veličina grešaka merenja reakcija.

### Određivanje koordinata i brzine težišta raketnog projektila

Nerealno je očekivati da je moguća ugradnja inercijalnog senzora u raketni projektil tako da se njihova težišta poklapaju. Kako je raketni projektil telo promenjive mase za vreme leta, problem je još složeniji. U radu se razmatra slučaj kada je između dinamičkih koordinatnih sistema inercijalnog senzora i raketnog projektila ostvarena kruta veza sa poznatim koordinatama težišta raketnog projektila u odnosu na dinamički koordinatni sistem inercijalnog senzora, sl.1 i 4. Može se pisati da je:

$$r_c = r_s + l_0 \quad (9)$$

gde su:  $r_c$ - vektor položaja težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem;  $r_s$ - vektor položaja težišta inercijalnog senzora u odnosu na geodetski koordinatni sistem;  $l_0$ - vektor položaja težišta raketnog projektila u odnosu na težište inercijalnog senzora, čije su koordinate u dinamičkom koordinatnom sistemu inercijalnog senzora  $\xi_0, \eta_0, \zeta_0$ . Vektorska jednačina (9) u matricnoj formi je:

$$\begin{Bmatrix} x_c \\ y_c \\ z_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} x_s \\ y_s \\ z_s \end{Bmatrix} + \mathbf{T} \begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

gde je  $\mathbf{T}$ - matrica transformacije iz dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora u geodetski koordinatni sistem. Matrica  $\mathbf{T}$  može biti data pomoću matrica prve  $\mathbf{T}_\psi$ , druge  $\mathbf{T}_\vartheta$  i treće  $\mathbf{T}_\gamma$  rotacije dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora (ili raketnog projektila) u odnosu na geodetski (nepokretni) koordinatni sistem. Iz literature je poznato da je:

$$\mathbf{T} = \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\vartheta \mathbf{T}_\gamma \quad (11)$$

a poznati su i elementi matrica  $\mathbf{T}_\psi, \mathbf{T}_\vartheta, \mathbf{T}_\gamma$ .

Projekcije vektora brzine težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem se mogu dobiti diferenciranjem jednačine (10), tako da je:

$$\begin{Bmatrix} \dot{x}_c \\ \dot{y}_c \\ \dot{z}_c \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \dot{x}_s \\ \dot{y}_s \\ \dot{z}_s \end{Bmatrix} + \dot{\mathbf{T}} \begin{Bmatrix} \xi_0 \\ \eta_0 \\ \zeta_0 \end{Bmatrix} \quad (12)$$

Ovde je:

$$\dot{\mathbf{T}} = \dot{\mathbf{T}}_\psi \mathbf{T}_\vartheta \mathbf{T}_\gamma + \mathbf{T}_\psi \dot{\mathbf{T}}_\vartheta \mathbf{T}_\gamma + \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\vartheta \dot{\mathbf{T}}_\gamma \quad (13)$$

gde su:  $\dot{\mathbf{T}}_\psi = \dot{\psi} \mathbf{t}_\psi$ ;  $\dot{\mathbf{T}}_\vartheta = \dot{\vartheta} \mathbf{t}_\vartheta$ ;  $\dot{\mathbf{T}}_\gamma = \dot{\gamma} \mathbf{t}_\gamma$ . Sve prikazane matrice su poznate u literaturi i ovde se neće prikazivati elementima koji čine njihovu strukturu.

Brzina težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem sada se može izraziti u matricnoj formi:

$$\mathbf{V}_c = \mathbf{V}_s + (\dot{\psi} \mathbf{t}_\psi \mathbf{T}_\vartheta \mathbf{T}_\gamma + \mathbf{T}_\psi \dot{\vartheta} \mathbf{t}_\vartheta \mathbf{T}_\gamma + \mathbf{T}_\psi \mathbf{T}_\vartheta \dot{\gamma} \mathbf{t}_\gamma) \mathbf{l}_0 \quad (14)$$

Da bi se odredile koordinate težišta raketnog projektila kao i njegova brzina u odnosu na geodetski koordinatni sistem, posmatrajući strukturu jednakosti (10-14) potrebno je odrediti kinematske transformacije. Blok-dijagram na sl.7

daje način izračunavanja tih transformacija neophodnih za dobijanje koordinata težišta i brzine težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem.

istom blok-dijagramu simbolima  $S^D$  i  $C^D$  je označena operacija formiranja matrica  $D_S$  i  $D_C$  koje su, u stvari, dijagonalne matrice reda  $3 \times 3$ . Pritom su elementi dijagonale dobijeni prema:

$$d_{i,j}^S = \delta_{i,j} s_{i,1}$$

$$d_{i,j}^C = \delta_{i,j} c_{i,1}$$

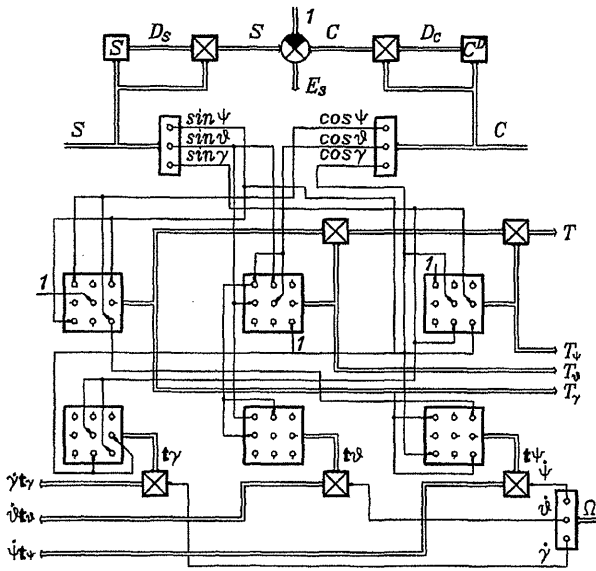
gde je  $\delta_{i,j} = \begin{cases} 1 & \text{za } i=j \\ 0 & \text{za } i \neq j \end{cases} \quad i=1,2,3 \text{ i } j=1,2,3$

Elementi matrice  $S$  su, u ovom slučaju, označeni sa  $s_{i,1}$ , a  $C$  sa  $c_{i,1}$ .

### Opis inercijalnog koordinatora raketnog projektila malog dometa

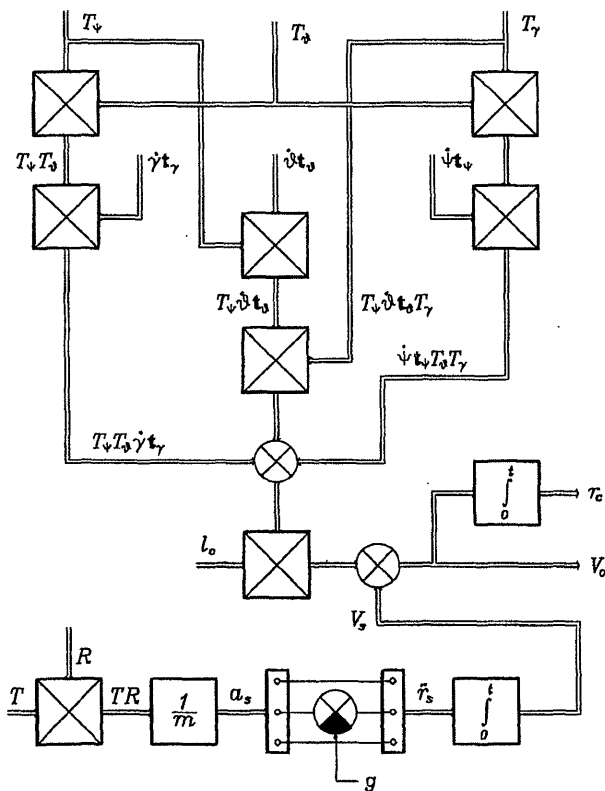
Inercijalni koordinator raketnog projektila malog dometa čine inercijalni senzor i računar. Opis funkcije inercijalnog senzora sa jednom od mogućih oblika homogenog materijalnog tela dat je u radu ranije.

Blok-dijagramima na sl.3, 5, 6, 7 i 8 definisane su funkcije računara koji na svom izlazu treba da da podatke o položaju raketnog projektila u prostoru, njegovoj orijentaciji u prostoru kao i njegovoj brzini. Računar u sebi treba da sadrži sklopove koji obezbeđuju realizaciju pet algoritama kako je to prikazano na sl.9. Na sl.9 je pokazano da se merenjem reakcija krutih veza inercijalni senzor – raketni projektil, algoritmom A-1 dobijaju komponente sile  $R$  i momenta  $M$  koje deluju u osama dinamičkog koordinatnog sistema inercijalnog senzora. Algoritmom A-2 se pri mirovanju raketnog projektila na lanseru, neposredno pre starta, merenjem reakcije  $U_0$  dobijaju na izlazu vrednosti početnog ugla elevacije i odgovarajući sinusi i kosinusi ovog ugla. Algoritmom A-3, pomoću ulaznih podataka  $M, \alpha_0, S_0$  i  $C_0$ , se određuju na izlazu  $\Omega$  matrice sinusa odnosno kosinusa uglova rotacije kao i matrice sinusa uglova. Algoritmom



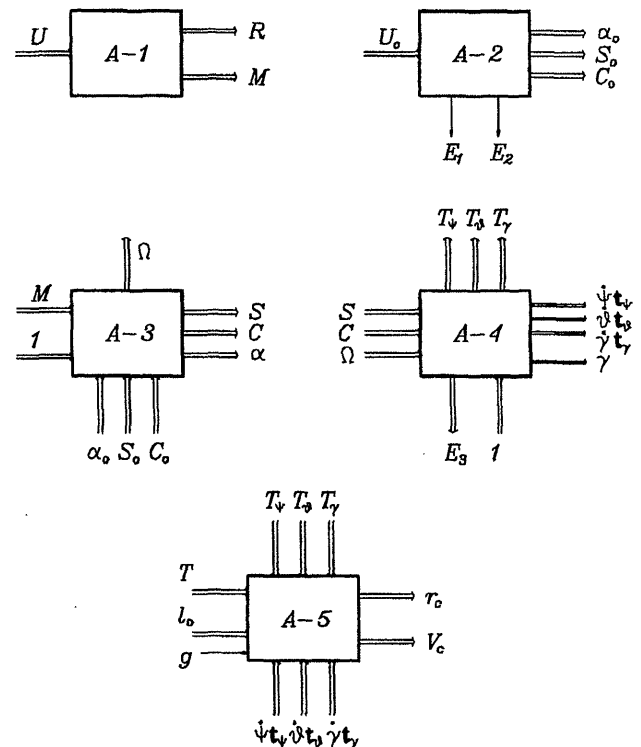
Slika 7. Blok-dijagram određivanja kinematičkih transformacija za dobijanje koordinata težišta i brzine težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem

Na sl.8 je prikazan blok-dijagram dobijanja koordinata težišta kao i brzine težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem.



Slika 8. Blok-dijagram određivanja koordinata i brzine težišta raketnog projektila u odnosu na geodetski koordinatni sistem

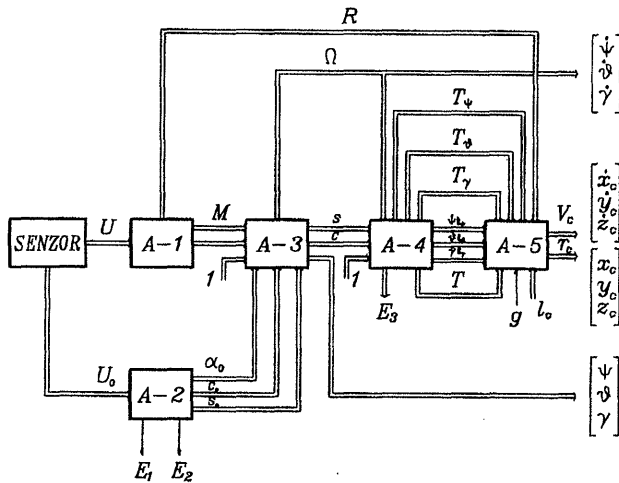
U blok-dijagramu na sl.7 matrica  $E_3$  se može, stalnim merenjem, koristiti za ocenu numeričkog postupka jer daje odstupanje sinusa i kosinusa od uslova ortogonalnosti. U



Slika 9. Algoritmi koje treba da realizuje računar inercijalnog koordinatora raketnog projektila malog dometa

A-4 se vrše kinematske transformacije; od ulaznih veličina  $\Omega$ ,  $S$  i  $C$  se određuju matrice transformacije  $T_\psi$ ,  $T_\phi$ ,  $T_\gamma$ , kao i posrednim putem vrednosti njihovih izvoda  $\dot{\psi}t_\psi$ ,  $\dot{\phi}t_\phi$  i  $\dot{\gamma}t_\gamma$ . Ovaj algoritam određuje i totalnu matricu transformacije  $T$ .

Algoritam A-5, kako je pokazano, pomoću ulaznih veličina poznatih matrica transformacija, sa ulaznim veličinama kao što su matrice  $R$ , i  $l_0$  i gravitaciono ubrzanje  $g$ , izračunavaju se vrednosti brzine i koordinate težišta raketnog projektila. Na slici 10 prikazan je matricni blok-dijagram inercijalnog koordinatora raketnog projektila malog dometa, koji je formiran na osnovu prethodne analize.



Slika 10. Matricni blok-dijagram inercijalnog koordinatora raketnog projektila malog dometa

Izlazni podaci inercijalnog koordinatora se mogu koristiti za upoređivanje stvarnih i potrebnih koordinata, odnosno brzina, pri formiranju signala grešaka u sistemima vođenja i upravljanja.

### Zaključak

Inercijalni koordinatori raketnog projektila malog dometa, uz pretpostavke koje su date u prethodnoj analizi, moguće je tehnološki razviti ako se realizuju dovoljno osetljivi oslonci inercijalnog senzora koji bi pod dejstvom malih sila davali pouzdane i tačne vrednosti električnih veličina proporcionalne silama. Isto tako, uz pomoć opisanih algoritama, moguće je realizovati računarske sklopove malih dimenzija i potrebne tačnosti. Današnje tehnološke mogućnosti mogu da obezbede tehnološki razvoj jednog ovakvog uređaja, posebno s aspekta razvijenosti računarske tehnologije. Po svojoj koncepciji predloženo rešenje inercijalnog

koordinatora je znatno jednostavnije od klasičnog rešenja sa inercijalnim platformama, a jednostavnije je i od BINS-a, što ga čini atraktivnim za tehnološki razvoj i primenu u raketnoj tehnici.

### Literatura

- [1] O'DONNELL, C.F., ED. *Inertial Navigation-Analysis And Design*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [2] POMIJKAEV, I.I. *Inercijalni metod izmerenija parametров dviženija letateljnijih apparatov besplatformennoj inercijalnoj sistemij. Mašinstroenie*, Moskva, 1969.
- [3] BROMBERG, P.V. *Teorija inercijalnojih sistem navigacii*. Nauka, Moskva, 1970.
- [4] GORENŠTEJN, I.A., ŠULJMAN, I.A. *Inercijalnie navigacionie sistemij. Mašinstroenie*, Moskva, 1970.
- [5] FROLOV, V.S. *Inercijalnie upravlenie raketami*. Voennoe izdatel'stvo Ministarstva oboronji SSSR, Moskva, 1975.
- [6] FROLOV, V.S. *Radio-inercijalnie sistemij navedenija*. Sovetskoe radio, Moskva, 1976.
- [7] LEBEDEV, D.V. *Stabilizacija letateljnogo apparata besplatformennoj inercijalnoj sistemij. Mašinstroenie*, Moskva, 1977.
- [8] LEBEDEV, D.V., TKAČENKO, A.I. *Sistemij inercijalnogo upravlenija. Algoritmicheskie aspektij*. Naukova dumka, Kiev, Moskva, 1991.
- [9] LEBEDEV, A.A., ČERNOBROVKIN, L.S. *Dinamika poleta bespilotnih letateljnijih apparatov*. Mašinstroenie, Moskva, 1973.
- [10] FEODOSJEV, V.I. *Osnovi tehnikij raketnogo poleta*. Nauka, Moskva, 1979.
- [11] MOGILEVSKIJI, V.D. *Navedenie ballističeskij letateljnijih apparatov*. Mašinstroenie, Moskva, 1976.
- [12] BROXMEYER, C. *Inertial Navigatin Systems*. McGraw-Hill Book Co., New York, 1964.
- [13] BRITTING, K.R. *Inertial Navigation Systems Analysis*. Wiley-Interscience, New York, 1971.
- [14] DRAPER, C.S., WRIGLEY, W., HOVORKA, J. *Inertial Guidance*. Pergamon Press, New York, 1960.
- [15] MINOVIĆ, S. *Osnove teorije samonavedenij raketa*. Vojnoizdavački i novinski centar, Beograd, 1988.
- [16] MINOVIĆ, S. *Dinamika sistema vođenija i upravljanija projektila*. Mašinski fakultet, Beograd, 1970.
- [17] ROJTENBERG, J.N. *Giroskopi*. Nauka, Moskva, 1966.
- [18] OSTOSLAVSKIJI, V., STRAŽEVA, I.V. *Dinamika poletatrajektorijij letateljnijih apparatov*. Mašinstroenie, Moskva, 1969.
- [19] NIKITIN, E.A., BALAŠOVA, A.A. *Projektirovanie differencirujuščij i integrujuščij giroskopov i akceleroetrov*. Moskva, 1969.
- [20] BLIZANAC, B. *Formiranje algoritma numeričkog proračuna sistema diferencijalnih jednačina inercijalnog koordinatora*. magistarski rad, Fakultet strojarstva i brodogradnje, Zagreb, 1977.
- [21] ČUK, D., ČURČIN, M., MANDIĆ, S. *Analiza ugaonij grešakij besplatformnog inercijalnog navigacionog sistema primenom adjungovanog sistema*. *Naučnotehnički pregled*, 1998, vol. XLVIII, no.4, p.58-69.

Rad primljen: 5.11.1997.god.